МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра управления качеством, метрологии и сертификации

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе
____________ О.Г. Локтионова
«_7_» _02_______ 2018 г.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ КОНФЛИКТА

Методические указания к выполнению практической работы по курсу «Системный анализ» по направлению подготовки 27.04.01 Стандартизация и метрология, профиль «Метрологические и контрольно-измерительные системы»

Курск 2018

Составители: В.В. Куц, Н.А. Масалов

УДК 519.6

Рецензент
Доктор технических наук, профессор *Е.В. Агеев*

Принятие решений в условиях конфликта : методические указания к выполнению практической работы по курсу «Системный анализ» по направлению подготовки 27.04.01 Стандартизация и метрология, профиль «Метрологические и контрольно-измерительные системы» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Куц, Н.А. Масалов. - Курск, 2018. - 11 с.: ил. 2, табл. 6.

Содержат методические указания к выполнению практической работы по курсу «Системный анализ» у студентов, обучающихся по направлению подготовки 27.04.01 Стандартизация и метрология, профиль «Метрологические и контрольно-измерительные системы».

В методических указаниях излагаются цели, задание, теоретические сведения, необходимые для проведения практической работы, а также порядок её выполнения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 7.02.18 . Формат 60x84 1/16.
Усл.печ.л. 0,64 .Уч.-изд.л 0,58. Тираж 100 экз. Заказ.309 Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94

1. Учебные вопросы, подлежащие рассмотрению:
- Основные типы неопределенности в задачах принятия решений
- Принятие решений в условиях риска
- Принятие решений в условиях неопределённости
- Принятие решений в конфликтных ситуациях
- Стохастические задачи принятия решений

2. Методические рекомендации по подготовке к занятию.

Перед выполнением задания необходимо изучить теоретические вопросы принятия

решений в детерминированных задачах, и задачах многокритериальной оптимизации,

основанные на принципе Парето. Разобраться в содержании методов преодоления

неопределённостей при выборе решений из Парето – оптимального множества решений.

3. Принятие решения в условиях конфликта

Задачи принятия решений в условиях конфликта изучаются в теории игр. Участвующие в конфликте стороны заинтересованы в том, чтобы скрыть от противника свои намерения. Основой теории игр является формализация понятий конфликта, принятия решения в нём и полезности (оптимальности) этого решения.

Содержательно конфликтом считают всякое явление, относительно которого можно говорить о его участниках, об их действиях, об исходах явления, к которым эти действия приводят, о сторонах заинтересованных в этих исходах и о сущности этой заинтересованности.

Участников конфликта называют игроками, их возможные действия – стратегиями, исходы конфликта – ситуациями, заинтересованные стороны – участники конфликта, сущность заинтересованности – возможные предпочтения одной ситуации перед другой для каждого игрока. Конкретизация этих понятий приводит к разнообразным частным классам игр.

Принятием решения в теории игр считается выбор игроком своей стратегии. Вопрос о формализации понятия полезности (оптимальности) принимаемого решения является сложным. Единого представления о нём нет, и поэтому рассматриваются разные версии, но в основе каждой из них лежит интуитивное представление о полезности, как о чём - то устойчивом и справедливом. Формализация тих представлений определяется системой аксиом.

Ситуации, удовлетворяющие в игре требованиям полезности (оптимальности) называются решениями игры. Ограничимся рассмотрением игр двух участников с прямо противоположными (антагонистическими) интересами. Формально эта противоположность выражается в том, что при переходе от одной ситуации к другой увеличение выигрыша одного игрока влечёт численно равное уменьшение выигрыша другого. Сумма выигрышей игроков в любой ситуации постоянна (её можно считать равной нулю). Для некоторых военных операций, спортивных игр, деловых решений в условиях конкуренции и многих других явлений антагонистические игры являются хорошей моделью.

Антагонистическая игра задаётся множествами A и B стратегий игроков и вещественной функцией H, определённой на множестве $A\times B$ и являющейся функцией выигрыша первого игрока (функция выигрыша второго игрока равна –H). Процесс игры состоит в выборе игроками некоторых своих стратегий $a \in A$, $b \in B$, после чего первый игрок получает от второго сумму $H(a,b)$. Разумное (осторожное) поведение игроков в антагонистической игре осуществляется на основании принципа максимина. Если

$$\max_{a\in A}\min_{b\in B} H(a,b) = \min_{b\in B}\max_{a\in A} H(a,b),$$

то у каждого игрока существует оптимальная осторожная стратегия. Эта стратегия называется «чистой» стратегией. Однако уже в самых простых ситуациях принцип максимина может не выполняться.

