

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра управления качеством, метрологии и сертификации

УТВЕРЖДАЮ:

Проректор по учебной работе

О.Л. Покионова

« 7 » 02

(ЮЗГУ) 2018 г.



ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ. МЕТОД АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

Методические указания к выполнению практической работы по курсу «Системный анализ» по направлению подготовки 27.04.01 Стандартизация и метрология, профиль «Метрологические и контрольно-измерительные системы»

Составители: В.В. Куц, Н.А. Масалов

УДК 519.6

Рецензент

Доктор технических наук, профессор *Е.В. Агеев*

Принятие решений в условиях определенности. Метод анализа иерархий : методические указания к выполнению практической работы по курсу «Системный анализ» по направлению подготовки 27.04.01 Стандартизация и метрология, профиль «Метрологические и контрольно-измерительные системы» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Куц, Н.А. Масалов. - Курск, 2018. – 15 с.: ил. 1, табл. 1.

Содержат методические указания к выполнению практической работы по курсу «Системный анализ» у студентов, обучающихся по направлению подготовки 27.04.01 Стандартизация и метрология, профиль «Метрологические и контрольно-измерительные системы».

В методических указаниях излагаются цели, задание, теоретические сведения, необходимые для проведения практической работы, а также порядок её выполнения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 4.02.18 . Формат 60x84 1/16.

Усл.печ.л. 0,87 .Уч.-изд.л 0,79. Тираж 100 экз. Заказ. № Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94

В теории принятия решений используются "разумные" процедуры выбора наилучшей из нескольких возможных альтернатив. Насколько правильным будет выбор, зависит от качества данных, используемых при описании ситуации, в которой принимается решение. С этой точки зрения процесс принятия решений может при надлежать к одному из трех возможных условий.

1. *Принятие решений в условиях определенности*, когда данные известны точно.

2. *Принятие решений в условиях риска*, когда данные можно описать с помощью вероятностных распределений.

3. *Принятие решений в условиях неопределенности*, когда данным нельзя приписать относительные веса (весовые коэффициенты), которые представляли бы степень их значимости в процессе принятия решений.

По существу, в условиях определенности данные надежно определены, в условиях неопределенности они не определены. Принятие решений в условиях риска, следовательно, представляет "промежуточный" случай.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ – МЕТОД АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

Модели линейного программирования являются примером принятия решений в условиях определенности. Эти модели применимы лишь в тех случаях, когда альтернативные решения можно связать между собой точными линейными функциями.

Рассмотрим иной подход к принятию решений в ситуациях, когда, например, для идей, чувств, эмоций определяются некоторые количественные показатели, обеспечивающие числовую шкалу предпочтений для возможных альтернативных решений. Этот подход известен как *метод анализа иерархий*.

Очень часто при анализе интересующей структуры число элементов и их взаимосвязей очень велико. В таких случаях система делится на подсистемы.

Иерархия есть определенный тип системы, основанный на предположении, что элементы системы могут группироваться в несвязанные множества. Элементы каждой группы находятся под влиянием элементов некоторой вполне определенной группы и, в свою очередь, оказывают влияние на элементы другой группы. Элементы в каждой группе иерархии (называемой уровнем, кластером, стратой) независимы.

Основной задачей в иерархии является оценка высших уровней исходя из взаимодействия различных уровней иерархии. Первым этапом применения метода анализа иерархий (МАИ) является структурирование проблемы выбора в виде иерархии. В наиболее элементарном виде иерархия строится с вершины (цели), через промежуточные уровни – критерии. К самому нижнему уровню, который в общем случае является набором альтернатив.

После иерархического воспроизведения проблемы устанавливаются приоритеты критериев и оценивается каждая из альтернатив по критериям. В МАИ элементы задачи сравниваются попарно по отношению к их воздействию на общую для них

характеристику. Система парных сравнений приводит к результату, который может быть представлен в виде обратно симметричной матрицы.

Матрица парных сравнений отражает суждение лица, принимающего решение, относительно важности разных критериев.

