

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич

Должность: ректор

Дата подписания: 31.08.2021 15:13:35

Уникальный программный код:

9ba7d3e34c012eba476ffd2d064cf2781953be730df2374d16f3c0ce536f0fc6

## МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Юго-Западный государственный университет»

Кафедра «Машиностроительные технологии и оборудование»



### РАСЧЕТ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ И СРЕДНЕГО КВАДРАТИЧЕСКОГО ОТКЛОНЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Методические указания к проведению практических занятий для студентов по направлению подготовки 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств профиль «Технология машиностроения»

Курск 2018

УДК 519.6

Составители: В.В. Куц, М.С. Разумов

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *А.О. Гладышкин*

**Расчет доверительных интервалов для математического ожидания и среднего квадратического отклонения случайной величины с нормальным распределением** : методические указания к проведению практических и лабораторных занятий / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Куц, М.С. Разумов. – Курск, 2018. 11 с.: табл. 2.

Содержат сведения по вопросам расчета доверительных интервалов для математического ожидания и среднего квадратического отклонения случайной величины с нормальным распределением. Указывается порядок выполнения практического занятия, подходы к решению и правила оформления.

Методические рекомендации соответствуют требованиям программы, утвержденной учебно-методическим объединением по специальности автоматизированного машиностроительного производства (УМОАМ).

Предназначено для студентов направлений 15.04.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» профиль «Технология машиностроения» дневной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 07.02.18 г. Формат 60x84 1/16.

Усл.печ.л. 0,6. Уч.-изд.л. 0,5. Тираж 40 экз. Заказ.880 Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

**1 Цель работы:** Научиться рассчитывать доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения случайной величины с нормальным распределением.

**2 Задание:** Рассчитывать доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения случайной величины в соответствии со своим вариантом (прил. В).

### 3 Краткие теоретические сведения

Как известно, выборочное среднее и выборочная дисперсия являются случайными величинами, оценками математического ожидания и дисперсии, причем их совпадение с теоретическими характеристиками имеет нулевую вероятность.

Иногда бывает удобно указать интервал, внутри которого недоступная для непосредственного измерения характеристика попадает с достаточно большой, близкой к единице, вероятностью. Такой интервал называют **доверительным интервалом**.

#### 3.1 Расчет доверительного интервала для оценки математического ожидания при неизвестной дисперсии

Пусть результаты измерения величины  $X$  имеют нормальное распределение, но значение дисперсии неизвестно. Тогда доверительный интервал для математического ожидания величины  $X$  определим, как

$$P\{\bar{X} - t_p s_{\bar{X}} \leq X < \bar{X} + t_p s_{\bar{X}}\} = 2 \int_0^{t_p} S(t; k) dt,$$

где  $\bar{X}$  - среднее арифметическое результатов измерения

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

где  $X_i$  -  $i$ -й результат измерения;

$n$  - число измерений;

$s_{\bar{X}}$  - средне квадратическое отклонение среднего арифметического результатов измерения

$$s_{\bar{X}} = \frac{s_X}{\sqrt{n}},$$

где  $s_X$  - среднее квадратическое отклонением результатов измерений

$$s_X = +\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2};$$

$t_P$  – коэффициент Стьюдента, который определяется при заданной доверительной вероятности  $P$ ;

$S(t; k)$  - плотность распределения Стьюдента;

$k$  – степеней свободы  $k=n-1$ .

Значение коэффициента Стьюдента выбирают из справочных таблиц (прил. А).

После вычислений, записывают итог измерения, как

$$X = \bar{X} \pm t_P s_{\bar{X}}; P = \dots \%$$

**Пример:** При измерении диаметра вала были получены следующие результаты, мм

18,977	18,911	18,999	18,986
18,958	18,968	18,988	18,998
18,927	18,967	18,982	18,966
18,956	18,984	18,953	18,937
18,981	18,954	18,939	18,985

Для расчета среднего, среднеквадратического отклонения, заполним следующую таблицу

№	$X_i$	$X_i$	$(X_i - \bar{X})$	$(X_i - \bar{X})^2$
1.	18,977	77	11	121
2.	18,958	58	-8	64
3.	18,927	27	-39	1521
4.	18,956	56	-10	100
5.	18,981	81	15	225
6.	18,911	11	-55	3025
7.	18,968	68	2	4
8.	18,967	67	1	1
9.	18,984	84	18	324

№	$X_i$	$X_i$	$(X_i - \bar{X})$	$(X_i - \bar{X})^2$
10.	18,954	54	-12	144
11.	18,999	99	33	1089
12.	18,988	88	22	484
13.	18,982	82	16	256
14.	18,953	53	-13	169
15.	18,939	39	-27	729
16.	18,986	86	20	400
17.	18,998	98	32	1024
18.	18,966	66	0	0
19.	18,937	37	-29	841
20.	18,985	85	19	361
		$\Sigma=1316$		$\Sigma=10882$