Если множества A и B конечны, то антагонистическая игра называется матричной игрой. Если первый игрок имеет m стратегий, а второй – n стратегий, то матричная игра может быть задана $m\times n$ матрицей $A = \{a_{i,j}\}$. Матричные игры моделируют широкий круг конфликтных антагонистических ситуаций с двумя участниками и конечным множеством возможных действий у каждого из них. Иногда под одним из игроков понимается «природа», как совокупность всех обстоятельств, неизвестных принимающему решение другому игроку. Такие игры называют играми с природой. Они возникают при необходимости учёта природных и других неконтролируемых факторов, не находящихся в распоряжении какого либо лица. При этом природе приписывается роль «сознательного противника» – антагониста.

Для решения матричной игры необходимо найти оптимальные стратегии игроков и цену игры.

Практическое правило для решения матричной игры следующее. К платёжной матрице A добавим один столбец справа и одну строку снизу. В ячейки столбца запишем минимальное значение платежа соответствующей строки, а в ячейки строки – максимальное значение соответствующего столбца.

Таблица 6. Решение матричной игры

	Стратегии	Игрок 2		min
		S	*T*	
Игрок 1	*P*	-2	2	-2
	Q	-1	3	-1
	R	1	2	1
max		1	3	$v_1 = v_2 = 1$

Первый игрок будет выбирать стратегию, которая гарантирует ему максимальный выигрыш независимо от выбора стратегии второго игрока. Поэтому он выберет стратегию, при которой он будет иметь максимальный выигрыш из возможных минимальных выигрышей (в столбце *min* это элемент, соответствующий стратегии R первого игрока), т.е. гарантированный выигрыш первого игрока

$$v_1 = \max_i \min_j a_{i,j}.$$

Этот выигрыш v_1 называют нижней ценой игры, а соответствующую стратегию – максиминной стратегией первого игрока.

Второй игрок, стараясь минимизировать проигрыш, выберет стратегию, гарантирующую наименьший из максимально возможных проигрышей, т.е. стратегию

$$v_2 = \min_j \max_i a_{i,j}, \qquad (7)$$

которую называют минимаксной стратегией. Число v_2 называют верхней ценой игры. Если $v_1 = v_2 = v$, то число v называют ценой игры. Игры, для которых $v_1=v_2= v$, называют играми с седловой точкой.

Седловых точек может быть несколько. Однако цена игры во всех седловых точках одна и та же. Если один из игроков применяет стратегию, соответствующую одной из седловых точек, то при этом ему обеспечен выигрыш не меньше цены игры. Если и второй игрок применяет стратегию, соответствующую какой либо седловой точке, то и ему обеспечен проигрыш не более цены игры. Одностороннее отклонение от седловой точки не выгодно ни одному из игроков. Такое отклонение может в лучшем случае оставить выигрыш (проигрыш) неизменным, а в худшем случае – уменьшить (увеличить) его. Таким образом, в играх с седловой точкой оптимальные стратегии обладают своеобразной устойчивостью: если один из игроков применяет свою оптимальную стратегию, то для другого всегда невыгодно отклоняться от своей оптимальной стратегии.

К классу игр, имеющих седловую точку, относятся игры, в которых каждый игрок знает результаты всех предыдущих ходов. Такие игры называются играми с полной информацией. Примерами игр с полной информацией служат шашки, шахматы, «крестики – нолики» и т.д. В теории игр доказано, что каждая игра с полной информацией имеет седловую точку, т.е. имеется пара оптимальных стратегий противников, дающая устойчивый выигрыш, равный чистой цене игры.

Не всякая матричная игра приводит к решениям с единственным оптимальным выбором для обоих игроков. Это значит, что ни один из игроков не может выбрать чистую оптимальную стратегию. В этом случае каждый из игроков достигает уменьшения риска использованием смешанных стратегий. Формально смешанной стратегией называют n – мерный вероятностный вектор p, координаты которого неотрицательны и сумма их равна 1. Значения координат вектора интерпретируются как вероятности выбора стратегии.