Элементы матрицы a_{ij} являются интенсивностями проявления элемента иерархии i относительно элемента иерархии j , оцениваемая по шкале от 1 до 9 (см. таблица 1):

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}.$$

Таблица 1

1	Равная важность
3	Умеренное превосходство одного над другим
5	Существенное превосходство одного над другим
7	Значительное превосходство одного над другим
9	Очень сильное превосходство одного над другим
2,4,6,8	Соответствующие промежуточные значения

Если $a_{ij}=k$, то $a_{ji}=1/k$. Кроме того, все диагональные элементы матрицы A должны быть равны 1, так как они выражают оценку критерия относительно самих себя.

Пример 1. Был проведен анализ трех университетов: А, В и С на предмет их желательности. Для сравнения были выбраны два основных критерия: местонахождение университета и его академическая репутация (см. рис. 1).

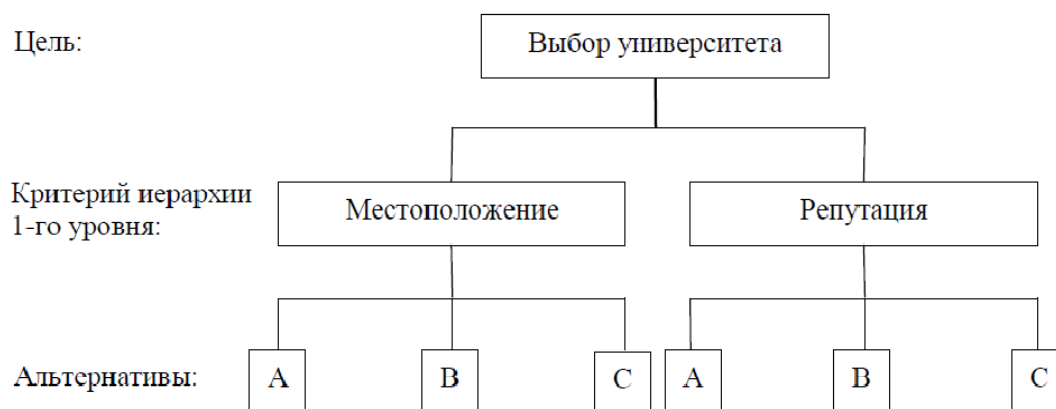


Рис. 21.1. Иерархия удовлетворения шкалой

Покажем, как определяется матрица сравнения A для задачи выбора одного из трех университетов.

Начнем с главного иерархического уровня, который имеет дело с критериями академической репутации университета и его местонахождения. С точки зрения лица принимающего решение (ЛПР), академическая репутация университета *существенно важнее* его местонахождения. Следовательно, он приписывает эле-

менту (2, 1) матрицы A значение 5, т.е. $a_{21}=5$. Это автоматически предполагает, что $a_{12}=1/5$.

Обозначив через R и L критерии репутации университета и его местонахождения, можно записать матрицу сравнения следующим образом:

$$A = \begin{matrix} & L & R \\ \begin{matrix} L \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1/5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Элементы матриц A_R и A_L определены на основе суждений ЛПР, касающихся относительной важности трех университетов.

$$A_L = \begin{matrix} & A & B & C \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/5 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad A_R = \begin{matrix} & A & B & C \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Следующий шаг состоит в вычислении вектора приоритетов по данной матрице. В математических терминах это вычисление главного собственного вектора, который после нормализации становится вектором приоритетов.

Относительные веса вычисляются в виде средних значений элементов соответствующих строк нормализованной матрицы N , элементы которой определяются путем деления элементов каждого столбца матрицы парных сравнений на сумму элементов этого же столбца.

Пример 2. Найдем относительные веса матриц парных сравнений для данных примера 1. Относительные веса критериев R и L могут быть определены путем деления элементов каждого столбца на сумму элементов этого же столбца. Следовательно, для нормализации матрицы A делим элементы первого столбца на величину $1+5=6$, элементы второго – на величину $1+1/5=1,2$. Искомые относительные веса w_R и w_L критериев вычисляются теперь в виде средних значений элементов соответствующих строк нормализованной матрицы A . Следовательно,

$$N = \begin{matrix} & L & R \\ \begin{matrix} L \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,17 & 0,17 \\ 0,83 & 0,83 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Средние значения элементов строк:

$$w_R = (0,83 + 0,83) / 2 = 0,83,$$

$$w_L = (0,17 + 0,17) / 2 = 0,17.$$

В результате вычислений получили $w_R=0,83$, $w_L=0,17$.

