МИНОБРНАУКИ РОССИИ
«Юго-Западный государственный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
«Вычислительная техника»
_И.Ч._ И.Е. Чернецкая
«30» 06 2022 г.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА
для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

«Моделирование»

09.03.01 Информатика и вычислительная техника

Курск 2022

1 Раздел (тема) дисциплины: Введение в моделирование систем. Основные понятия и определения

1.1 Вопросы для собеседования по теме

- 1. Определение модели, основные требования к модели, классификация моделей.
- 2. Что такое моделирование?
- 3. Этапы моделирования: этапы формирования и реализации моделей.
- 4. Содержание этапов формирования модели.
- 5. Содержание этапов реализации модели.
- 6. Аналитические методы моделирования.
- 7. Численные методы моделирования.
- 8. Статистические методы моделирования.
- 9. Комбинированные методы моделирования.
- 9. Комбинированные методы моделирования.
- 10. Моделирование хаотических систем: моделирование систем с непрерывным временем и систем с дискретным.
- 11. Моделирование хаотических систем методом сечений Пуанкаре.

2 Раздел (тема) дисциплины: Элементы теории вероятностей для моделирования систем

1. Дискретная случайная величина X принимает значения x_1, x_2 с вероятностями p_1 и p_2, соответственно (см. табл. 1).

(а) Постройте график функции распределения случайной величины X.

(б) Вычислите математическое ожидание, дисперсию, второй начальный момент, среднеквадратическое отклонение и коэффициент вариации случайной величины X.

2. Чему равно математическое ожидание, дисперсия и коэффициент вариации случайной величины X, принимающей всякий раз значение x? Постройте графики функции и плотности распределения.

Таблица 1:

Вариант	x_1	x_2	p_1	p_2
1	10	5	0,9	0,1
2	-100	-50	0,2	0,8
3	1	50	0,4	0,6
4	10	5	0,6	0,4

Таблица 2:

Вариант	1	2	3	4	5	5	7	8	9
x	100	25	1	0	-1	-20	$-2,5$	$-0,5$	$-0,4$

3. Непрерывная случайная величина равномерно распределена в интервале (a, b). Постройте графики функции и плотности распределения случайной величины (табл. 3).

Определите:

(а) математическое ожидание;

(б) вероятность того, что случайная величина принимает положительные значения;

(в) вероятность того, что случайная величина принимает отрицательные значения;

(г) вероятность того, что случайная величина принимает значения в интервале (a, b).

Таблица 3:

Вариант	a	b	c	d
1	0	10	3	5
2	1	-2	0	0,5
3	10	20	10	15
4	-20	20	-10	10

Вопросы к контрольной работе по теме

- 1. Что понимается под случайной величиной?
- 2. Приведите примеры случайных величин.
- 3. Приведите примеры дискретных и непрерывных случайных величин.
- 4. Что характеризует вероятность?
- 5. Как рассчитать вероятность какого-либо события?
- 6. Что характеризует и какую размерность имеет математическое ожидание (дисперсия; второй начальный момент; среднеквадратическое

отклонение; коэффициент вариации, функция распределения, плотность распределения) случайной величины?

- 7. Для чего используются производящая функция и преобразование Лапласа?
- 8. Для каких случайных величин используется преобразование Лапласа?
- 9. Назовите известные Вам дискретные и непрерывные законы распределений.
- 10. Чему равен коэффициент вариации: а) экспоненциального распределения; б) распределения Эрланга 9-го порядка?

  12. Показать на графике и пояснить, в чём различие между плотностями распределений экспоненциального и гиперэкспоненциального законов.
- 11. В каком интервале находится коэффициент вариации распределения: а) Эрланга; б) гиперэкспоненциального; в) гиперэрланговского?
- 12. Нарисовать график плотности и функции распределения: а) экспоненциального; б) Эрланга; в) гиперэкспоненциального.
- 13. Показать на графике и пояснить, в чём различие между плотностями распределений экспоненциального и гиперэкспоненциального законов.
- 14. Математическое ожидание экспоненциально распределенной случайной величины равно 0,1. Определить среднеквадратическое отклонение, второй начальный момент и коэффициент вариации.

