МИНОБРНАУКИ РОССИИ
«Юго-Западный государственный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
«Вычислительная техника»
__________ И.Е. Чернецкая
« 30 » 06 __________ 2022 г.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА
для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

«Математические основы теории динамических систем»

09.03.01 Информатика и вычислительная техника

Курск 2022

1 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ

1.1 Вопросы для устного опроса

Раздел (тема) дисциплины: Элементы теории динамических систем

- 1. Определение динамической системы.
- 2. Понятие фазового пространства.
- 3. Автономные динамические системы. Приведите примеры.
- 4. Неавтономные динамические системы.
- 5. Отображение Пуанкаре.
- 6. Стробоскопическое отображение.
- 7. Метод Хенона.
- 8. Получите стробоскопическог отображение линейного осциллятора с импульсным воздействием
$$\dot{x} = -ax + b\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT), \quad a>0,\ b>0.$$
- 9. Получите уравнения для нелинейного автономного RL контура с нелинейной емкостью $U_c(q) = \beta q^3$. Чему равна размерность фазового пространства. Найдите особые точки.
- 10. Получите уравнения для нелинейного неватономного RL контура с нелинейной емкостью $U_c(q) = \beta q^3$ и с внешним периодическим возбуждением $U(t) = U_m \sin(\omega t)$.

Раздел (тема) дисциплины: Введение в теорию устойчивости динамических систем

- 1. Состояния равновесия автономных систем.
- 2. Исследование локальной устойчивости автономных систем на фазовой плоскости. Критерий локальной устойчивости.
- 3. Объясните фазовый портрет двумерной автономной системы в окрестности устойчивого узла.

- 4. Объясните фазовый портрет двумерной автономной системы в окрестности неустойчивого узла.
- 5. Объясните фазовый портрет двумерной автономной системы в окрестности седла.
- 6. Объясните фазовый портрет двумерной автономной системы в устойчивого фокуса.
- 7. Объясните фазовый портрет двумерной автономной системы в неустойчивого фокуса.
- 8. Определите возможные типы особых точек двумерной линейной диссипативной автономной системы.
- 9. Представьте уравнение Ван дер Поля

  $$\ddot{x} - (a - x^2)\dot{x} + x = 0$$

  в нормальной форме Коши. Найдите матрицу Якоби и укажите возможные типы особых точек.
- 10. Исследование локальной устойчивости периодических движений. Критерий локальной устойчивости.

Раздел (тема) дисциплины: Одномерные дискретные динамические системы

- 1. Одномерные отображения. Свойства линейного отображения.
- 2. Неподвижные точки . Итерационная диаграмма.
- 3. Устойчивость неподвижных точек. Критерии локальной устойчивости.
- 4. Мультипликатор $\rho = f'(x_*)$ неподвижной точки x_* и его геометрическая интерпретация.
- 5. Изобразите итерационные диаграммы в окрестности гиперболической неподвижной точки x_* отображения $x_{k+1} = f(x_k)$ для случаев: $0 < f'(x_*) < 1$ и $f'(x_*) > 1$. Объясните наблюдаемую динамику.
- 6. Изобразите итерационную диаграмму в окрестности гиперболической неподвижной точки x_* отображения $x_{k+1} = f(x_k)$ для случаев: $-1 < f'(x_*) < 0$ и $f'(x_*) < -11$. Объясните наблюдаемую динамику.

- 7. Изобразите итерационную диаграмму в окрестности гиперболической неподвижной точки x_* отображения $x_{k+1} = f(x_k)$ для случаев: $-1 < f'(x_*) < 0$ и $f'(x_*) < -11$. Объясните наблюдаемую динамику.
- 8. Циклы. Задача поиска циклов в одномерных отображениях.
- 9. Устойчивость циклов. Мультипликаторы циклов. Критерий локальной устойчивости циклов.
- 10. Касательная бифуркация. Нормальная форма для описания бифуркационного перехода.
- 11. Транскритическая бифуркация. Нормальная форма для описания бифуркационного перехода.
- 12. Вилообразная бифуркация. Нормальная форма для описания бифуркационного перехода.
- 13. Бифуркация удвоения периода. Нормальная форма для описания бифуркационного перехода.
- 14. Понятие о бифуркациях граничного столькновения.