Относительные веса альтернативных решений, соответствующих университетам A , B и C , вычисляются в пределах каждого критерия R и L с использованием следующих двух матриц сравнения.

$$A_L = \begin{matrix} & A & B & C \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Суммы элементов столбцов равны 8, 3,5, 1,7 соответственно.

$$A_R = \begin{matrix} & A & B & C \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Суммы элементов столбцов равны 1,83, 3,67, 5,5 соответственно.

При делении элементов каждого столбца матриц A_R и A_L , на сумму элементов этих же столбцов получаем следующие нормализованные матрицы.

$$N_L = \begin{matrix} & A & B & C \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,125 & 0,143 & 0,118 \\ 0,25 & 0,286 & 0,294 \\ 0,625 & 0,571 & 0,588 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Средние значения элементов строк

$$\begin{aligned} w_{LA} &= (0,125 + 0,143 + 0,118) / 3 = 0,129, \\ w_{LB} &= (0,25 + 0,286 + 0,294) / 3 = 0,277, \\ w_{LC} &= (0,625 + 0,571 + 0,588) / 3 = 0,594. \end{aligned}$$

$$N_R = \begin{matrix} & A & B & C \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,545 & 0,545 & 0,545 \\ 0,273 & 0,273 & 0,273 \\ 0,182 & 0,182 & 0,182 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Средние значения элементов строк

$$\begin{aligned} w_{RA} &= (0,545 + 0,545 + 0,545) / 3 = 0,545, \\ w_{RB} &= (0,273 + 0,273 + 0,273) / 3 = 0,273, \\ w_{RC} &= (0,182 + 0,182 + 0,182) / 3 = 0,182. \end{aligned}$$

Величины

$$(w_{RA}, w_{RB}, w_{RC}) = (0,545; 0,273; 0,182)$$

дают соответствующие веса для университетов А, В и С, с точки зрения академической репутации.

Аналогично величины

$$(w_{LA}, w_{LB}, w_{LC}) = (0,129; 0,277; 0,594)$$

являются относительными весами, касающимися местонахождения университетов.

Если столбцы нормализованной матрицы идентичны, то исходная матрица сравнений является *согласованной*.

Если матрица парных сравнений не является согласованной, то для нее находят *индекс согласованности*, который дает информацию о степени нарушения согласованности.

В компактной форме условие согласованности матрицы A формулируется следующим образом. Матрица A будет согласованной тогда и только тогда, когда

$$A\mathbf{w} = n\mathbf{w},$$

где \mathbf{w} – вектор-столбец относительных весов w_i .

Когда матрица A не является согласованной, относительный вес w_i аппроксимируется средним значением n элементов i -й строки нормализованной матрицы N . Обозначив через \bar{w} вычисленную оценку (среднее значение), можно показать, что

$$A\bar{\mathbf{w}} = n_{\max}\bar{\mathbf{w}},$$

где $n_{\max} \geq n$. В этом случае, чем ближе n_{\max} к n , тем более согласованной является матрица сравнения A . В результате в соответствии с методом анализа иерархий вычисляется *коэффициент согласованности* в виде

$$CR = \frac{CI}{RI},$$

где

$$CI = \frac{n_{\max} - n}{n - 1} \quad \text{– коэффициент согласованности матрицы } A,$$

$$RI = \frac{1,98(n - 2)}{n} \quad \text{– стохастический коэффициент согласованности}$$

матрицы A .

Стохастический коэффициент согласованности RI определяется эмпирическим путем как среднее значение коэффициента CI для большой выборки генерированных случайным образом матриц сравнения A .

Коэффициент согласованности CR используется для проверки согласованности матрицы сравнения A следующим образом. Если $CR < 0,1$, уровень несогласованности является приемлемым. В противном случае уровень несогласованности матрицы сравнения A является высоким, и лицу, принимающему решение, рекомендуется проверять элементы парного сравнения a_{ij} матрицы A в целях получения более согласованной матрицы.