3 Раздел (тема) дисциплины: Системы массового обслуживания

1. Интенсивность простейшего потока заявок равна λ (табл. 4).

Определите:

(а) средний интервал между соседними заявками в потоке;

(б) среднее число заявок, поступивших в систему за время τ;

(в) вероятность того, что за время τ в систему поступит хотя бы одна заявка;

(г) вероятность того, что за время τ в систему не поступит ни одной заявки;

Таблица 4:

Вариант	1	2	3	4	5	5	7	8	9
$\lambda,\ c^{-1}$	$0,25$	$0,25$	$0,25$	$0,5$	$1,0$	$1,0$	$1,5$	$2,5$	$2,0$
$\tau,\ c$	100	$2,0$	$4,0$	$8,0$	$2,0$	$2,0$	$5,0$	$2,0$	$1,0$

Таблица 5:

Вариант	1	2	3	4	5	5	7	8	9
$\mu,\ c^{-1}$	$0,5$	$0,5$	$1,0$	$1,0$	$2,0$	$2,0$	$2,5$	$4,0$	$5,0$
$\tau,\ c$	$3,0$	$2,0$	$2,0$	$0,5$	$1,0$	$2,0$	$0,5$	$1,0$	$0,5$

Таблица 6:

Вариант	1	2	3	4	5	5	7	8	9
$\lambda,\ c^{-1}$	$0,2$	$0,4$	$0,5$	$0,8$	$2,0$	$2,5$	$4,0$	$5,0$	$10,0$
$\tau,\ c$	$5,0$	$4,0$	$2,0$	$1,0$	$1,0$	$2,0$	$4,0$	$5,0$	$0,5$

Таблица 7:

Вариант	1	2	3	4	5	5	7	8	9
$a,\ c^{-1}$	$0,2$	$0,4$	$0,5$	$0,8$	$2,0$	$2,5$	$4,0$	$5,0$	$10,0$
k	3	4	5	6	7	8	9	10	12

(д) вероятность того, что за время τ в систему не поступит больше одной заявки.

2. Длительность обслуживания заявок в СМО распределена по экспоненциальному закону. Для заданной интенсивности обслуживания заявок μ определите вероятность того, что длительность обслуживания заявок будет больше величины τ (табл. 5).

3. В систему поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Рассчитайте:

(а) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение и коэффициент вариации интервала времени между соседними заявками в потоке;

(б) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение и коэффициент вариации числа заявок, поступивших в систему за время τ (табл. 6)..

4. В двухканальную СМО поступает простейший поток заявок со средним интервалом между соседними заявками a секунд. Чему равна интенсивность потока заявок ко второму прибору? Чему равен коэффициент вариации интервалов между заявками потока ко второму прибору? τ (табл. 7).

5. В двухканальную СМО поступает простейший поток заявок с интен-

Таблица 8:

Вариант	1	2	3	4	5	5	7	8	9
λ, c^{-1}	$0,2$	$0,4$	$0,5$	$0,8$	$2,0$	$2,5$	$4,0$	$5,0$	$10,0$
p	$0,9$	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$	$0,8$

Таблица 9:

Вариант	λ_1, c^{-1}	λ_2, c^{-1}	μ_1, c^{-1}	μ_2, c^{-1}	k	t, c	N_λ	N_λ
1	$0,1$	$1,0$	$0,5$	$4,0$	1	$2,0$	2	4
2	$0,1$	$1,0$	$0,5$	$4,0$	2	$0,25$	4	2
3	$0,2$	$2,0$	$1,25$	$4,0$	1	$0,8$	2	4
4	$0,2$	$2,0$	$1,5$	$5,0$	2	$0,2$	5	3

сивностью λ, причем заявки случайным образом с вероятностью p направляются ко второму прибору. Чему равны интенсивности потока заявок и коэффициент вариации интервалов между заявками потоков к первому и второму приборам τ (табл. 8)?