Смешанные стратегии реализуются случайным выбором чистых стратегий с вероятностями, заданными в векторе p. Например, пусть для первого игрока смешанная стратегия задана вектором $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а для второго – вектором $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Так как какая то из стратегий обязательно реализуется, то

$$\sum_i x_i = 1, \quad \sum_i y_i = 1.$$

Это значит, что первый игрок будет выбирать стратегию с номером i с вероятностью x_i, а второй игрок стратегию с номером j – с вероятностью y_j.

Полагая, что игроки выбирают стратегии независимо друг от друга, вероятность события *(i,j)* очевидно равна

$$p_{i,j} = x_i y_j.$$

В результате применения смешанных стратегий выигрыш (проигрыш) становится случайной величиной

$$\xi = \begin{bmatrix} a_{i,j} \\ p_{i,j} \end{bmatrix}_{(i=\overline{1,m};\, j=\overline{1,m})} \tag{8}$$

Математическое ожидание этой случайной величины и есть выигрыш (проигрыш) первого (второго) игрока в смешанных стратегиях *(x,y)*

$$M\xi = \sum_{i,j} p_{i,j} \cdot a_{i,j} = F_A(x,y). \tag{9}$$

Следовательно, исходной платёжной матрице *A* соответствует новая платёжная матрица $F_A(x,y)$ игры в смешанных стратегиях. В теории игр доказано, что игра в смешанных стратегиях всегда имеет седловую точку, т.е. такая игра всегда имеет цену, и каждый игрок имеет оптимальную смешанную стратегию. Если игра размерности $m \times n$ не имеет в чистых стратегиях седловой точки, то при больших значениях *m* и *n* решить её достаточно трудно. В некоторых случаях такую задачу удаётся упростить исключением дублирующих или заведомо невыгодных стратегий. Например, пусть имеем игру с матрицей (таблица 7)

Таблица 7. Матрица игры

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	3	4	2
A_2	0	2	3	2
A_3	1	3	4	2
A_4	5	4	2	1

Очевидно, что стратегии A_1 и A_3 совпадают и поэтому любую из них можно вычеркнуть.

Сравнивая стратегии A_1 и A_2, убеждаемся, что первая из них доминирует вторую и, следовательно, стратегия A_2 заведомо невыгодная и должна быть вычеркнута. После вычёркивания стратегий A_2 и A_3 получаем значения, приведенные в таблице 8.

Таблица 8. Матрица игры

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	3	4	2
A_4	5	4	2	1

Для противника стратегия B_2 и B_3 заведомо невыгодные по сравнению со стратегией B_4, и тоже должны быть вычеркнуты. В итоге получаем матрицу игры (таблица 9)

Таблица 9. Матрица игры

$A \setminus B$	B_1	B_4
A_1	1	2
A_4	5	1

Наиболее простые конечные игры имеют размерность *2×2* и *2×m*. Рассмотрим игру *2×2* без седловой точки с матрицей (таблица 10)

Таблица 10. Матрица игры

$A \setminus B$	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Требуется найти оптимальную смешанную стратегию игрока *A*:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

Эта стратегия имеет свойство: при любых полезных стратегиях противника выигрыш будет равен цене игры υ. В игре *2×2* обе стратегии противника – полезные, так как иначе игра имела бы решение в чистых стратегиях (седловую точку). Следовательно, если игрок *A* придерживается своей оптимальной стратегии, то игрок *B* может пользоваться любой из своих чистых стратегий и при этом цена игры не изменится. Поэтому можем записать систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11} \cdot p_1 + a_{21} \cdot p_2 = \upsilon \\ a_{12} \cdot p_1 + a_{22} \cdot p_2 = \upsilon, \\ p_1 + p_2 = 1, \end{cases} \qquad (10)$$

из решения которой найдём

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$v = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

$$p_2 = 1 - p_1$$

Для определения оптимальной смешанной стратегии игрока *B*, при известной цене игры, достаточно двух уравнений

$$a_{11} \cdot q_1 + a_{12} \cdot q_2 = v,$$

$$q_1 + q_2 = 1 \qquad (11)$$

из решения которых получим

$$q_1 = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}.$$

$$q_2 = 1 - q_1$$

Решение игры *2×2* имеет простую геометрическую интерпретацию (рисунок 1).