Раздел (тема) дисциплины: Двумерные дискретные отображения и их бифуркации

- 1. Сечение Пуанкаре. Двумерные отображения.
- 2. Неподвижные точки двумерных отображений..
- 3. Линейный анализ стойчивость неподвижных точек.
- 4. Матрица монодромии и мультипликаторы. Критерий локальной устойчивости неподвижных точек.
- 5. Треугольник устойчивости.
- 6. Циклы двумерных отображений.
- 7. Матрица монодромии и мультипликаторы циклов. Критерий локальной устойчивости циклов.
- 8. Гиперболические неподвижные точки и циклы.
- 9. Устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия.
- 10. Седло-узловая бифуркация.

- 11. Бифуркация удвоения периода.
- 12. Инвариантные кривые. Бифуркация Неймарка-Сакера.

Шкала оценивания: балльная

Критерии оценки

Оценка **«7 баллов»** выставляется обучающемуся, если он демонстрирует глубокое знание содержания вопроса, дает точные определения основных понятий, аргументированно и логически стройно излагает учебный материал, иллюстрирует свой ответ актуальными примерами (типовыми и нестандартными), в том числе самостоятельно найденными, не нуждается в уточняющих и (или) дополнительных вопросах преподавателя.

Оценка **«4 балла»** выставляется обучающемуся, если он владеет содержанием вопроса, но допускает некоторые недочеты при ответе, допускает незначительные неточности при определении основных понятий, недостаточно аргументированно и (или) логически стройно излагает учебный материал, иллюстрирует свой ответ типовыми примерами.

Оценка **« 3 балла»** выставляется обучающемуся, если он освоил основные положения контролируемой темы, но недостаточно четко дает определение основных понятий и дефиниций, затрудняется при ответах на дополнительные вопросы, приводит недостаточное количество примеров для иллюстрирования своего ответа, нуждается в уточняющих и (или) дополнительных вопросах преподавателя.

Оценка **« 0 баллов»** выставляется обучающемуся, если он не владеет содержанием вопроса или допускает грубые ошибки, затрудняется дать основные определения, не может привести или приводит неправильные примеры, не отвечает на уточняющие и (или) дополнительные вопросы преподавателя или допускает при ответе на них грубые ошибки.

2 КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

2.1 ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

- 1. Что такое итерация?
- 2. Определение орбиты отображения.
- 3. Определения неподвижной точки, периодической точки, периодической орбиты.

- 4. Алгоритм расчета Cobweb диаграммы.
- 5. Алгоритм расчета бифуркационной диаграммы.
- 6. Линейное отображение. Устойчивость неподвижных точек линейного отображения (включая афинного линейного отображения).
- 7. Локальная устойчивость неподвижных точек нелинейного отображенния
  - 7.1 Определение гиперболической и негиперболической непожвижной точки.
  - 7.2. Мультипликатор неподвижной/периодической точки. Геометрическая интерпретация.
  - 7.3 Устойчивость гиперболической неподвижной точки.
  - 7.4 Устойчивость негиперболической неподвижной точки с мультипликатором $+1$.
  - 7.5. Устойчивость негиперболической неподвижной точки с мультиплиактором -1.
- 8. Элементы теории бифуркаций одномерных отображений
  - 8.1. Касательная бифуркация (fold).
  - 8.2. Суперкритическая вилообразная бифуркация (supercritical pitchfork).
  - 8.3. Субркритическая вилообразная бифуркация (subcritical pitchfork)..
  - 8.4. Транскритическая бифуркация (transcritical).
  - 8.5. Суперкритическая бифуркация удвоения периода (supercritical flip или period-doubling).
  - 8.6. Субкритическая бифуркация удвоения периода (subcritical flip или period-doubling).
- 9. Анализ устойчивости методом уравнений периодов кусочно-гладких систем.
  - 9.1 Метод получения уравнения периодов.
  - 9.2. Алгоритм численного решения уравнений периодов.
  - 9.3. Алгоритм расчета мультипликаторов неподвижных/периодических точек.