6. В одноканальную СМО поступают заявки двух классов с интенсивностями λ_1, λ_2 заявок в секунду. Интенсивности их обслуживания соответсвенно μ_1, μ_2 заявок в секунду (табл. 9).

(а) Сформулируйте условия, при которых время пребывания заявок класса k-го класса будет равно t секунд.

(б) Чему равно время пребывания заявок k-го класса, если при тех же условиях интенсивность их поступления увеличится в N_λ раз?

(в) Чему равно время пребывания заявок k-го класса, если при тех же условиях интенсивность их обслуживания увеличится в N_λ раз?

Таблица 10:

Вариант	1	2	3	4	5	5	7	8	9
λ, c^{-1}	3,5	2,4	1,5	0,8	3,0	4,5	4,0	9,0	20,0
μ, c^{-1}	7,0	4,0	2,0	1,0	2,0	5,0	3,0	10,0	15,0

Таблица 11:

$n = 2$	0	1	2
0	0	1	0
1	0,1	0,4	0,5
2	0	0,2	0,8
λ_0, c^{-1}	5,0		

7. В одноканальную СМО типа M/M1 с интенсивностью λ поступают заявки, средняя длительность обслуживания которых соответственно равна a (табл. 10).

Рассчитайте характеристики функционирования системы:(a) нагрузку и загрузку; (б) средние значения времен ожидания и пребывания заявок в системе; (в) средние значения длины очереди и числа заявок в системе.

8. Нарисуйте граф разомкнутой СеМО, содержащей n узлов, в которую поступает поток заявок с интенсивностью λ_0 и рассчитайте интенсивности потоков заявок и коэффициенты передач в узлах для заданной матрицы вероятностей передач (табл. 11).

Таблица 12:

$n = 2$	1	2
1	0,5	0,5
2	1	0
M	6	

9. В замкнутой СеМО, содержащей n узлов с заданной матрицей вероятностей передач циркулирует M заявок (табл. 12).

(а) Нарисуйте граф сети.

(б) Произвольным образом выберите (в любой дуге сети) нулевую точку и преобразуйте матрицу передач с учетом выбранной нулевой точки (нулевого узла).

(в) Рассчитайте коэффициенты передач в узлах сети.

(г) Перечислите возможные состояния сети (табл. 12).

4 Раздел (тема) дисциплины: Динамические модели

4.1 Динамические модели с постоянной матрицей

А. Постановка задачи

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = AX + B(t), \quad B(t+T) \equiv B(t), \tag{1}$$

$$X, B \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}. \tag{2}$$

Б. Алгоритм поиска периодического решения

1. Решить задачу Коши на одном периоде:

$$\frac{dX}{dt} = AX + B(t), \quad X(0) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{3}$$

тем самым рассчитать вектор $X(T, 0)$.

2. Рассчитать матрицу $F(T)$ численно решив уравнение

$$\frac{dF(t)}{dt} = AF(t), \quad F(0) = E, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

на одном периоде $0 \leqslant t \leqslant T$ или рассчитать $F(T)$ по формуле

$$F(T) = \mathrm{e}^{AT}.$$

3. Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$(E - F(T))Q = X(T, 0)$$

относительно вектора начальных условий Q для периодического решения $X_c(t)$.

4. Решить задачу Коши на одном периоде с условием $X(0) = Q$ и тем самым рассчитать периодическое решение $X_c(t)$:

$$\frac{dX}{dt} = AX + B(t), \quad X(0) = Q, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

5. Найти собственные значения матрицы $F(T)$

$$\det(F(T) - \lambda E) = 0$$

и провести анализ их расположения в комплексной плоскости относительно единичного круга.