Значение n_{\max} вычисляется на основе матричного уравнения $A\bar{\mathbf{w}} = n_{\max}\bar{\mathbf{w}}$, при этом нетрудно заметить, что i -е уравнение этой системы имеет вид:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}\bar{w}_j = n_{\max}\bar{w}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Поскольку $\sum w_i = 1$, легко проверить, что

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\bar{w}_j \right) = n_{\max} \sum_{i=1}^n \bar{w}_i = n_{\max}.$$

Это значит, что величину n_{\max} можно определить путем вычисления вектор-столбца $A\bar{\mathbf{w}}$ с последующим суммированием его элементов.

Пример 3. В примере 2 матрица A_L является несогласованной, так как столбцы матрицы N_L неодинаковы. Требуется исследовать согласованность матрицы A_L .

Вычислим значение n_{max} . Из данных примера 2 имеем

$$\bar{w}_1=0,129, \bar{w}_2=0,277, \bar{w}_3=0,594.$$

Следовательно,

$$A_L \bar{w} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,2 \\ 2 & 1 & 0,5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,129 \\ 0,277 \\ 0,594 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3863 \\ 0,8320 \\ 1,7930 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$n_{max} = 0,3863 + 0,8320 + 1,7930 = 3,0113.$$

Следовательно, для $n=3$ имеем

$$CI = \frac{n_{max} - n}{n - 1} = \frac{3,0113 - 3}{3 - 1} = 0,00565,$$

$$RI = \frac{1,98(n - 2)}{n} = \frac{1,98(3 - 2)}{3} = 0,66,$$

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0,00565}{0,66} = 0,00856.$$

Так как $CR < 0,1$, уровень несогласованности матрицы A_L является приемлемым. Оценка альтернатив основана на вычислении комбинированного весового коэффициента:

$$F_{A_i} = w_{k_1} w_{k_1 A_i} + w_{k_2} w_{k_2 A_i} + \dots + w_{k_m} w_{k_m A_i} = \sum_{j=1}^m w_{k_j} w_{k_j A_i}, \quad (i = \overline{1, n}).$$

Пример 4. Оценка трех университетов основана на вычислении комбинированного весового коэффициента для каждого из них.

$$\text{Университет А: } F_A = 0,17 \cdot 0,129 + 0,83 \cdot 0,545 = 0,4743.$$

$$\text{Университет В: } F_B = 0,17 \cdot 0,277 + 0,83 \cdot 0,273 = 0,2737.$$

$$\text{Университет С: } F_C = 0,17 \cdot 0,594 + 0,83 \cdot 0,182 = 0,2520.$$

На основе этих вычислений университет А получает наивысший комбинированный вес и, следовательно, является наиболее оптимальным выбором ЛПР.

Варианты заданий

Вариант 1.

Абсолютные показатели качества двигателей различных вариантов приведены в следующей таблице:

Варианты двигателей	Показатели качества		
	Мощность, л.с.	Крутящий момент, кгс·м	Масса, кг.
1	180	67	850
2	176	70	1000
3	176	68	860
4	181	67	820
5	177	68	860
6	180	66	800

Найти оптимальный вариант двигателя.

Вариант 2.

Показатели эффективности работы предприятий приведены в следующей таблице:

№ предприятия	Показатели эффективности работы предприятий		
	Прибыль, д.е.	Себестоимость единицы продукции, д.е.	Доходы, д.е.
1	30	40	20
2	25	20	30
3	40	45	54
4	28	30	35
5	15	12	20
6	50	30	40

Выберите наиболее эффективно работающее предприятие.

Вариант 3.

Абсолютные показатели качества двигателей различных вариантов приведены в следующей таблице:

Варианты двигателей	Показатели качества		
	Мощность, л.с.	Крутящий момент, кгс·м	Масса, кг.
1	180	67	850
2	179	38	870
3	176	67	850
4	181	67	820
5	177	68	860
6	179	66	800

Найти оптимальный вариант двигателя.

Вариант 4.

Показатели эффективности работы предприятий приведены в следующей таблице:

№ предприятия	Показатели эффективности работы предприятий		
	Прибыль, д.е.	Себестоимость единицы продукции, д.е.	Доходы, д.е.
1	30	40	0,2
2	25	20	0,3
3	40	45	0,1
4	28	30	0,4
5	15	12	0,25
6	50	30	0,21

Выберите наиболее эффективно работающее предприятие.