Пусть имеется игра *2×2* с матрицей (таблица 11)

Таблица 11. Матрица игры

$A \backslash B$	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

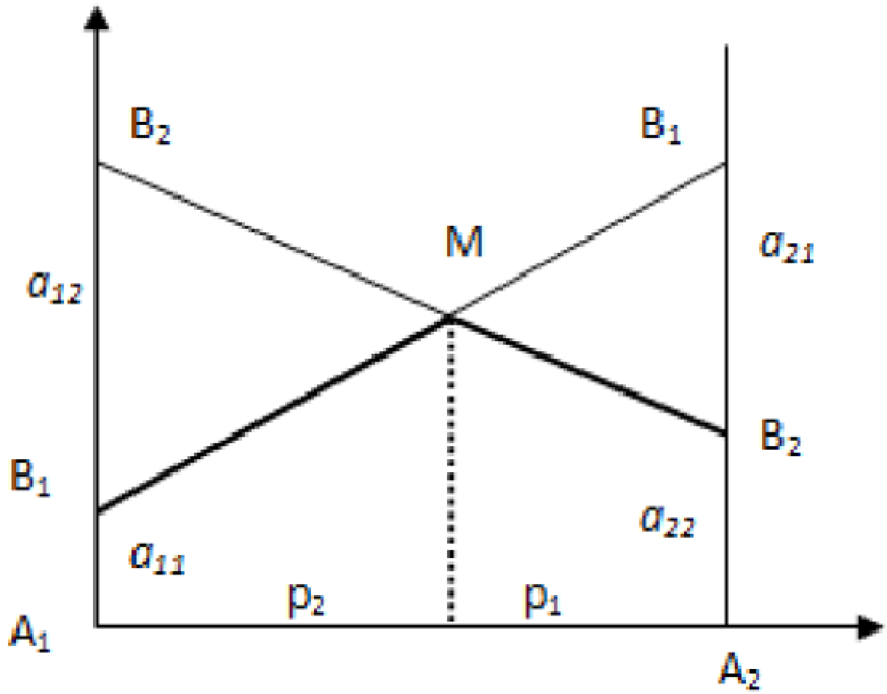

Рисунок 1. Геометрическая интерпретация игры 2×2

На оси абсцисс возьмём отрезок длиной 1. Граничная точка слева будет соответствовать чистой стратегии A_1, а справа – чистой стратегии A_2. Через граничные точки проведём линии, перпендикулярные к оси абсцисс, и на них будем отмечать выигрыши при стратегии A_1 и A_2 соответственно.

Пусть противник применяет стратегию B_1. Тогда на оси A_1 и A_2 можем отметить точки соответствующих выигрышей a_{11} и a_{21}, через которые проведём линию B_1B_1. Аналогичным образом построим линию B_2B_2. Точки этих линий определяют выигрыш первого игрока в смешанных стратегиях при условии, что второй игрок применяет чистую стратегию B_1 или B_2 соответственно. Мы ищем смешанную стратегию для первого игрока, при которой его возможный минимальный выигрыш будет наибольшим, независимо от того, какую стратегию применит второй игрок. Для этого построим нижнюю границу выигрыша при стратегиях B_1 и B_2. На рисунке эта граница показана жирной линией. Эта линия выражает оптимальный выигрыш игрока *A* при любых его смешанных стратегиях. Найдём координаты точки *M* пересечения линий *B1B1* и *B2B2*, в которой минимальный выигрыш игрока *A* достигает максимума. Ордината этой точки равна цене игры, а абсцисса равна *p2* – вероятности (частоте) применения стратегии *A2* в оптимальной смешанной стратегии S^*_A.

Таким образом, любая игра 2×2 может быть решена элементарными приёмами. Совершенно аналогично может быть решена любая игра 2×*n*. Матрица такой игры состоит из двух строк и *n* столбцов.