С.Численная реализация алгоритма

1. Выбрать шаг интегрирования $h = T/m$.
2. Рассчитать матрицу $\omega(A,h) = A^{-1}(\mathrm{e}^{Ah} - E)$.
3. Решить задачу Коши с условием $X(0) = 0$ для системы (6) численно:

$$X_{k+1} = X_k + \omega(A,h)(AX_k + B_k), \quad k = \overline{0, m-1}, \quad X_0 = 0.$$

Здесь $X_k = X(t_k)$, $B_k = B(t_k)$, $tk = k \cdot h$.

4. Рассчитать матрицу $F(T)$, решив матричное уравнение

$$\frac{dF(t)}{dt} = AF(t), \quad F(0) = E, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

численно по схеме

$$F_{k+1} = F_k + \omega(A,h)AF_k, \quad k = \overline{0, m-1}, \quad F_0 = E.$$

Здесь $F_k = F(t_k)$, $tk = k \cdot h$.

5. Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$(E - F_m)Q = X_m, \quad F_m = F(T), \quad X_m = X(T, 0).$$

6. Решить численно задачу Коши с условием $X(0) = Q$ и тем самым рассчитать периодическое решение $X_c(t)$:

$$X_{k+1} = X_k + \omega(A,h)(AX_k + B_k), \quad k = \overline{0, m-1}, \quad X_0 = Q.$$

7. Рассчитать собственные значения матрицы $F(T)$ и провести анализ их расположения в комплексной плоскости относительно единичного круга.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти периодическое решение системы дифференциальных уравнений и исследовать устойчивость

$$\frac{dX}{dt} = AX + B(t),$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{CR_L} \end{bmatrix}, \quad B(t) = \frac{V_m}{L} \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Параметры: $R = 10$ Ом, $L = 0.1$ Гн, $C = 10^{-6}$ Ф, $R_L = 200$ Ом, $T = 2\pi/\Omega$, $T = 10^{-3}$ с, $V_m = 20$ В.

2. Найдите периодическое решение $x_c(t)$ уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -ax + b(t), \quad b(t+T) \equiv b(t),$$

где $x \in \mathbb{R}$ и $b(t) = A_m \cos t$; $T = 2\pi$ – период периодического решения, a, $A_m = const$.

Указания: Пусть действительная матрица A размерности 2×2 имеет два различных действительных или комплексных собственных значения λ_1, λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

(а) Матрица e^{At} вычисляется по формуле

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t} Q_1 + e^{\lambda_2 t} Q_2.$$

Здесь

$$Q_1 = \frac{A - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2},\ Q_2 = \frac{A - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

где E—единичная матрица.

(б) Пусть собственные значения (2×2)-матрицы A комплексные: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, где α, β — действительная и мнимые части. Тогда матрица e^{At} вычисляется что формуле

$$e^{At} = \mathrm{e}^{\alpha t} \left[E \cdot \cos \beta t + (A - \alpha E) \frac{\sin \beta t}{\beta} \right],$$

где E—единичная матрица.

4.2 Динамические модели с переменной матрицей

Постановка задачи

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t), \quad A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T) \equiv B(t), \qquad (4)$$
$$X, B \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

где $A(t)$ — кусочно постоянная матрица

$$A(t) = \begin{cases} A_1, & kT \leqslant t < kT + \tau; \\ A_2, & kT + \tau \leqslant t \leqslant (k+1)T, \end{cases} \quad 0 < \tau < T. \qquad (5)$$

Алгоритм поиска периодического решения

1. Решить задачу Коши на одном периоде:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t), \quad X(0) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (6)$$

2. Рассчитать матрицу $F(T)$ численно решив уравнение

$$\frac{dF(t)}{dt} = A(t)F(t), \quad F(0) = E, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$A(t) = \begin{cases} A_1, & kT \leqslant t < kT + \tau; \\ A_2, & kT + \tau \leqslant t \leqslant (k+1)T \end{cases}$$

на одном периоде $0 \leqslant t \leqslant T$ или рассчитать $F(T)$ по формуле

$$F(T) = \mathrm{e}^{A_2(T-\tau)}\mathrm{e}^{A_1\tau}.$$

3. Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$(E - F(T))Q = X(T, 0)$$

относительно вектора начальных условий Q для периодического решения $X_c(t)$.