Далее получим

$$\bar{X} = 1316/20 = 66 = 18,966 \text{ мм};$$

$$s_X = \sqrt{10882/19} = 24 = 0,024 \text{ мм};$$

$$s_{\bar{X}} = \frac{s_X}{\sqrt{n}} = \frac{0,024}{\sqrt{20}} = 0,0054 \text{ мм}.$$

При заданной величине доверительной вероятности (например  $P=0,99$ ) и числе степеней свободы  $k=20-1=19$ , по таблице прил. А определяем значение коэффициента Стьюдента

$$t_{99\%} = 2,861.$$

Далее рассчитаем доверительную границу

$$t_{99\%} s_{\bar{X}} = 2,861 \cdot 0,0054 \approx 0,015 \text{ мм}.$$

Конечный результат измерения детали запишем, как

$$X = (18,966 \pm 0,015) \text{ мм}; P=99\%.$$

### 3.2 Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения

Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения определяется из следующего соотношения

$$P\{s_{X_1} > \sigma_X \geq s_{X_2}\} = 1 - q,$$

где  $s_{X_1}, s_{X_2}$  - границы доверительного интервала

$$s_{X_1} = \frac{\sqrt{n-1}s_X}{\chi_{k, \frac{1}{2}q}}, s_{X_2} = \frac{\sqrt{n-1}s_X}{\chi_{k, 1-\frac{1}{2}q}},$$

где  $\chi_{k, \frac{1}{2}q}, \chi_{k, 1-\frac{1}{2}q}$  - коэффициенты определяемые из справочных таблиц

распределения Пирсона (хи-квадрат);

$q$  – уровень значимости (вероятность выхода дисперсии за границы доверительного интервала)

$$q=1-P,$$

где  $P$ - уровень доверительной вероятности.

Пример: Для предыдущего примера рассчитаем доверительный интервал для среднего квадратического отклонения.

По заданному уровню доверительной вероятности  $P=90\%$  ( $q=1-0,9=0,1$ ) и числе степеней свободы  $k=19$  в таблице прил. Б находим значения

$$\chi_{19;0,05}^2 = 7,633; \chi_{19;0,05} = \sqrt{7,633} = 2,763;$$

$$\chi_{19;0,95}^2 = 31,144; \chi_{19;0,95} = \sqrt{31,144} = 5,49.$$

Рассчитаем границы доверительного интервала

$$s_{X_1} = \frac{\sqrt{n-1}s_X}{\chi_{19;0,05}} = \frac{\sqrt{20-1} \cdot 0,024}{2,763} = 0,0378 \text{ мм},$$

$$s_{X_2} = \frac{\sqrt{n-1}s_X}{\chi_{19;0,95}} = \frac{\sqrt{20-1} \cdot 0,024}{5,49} = 0,0190 \text{ мм}.$$

Полученные результаты говорят о том, что значение среднего квадратического отклонения результатов измерения диаметров вала с вероятностью 90% лежит в интервале 0,0190-0,0378 мм.

#### 4 Выполнение работы

Получив исходные данные для выполнения практической работы (см. приложение В), студент изучает теоретические сведения согласно пункту 3. Далее выполняет действия аналогичные действиям в

рассмотренных примерах с учетом имеющихся особенностей задания.

В отчёте должны найти отражение следующие пункты:

- название практической работы;
- цель работы;
- индивидуальное задание для выполнения практической работы;
- краткие теоретические сведения;
- результаты выполнения работы: таблица с исходными, результаты расчета;
- подробные выводы по работе.

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое доверительный интервал?
2. Для чего используются доверительные интервалы?
3. Как рассчитать границы доверительного интервала для оценки математического ожидания при неизвестной дисперсии?
4. Как рассчитать границы доверительного интервала для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения?

### **Библиографический список**

1. Сергеев, А.Г. Метрология [Текст]/ А.Г. Сергеев, В.В. Крохин. Учебное пособие для вузов. М.: Логос, 2001. 488 с.: ил.
2. Алексахин, С.В. Прикладной статистический анализ [Текст]/ С.В. Алексахин, А.В. Балдин, А.Б. Николаев, В.Ю. Строганов. Учебное пособие для вузов. М.: “Издательство ПРИОР”, 2001. 224 с.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**  
**Распределение Стьюдента ( $t_p$ )**

$k$	$P$											
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
300	0,126	0,254	0,386	0,525	0,675	0,843	1,038	1,284	1,650	1,968	2,339	2,592



## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Распределение хи-квадрат ( $\chi^2_{k,P}$ )

$k$	$P$													
	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
1	0,000157	0,000628	0,00393	0,0158	0,0642	0,148	0,275	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713	1,022	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	1,869	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	2,753	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	3,655	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	4,570	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	5,493	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	6,423	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	7,357	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	8,295	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	9,237	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	10,182	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	11,129	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	12,078	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	13,030	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	13,983	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531	14,937	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440	15,893	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	16,850	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	16,266	17,809	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	18,768	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101	19,729	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	20,690	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943	21,652	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	22,616	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	23,579	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,719	24,544	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647	25,509	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	26,475	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508	27,442	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