Например, пусть *n* = 4. Как и в случае игры 2×2, строим нижнюю границу выигрыша (на рисунке 2 жирная линия) и находим на ней точку *N* с максимальной ординатой. Эта точка даёт решение игры

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}.$$

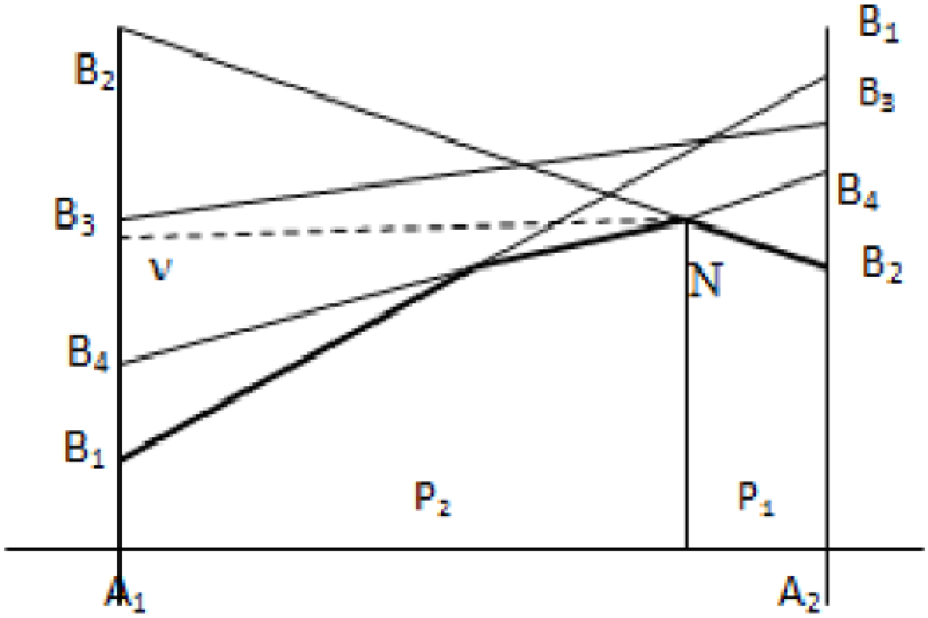

Рисунок 2. Геометрическая интерпретация игры 2×4

Ордината точки *N* равна цене игры, а абсцисса равна вероятности (частоте) *p2* стратегии *A2*.

Анализируя рисунок, замечаем, что оптимальная стратегия противника получается применением двух полезных стратегий *B2* и *B4*, пересекающихся в точке *N*. Стратегия *B3* заведомо невыгодна, а стратегия *B1* невыгодна при оптимальной стратегии S^*_A.

Для заданной матрицы игры установить

1. Имеются ли доминирующие стратегии?
2. Имеет ли игра седловую точку?
3. Найти решение игры графически.
4. Определить полезные стратегии.

Варианты задания

«Принятие решений в условиях конфликта»

Номер варианта	Матрица игры	Приме чание	Номер варианта	Матрица игры	Приме чание
1	$U = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$		13	$U = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 & 4 \\ 1 & 7 & 10 & 4 \end{pmatrix},$	
2	$U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix},$		14	$U = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 & 7 \\ 4 & 10 & 5 & 5 \end{pmatrix},$	
3	$U = \begin{pmatrix} 26 & 26 & 41 & 5 \\ 47 & 24 & 46 & 18 \end{pmatrix},$		15	$U = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 1 & 10 \\ 6 & 9 & 9 & 5 \end{pmatrix},$	
4	$U = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 10 \end{pmatrix},$		16	$U = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 6 \\ 2 & 8 & 3 & 6 \end{pmatrix},$	
5	$U = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$		17	$U = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 & 11 \\ 8 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix},$	
6	$U = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix},$		18	$U = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 9 \end{pmatrix},$	
7	$U = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & 10 & 6 & 1 \end{pmatrix},$		19	$U = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix},$	
8	$U = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 & 3 \\ 10 & 9 & 6 & 1 \end{pmatrix},$		20	$U = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 3 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix},$	
9	$U = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 & 7 \\ 2 & 10 & 9 & 9 \end{pmatrix},$		21	$U = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 14 & 12 \\ 9 & 2 & 12 & 1 \end{pmatrix},$	
10	$U = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 4 \\ 7 & 9 & 4 & 5 \end{pmatrix},$		22	$U = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 9 & 3 \\ 10 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$	
11	$U = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 11 & 5 \\ 12 & 4 & 7 & 11 \end{pmatrix},$		23	$U = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 & 6 \\ 7 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix},$	
12	$U = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 5 \\ 10 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix},$		24	$U = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 7 \\ 3 & 8 & 10 & 3 \end{pmatrix},$	