4. Решить задачу Коши на одном периоде с условием $X(0) = Q$:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t), \quad X(0) = Q, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

5. Найти собственные значения матрицы $F(T)$

$$\det(F(T) - \lambda E) = 0$$

и провести анализ их расположения в комплексной плоскости относительно единичного круга.

Алгоритм численной реализации

1. Выбрать шаг интегрирования $h = T/m$.
2. Рассчитать матрицы $\omega(A_1, h) = A_1^{-1}(\mathrm{e}^{A_1h} - E)$, $\omega(A_2, h) = A_2^{-1}(\mathrm{e}^{A_2h} - E)$.
3. Решить задачу Коши с условием $X(0) = 0$ для системы (6) численно:

$$X_{k+1} = X_k + \omega(A, h)(AX_k + B_k), \quad k = \overline{0, m-1}, \quad X_0 = 0,$$

$$\omega(A, h) = \begin{cases} \omega(A_1, h), & 0 \leqslant t_k < \tau; \\ \omega(A_2, h), & \tau \leqslant t_k \leqslant T, \end{cases} \quad tk = k \cdot h.$$

Здесь $X_k = X(t_k)$, $B_k = B(t_k)$.

4. Рассчитать матрицу $F(T)$, решив матричное уравнение

$$\frac{dF(t)}{dt} = AF(t), \quad F(0) = E, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$A(t) = \begin{cases} A_1, & kT \leqslant t < kT + \tau; \\ A_2, & kT + \tau \leqslant t \leqslant (k+1)T \end{cases}$$

численно по схеме

$$F_{k+1} = F_k + \omega(A,h)AF_k, \quad k = \overline{0, m-1}, \quad F_0 = E,$$

$$\omega(A,h) = \begin{cases} \omega(A_1,h), & 0 \leqslant t_k < \tau; \\ \omega(A_2,h), & \tau \leqslant t_k \leqslant T, \end{cases} \quad tk = k \cdot h.$$

Здесь $F_k = F(t_k)$, $tk = k \cdot h$.

5. Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$(E - F_m)Q = X_m, \quad F_m = F(T), \quad X_m = X(T,0).$$

6. Решить численно задачу Коши с условием $X(0) = Q$ и тем самым рассчитать периодическое решение $X_c(t)$:

$$X_{k+1} = X_k + \omega(A,h)(AX_k + B_k), \quad k = \overline{0, m-1}, \quad X_0 = Q,$$

$$\omega(A,h) = \begin{cases} \omega(A_1,h), & 0 \leqslant t_k < \tau; \\ \omega(A_2,h), & \tau \leqslant t_k \leqslant T, \end{cases} \quad tk = k \cdot h.$$

7. Расчет собственных значений матрицы $F(T)$

$$\det(F(T) - \lambda E) = 0.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти периодическое решение системы дифференциальных уравнений и исследовать устойчивость

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + B, \quad A(t) = \begin{cases} A_1, & kT \leqslant t < kT + \tau; \\ A_2, & kT + \tau \leqslant t \leqslant (k+1)T, \end{cases}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{CR_L} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{CR_L} \end{bmatrix}, \quad B = \frac{V_m}{L}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Параметры: $R = 10$ Ом, $L = 0.1$ Гн, $C = 10^{-6}$ Ф, $R_L = 200$ Ом, $T = 2\pi/\Omega$, $T = 10^{-3}$ с, $V_m = 20$ В, $\tau = T/4$.