**ПРИЛОЖЕНИЕ В**  
**Исходные данные к практической работе**

№ варианта	Р	№ варианта	Р
1.	0,9	2.	0,95
3.	0,95	4.	0,98
5.	0,98	6.	0,8
7.	0,8	8.	0,7
9.	0,7	10.	0,9
11.	0,9	12.	0,95
13.	0,95	14.	0,98
15.	0,98	16.	0,8
17.	0,8	18.	0,7
19.	0,7	20.	0,9

№ варианта										
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	28,855	43,026	31,981	58,657	93,441	6,005	7,002	13,808	50,663	10,034
2	28,916	43,073	32,039	58,632	93,467	6,003	7,001	13,838	50,663	10,002
3	28,859	42,976	32,002	58,673	93,439	5,994	6,999	13,808	50,615	9,997
4	28,863	43,029	31,975	58,653	93,462	5,998	6,998	13,818	50,616	9,976
5	28,915	43,057	32,063	58,634	93,446	5,987	7,000	13,818	50,657	10,020
6	28,853	42,982	31,964	58,684	93,469	5,986	6,995	13,814	50,650	9,979
7	28,934	43,040	32,050	58,651	93,451	6,012	7,006	13,847	50,612	9,984
8	28,955	43,068	31,967	58,688	93,464	6,005	6,995	13,831	50,619	9,974
9	28,902	43,037	31,951	58,668	93,436	6,008	7,002	13,799	50,630	9,975
10	28,960	43,074	32,021	58,657	93,428	5,998	7,003	13,850	50,625	9,981
11	28,961	43,018	32,051	58,655	93,439	6,000	7,004	13,800	50,641	9,922
12	28,895	43,006	31,977	58,682	93,442	6,005	6,998	13,809	50,661	10,000
13	28,919	43,046	31,948	58,615	93,423	6,005	7,001	13,812	50,664	9,955
14	28,938	43,059	31,990	58,682	93,461	5,999	6,996	13,829	50,657	10,029
15	28,956	43,024	32,027	58,638	93,446	5,996	6,998	13,796	50,653	9,960
16	28,960	43,006	32,026	58,646	93,459	5,997	7,001	13,819	50,653	9,938
17	28,867	43,047	32,018	58,649	93,477	6,003	6,997	13,856	50,610	9,964
18	28,905	43,075	32,009	58,654	93,469	6,011	6,998	13,842	50,660	10,056
19	28,889	42,980	31,919	58,639	93,454	6,002	6,998	13,799	50,645	10,005
20	28,882	43,029	32,052	58,673	93,464	6,008	7,001	13,848	50,644	10,016

№ варианта										
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	10,958	41,593	50,389	14,044	80,489	15,983	17,001	95,096	19,000	19,992
2	11,048	41,594	50,369	13,985	80,489	15,972	16,984	95,076	18,949	20,002
3	11,008	41,572	50,389	13,972	80,483	15,973	16,996	95,172	18,952	19,995
4	11,024	41,569	50,370	13,994	80,489	16,035	16,966	95,116	19,036	19,997
5	11,004	41,554	50,371	14,006	80,487	15,960	16,991	95,180	18,907	19,994
6	11,000	41,593	50,369	13,976	80,482	15,967	16,972	95,110	19,014	19,992
7	10,987	41,564	50,378	13,996	80,487	15,952	16,978	95,154	18,966	20,002
8	10,973	41,561	50,377	13,981	80,486	15,991	17,003	95,105	18,992	20,004
9	11,009	41,551	50,371	14,023	80,482	15,967	16,996	95,143	18,972	19,998
10	10,987	41,584	50,371	14,025	80,482	15,964	17,018	95,105	19,010	19,986
11	11,013	41,569	50,364	14,011	80,482	15,997	16,989	95,135	18,913	19,996
12	11,073	41,592	50,366	13,967	80,488	15,948	17,006	95,169	19,005	19,999
13	11,019	41,591	50,362	13,988	80,489	15,976	17,006	95,169	18,977	20,003
14	11,010	41,589	50,365	14,035	80,483	15,968	16,972	95,155	19,028	20,008
15	11,014	41,583	50,364	14,046	80,484	15,919	16,987	95,080	18,994	20,004
16	10,996	41,581	50,375	14,011	80,488	15,968	17,006	95,183	19,012	20,005
17	11,032	41,588	50,361	13,999	80,484	15,960	17,031	95,170	18,994	19,994
18	10,927	41,569	50,379	14,010	80,483	15,943	16,986	95,114	19,024	19,994
19	11,042	41,567	50,373	13,981	80,484	16,062	16,998	95,149	19,036	20,001
20	10,993	41,580	50,355	14,024	80,484	16,050	16,983	95,133	18,973	20,008