Вариант 5.

Абсолютные показатели качества двигателей различных вариантов приведены в следующей таблице:

Варианты двигателей	Показатели качества		
	Мощность, л.с.	Крутящий момент, кгс·м	Масса, кг.
1	180	67	850
2	180	68	880
3	176	68	860
4	179	38	870
5	175	67	820
6	180	66	800

Найти оптимальный вариант двигателя.

Вариант 6.

Показатели эффективности работы предприятий приведены в следующей таблице:

№ предприятия	Показатели эффективности работы предприятий		
	Прибыль, д.е.	Себестоимость единицы продукции, д.е.	Доходы, д.е.
1	30	300	0,2
2	25	200	0,3
3	40	250	0,1
4	28	160	0,4
5	15	280	0,25
6	50	120	0,21

Выберите наиболее эффективно работающее предприятие.

Вариант 7.

Абсолютные показатели качества двигателей различных вариантов приведены в следующей таблице:

Варианты двигателей	Показатели качества		
	Мощность, л.с.	Крутящий момент, кгс·м	Масса, кг.
1	30	40	300
2	25	20	200
3	40	45	250
4	28	30	160
5	15	12	280
6	50	30	120

Найти оптимальный вариант двигателя.

Вариант 8.

Показатели эффективности выбора квартиры приведены в следующей таблице:

вариант	Показатели эффективности выбора квартиры		
	метраж, м ²	Время поездки на работу, мин	Время поездки в зону отдыха, мин
1	60	50	30
2	50	45	25
3	45	30	20
4	60	40	30
5	42	20	10
6	45	30	15

Выберите наиболее эффективный выбор квартиры.

Вариант 9.

Одной из фирм требуется выбрать оптимальную стратегию по техническому обеспечению процесса управления производством. С помощью статистических данных и информации соответствующих заводов-изготовителей были определены локальные критерии функционирования необходимого оборудования. Исходные данные приведены в таблице.

Варианты оборудования	Показатели эффективности работы предприятий		
	Производительность, д.е.	Стоимость оборудования, д.е.	Объем памяти, у.е.
1	100	5	5
2	150	6	8
3	120	4	6
4	200	7	7
5	140	6	6
6	160	4	5

Вариант 10.

Одной из фирм требуется выбрать оптимальную стратегию по техническому обеспечению процесса управления производством. С помощью статистических данных и информации соответствующих заводов-изготовителей были определены локальные критерии функционирования необходимого оборудования. Исходные данные приведены в таблице.

Варианты оборудования	Показатели эффективности работы предприятий		
	Производительность, д.е.	Стоимость оборудования, д.е.	Объем памяти, у.е.
1	100	8	5
2	150	5	8
3	120	6	6
4	200	4	7
5	140	5	6
6	160	6	5

Вариант 11.

Используя исходные данные, которые приведены ниже, решить задачу многокритериальной оценки, выбора и оптимизации, указанных вариантов новых моделей тракторов.

Варианты	Оценочные показатели		
	Производительность	Себестоимость	Надежность
1	140	145	3350
2	130	175	3400
3	150	140	3450
4	135	155	3200
5	155	130	3500
6	160	120	3600

Вариант 12.

Абсолютные показатели качества двигателей различных вариантов приведены в следующей таблице:

Варианты двигателей	Показатели качества		
	Мощность, л.с.	Крутящий момент, кгс·м	Масса, кг.
1	50	40	300
2	25	20	200
3	40	45	250
4	28	30	160
5	15	12	280
6	50	30	120

Найти оптимальный вариант двигателя.

Вариант 13.

Показатели эффективности работы предприятий приведены в следующей таблице:

№ предприятия	Показатели эффективности работы предприятий		
	Прибыль, д.е.	Себестоимость единицы продукции, д.е.	Доходы, д.е.
1	30	300	0,25
2	25	200	0,3
3	40	250	0,1
4	28	160	0,4
5	18	280	0,25
6	50	120	0,21

Выберите наиболее эффективно работающее предприятие