5 Раздел (тема) дисциплины: Моделирование дискретных хаотических систем

1. Дискретное отображение $x_{k+1} = f(x_k)$ имеет неподвижную точку x_*, такую, что мультипликатор $\rho = f'(x_*) \neq 0$. Покажите, что поведение последовательности $\varepsilon_k = x_k - x_*$ в малой окрестности этой точки соответствует

сходящейся геометрической прогрессии, если $|\rho| < 1$, и расходящейся, если $|\rho| > 1$.

2. Покажите, что отображение

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right)$$

можно использовать для вычисления квадратного корня из числа a. Найдите первые пять членов последовательности x_k, порождаемой этим отображением при $a = 2$. Величину x_0 положите равной единице. Покажите, что неподвижная точка этого отображения устойчива.

3. Найдите неподвижные точки кубического отображения

$$x_{k+1} = \lambda x_k - x_k^3, \quad -2 \leq x_k \leq 2, \quad 0 < \lambda < 3$$

и исследуйте их устойчивость. Найдите значения параметра λ, при которых неподвижные точки теряют устойчивость.

4. Найдите неподвижные точки логистического отображения

$$x_{k+1} = 1 - \lambda x_k^2$$

и исследуйте их устойчивость в зависимости от параметра λ.

5. Найдите неподвижную точку и отвечающий ей мультипликатор для логистического отображения

$$x_{k+1} = \lambda - x_k^2.$$

Используя этот результат, найдите порог касательной бифуркации, условие максимальной устойчивости неподвижной точки и порог бифуркации рождения цикла периода 2.

6. Для кубического отображения вида $x_k = a - bx_{k-1} + x_{k-1}^3$ найдите область устойчивости на плоскости параметров (a, b), ограниченную линией касательной бифуркации и линией удвоения периода.

7. Для логистического отображения с задержкой

$$x_{k+1} = y_k, \quad y_{k+1} = \lambda x_k(1 - x_k) + \varepsilon$$

найдите неподвижные точки, матрицу монодромии, а также ее след и определитель как функции параметров λ и ε. Найдите линии бифуркации седло-узел, бифуркации удвоения периода и бифуркации Неймарка — Сакера и нанесите их на плоскость (λ, ε).

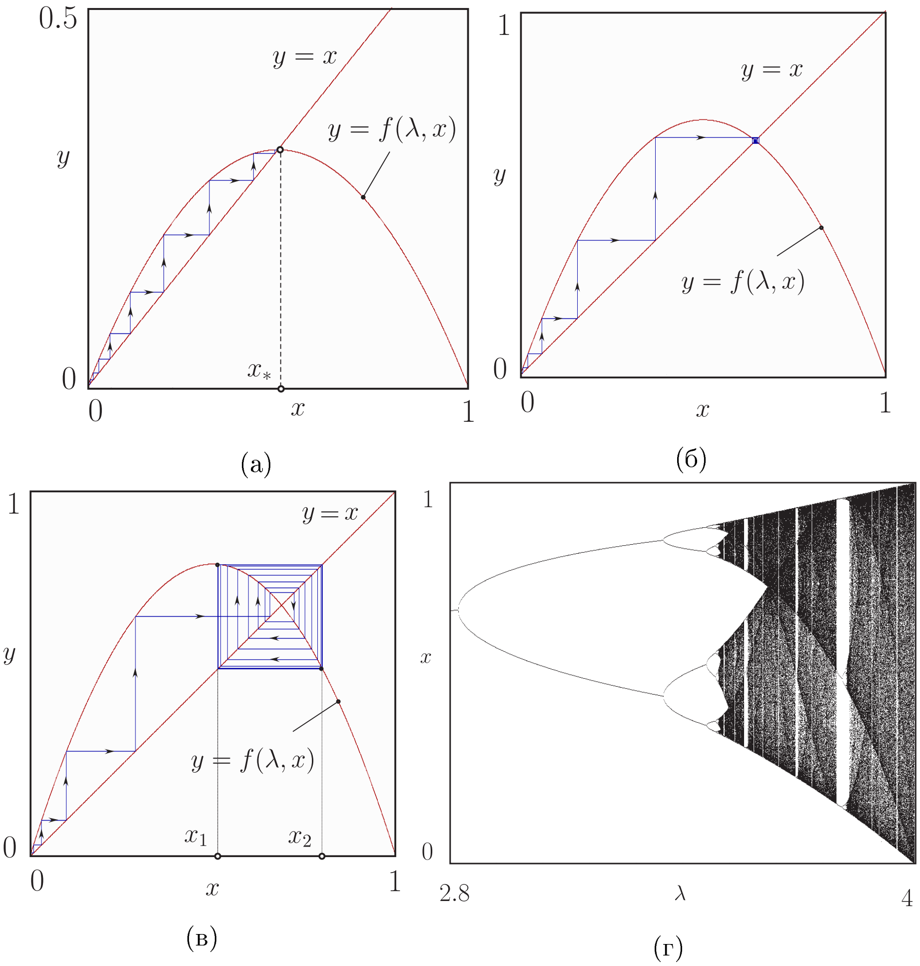

Рис. 1: (а)–(в) Итерационные диаграммы, (г) – бифуркационная диаграмма для отображения $x_{k+1} = \lambda(x_k - x_k^2)$

8. Для двумерного необратимого отображения

$$x_{k+1} = y_k,$$
$$y_{k+1} = by_k - cx_k + x_k^2$$

найдите неподвижные точки, матрицу монодромии, а также ее след и определитель как функции параметров b и c. Найдите линии бифуркации седло-узел, бифуркации удвоения периода и бифуркации Неймарка — Сакера и нанесите их на плоскость (b, c).

9. Для двумерного отображения

$$x_{k+1} = ax_k + y_k, \quad y_{k+1} = bx_k + x_k^3$$

постройте области устойчивости неподвижных точек на плоскости параметров (a, b).

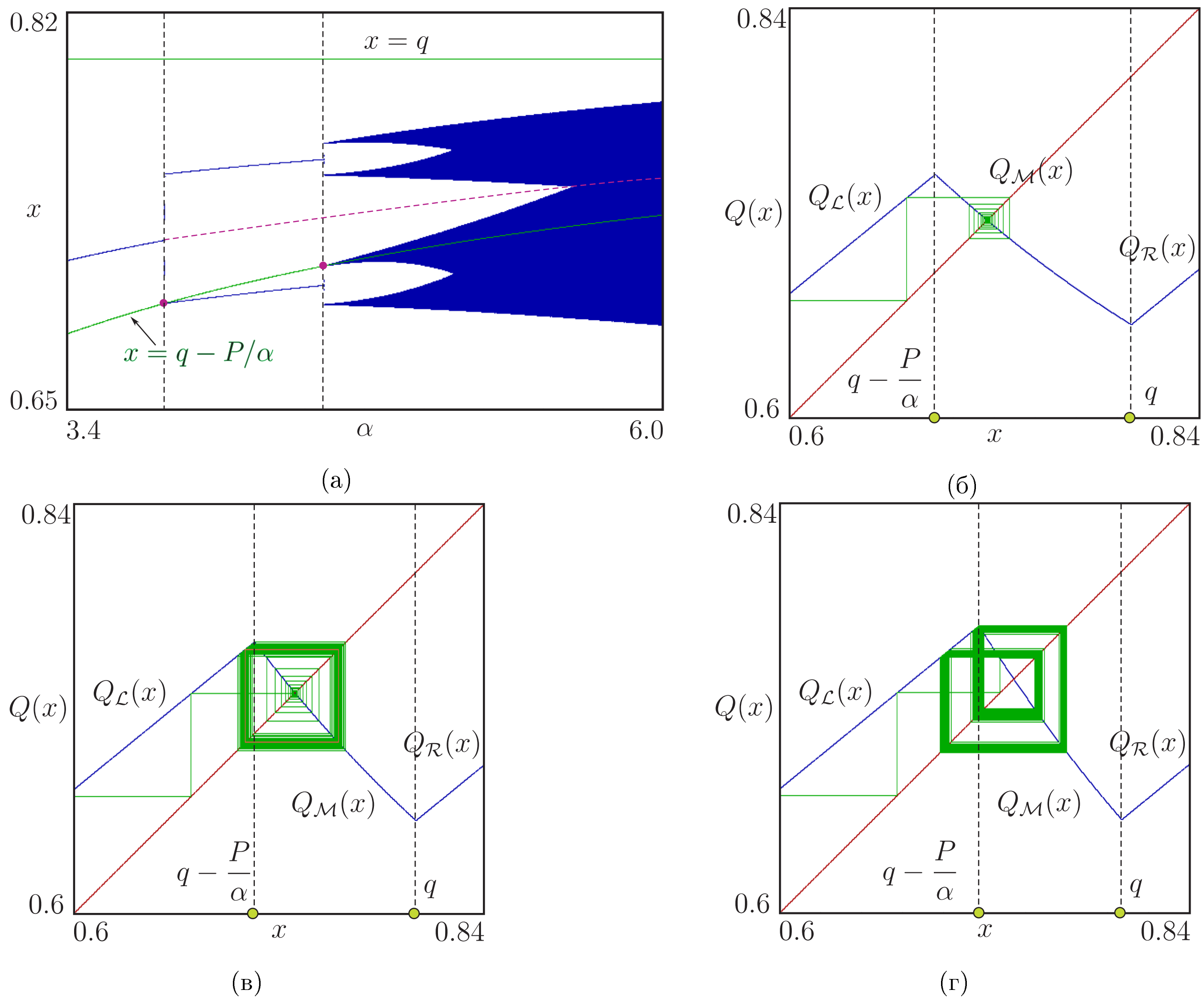

Рис. 2: (а) Бифуркационная диаграмма $3.4 < \alpha < 6.0$. (б) Итерационная диаграмма при $\alpha = 3.5$. (в) Итерационная диаграмма при $\alpha = 4.25$. (г) Итерационная диаграмма при $\alpha = 4.8$

10. Для отображения

$$x_{k+1} = \lambda(x_k - x_k^2)$$

найдите все неподвижные точки и исследуйте их устойчивость. Найдите значения λ, при которых неподвижные точки теряют устойчивость. Постройте итерационные диаграммы для ситуаций, когда $\rho > 1$, $0 < \rho < 1$, $-1 < \rho < 0$, $\rho < -1$. Здесь $\rho = \frac{\partial f(\lambda, x_*)}{\partial x}$ — мультипликатор неподвижной точки x_*.

Объясните динамику, наблюдаемую на рис. 1 (а)–(в). Какой процесс устанавливается в каждом случае при прошествии достаточно большого времени? Воспроизведите бифуркационную диаграмму, изображенную на рис. 1(г), и объясните бифуркационные переходы.

11. Рассмотрите кусочно-гладкое отображение:

$$x_{k+1} = Q(x_k), \tag{7}$$

$$Q(x) = \begin{cases} Q_{\mathcal{L}}(x) = a \cdot x - a + 1, & x < q - P/\alpha; \\ Q_{\mathcal{R}}(x) = a \cdot x, & x > q; \\ Q_{\mathcal{M}}(x) = a \cdot x - a + a^{1-z}, & q - P/\alpha \leqslant x \leqslant q, \end{cases}$$

$$z = \frac{q - x}{P}\alpha, \quad a = \mathrm{e}^{\lambda}, \quad 0 < a < 1.$$

Параметры: $\lambda = -0.2$, $P = 0.4$, $q = 0.8$, $\alpha > 0$.

Воспроизведите диаграммы, изображенные на рис. 2(а)–(г). Объясните бифуркационные переходы на рис.2(а) с помощью итерационных диаграмм.

Литература

1. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем: Учебное пособие.– СПб: СПбГУ ИТМО, 2009.– 363 с.