- 10. Кусочно-гладкие дискретные динамические системы (отображения). Понятие о border-collision бифуркациях.
  - 10.1 Кусочно-линейное отображение.
  - 10.2. Persistence border-collision.
  - 10.3. Fold border-collision.
  - 10.4. Flip border-collision.
- 11. Анализ border-collision бифуркаций методом теории нормальных форм.
- 12. Двумерные отображения.
- 13. Неподвижные/периодические точки двумерных отображений.
- 14. Анализ локальной (линейной) устойчивости неподвижных/периодических точек двумерных отображений.
- 15. След и определитель матрицы Якоби. Мультипликаторы неподвижных/периодических точек двумерных отображений.
- 16. Критерии устойчивости. Треугольних устойчивости.
- 17. Локальные критерии бифуркаций неподвижных точек:
  - 17.1 седло-узловая бифуркация.
  - 17.2. бифуркация удвоения периода.
  - 17.3. бифуркация Неймарка- Сакера.

2.2 БАНК ВОПРОСОВ И ЗАДАНИЙ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

1.Найдите неподвижную точку x_* линейного отображения

$$x \mapsto ax - b.$$

- (а) $x_* = b/(1-a)$.
- (б) $x_* = b/(a+1)$.
- (в) $x_* = b/(a-1)$.

2. Определите устойчивость неподвижной точки линейного отображения

$$x_{k+1} = -1.2x_k + 0.2.$$

- (а) Устойчива.
- (б) Неустойчива.
- (в) Нейтральна.

3. Какой бифуркации соответствует точка $\lambda = \lambda_2$ на рис.1?

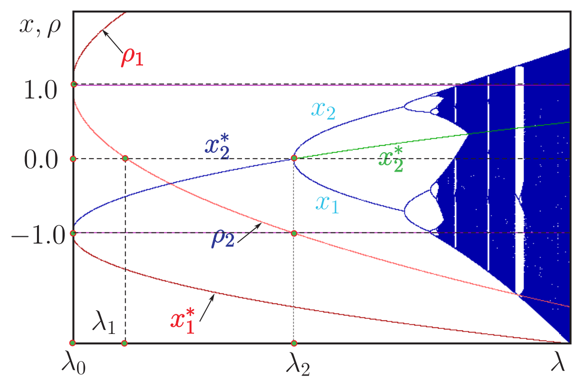

Рис.1. Бифуркационная диаграмма: $x^*_{1,2}$ – неподвижные точки; $\rho_{1,2}$ – мультипликаторы неподвижных точек $x^*_{1,2}$

- (а) Касательной.
- (б) Транскритической.
- (в) Удвоению периода.
- (г) Вилообразной.

4. Определите характер переходного процесса в линейном отображении

$$x_{k+1} = -0.5x_k - 2.5.$$

- (а) переходный процесс затухает монотонно:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0.$$

- (б) переходный процесс затухает колебательно:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0.$$

- (в) наблюдаются незатухающие колебания.

5. Точка $x_* \in \mathbb{R}$ отображения $x \mapsto F(x)$ является m-периодической, если

- (а)

$$F(x_*) - x_* = 0 \quad F^m(x_*) - x_* \neq 0.$$

- (б)

$$F(x_*) - x_* = 0 \quad F^m(x_*) - x_* = 0.$$

- (в)

$$F(x_*) - x_* \neq 0 \quad F^m(x_*) - x_* = 0.$$

.

Здесь

$$F^m x_0) = \underbrace{F(F(\ldots F(x_0)\ldots))}_{m \text{ раз}}.$$

6. Какая бифуркация реализуется в кусочно-линейном отображении

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu, & x \leqslant 0; \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

если $a_{\mathcal{L}} = 1.2$ и $a_{\mathcal{R}} = -0.25$?

- (а) «border-collision» fold.
- (б) «border-collision» flip.
- (в) «border-collision» persistence.

7. Дано отображение

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \mathrm{e}^{\lambda}(x-1) + \mathrm{e}^{\lambda(1-z)}, \quad \varphi(z,x) = x + \frac{q}{\alpha}z - q = 0.$$

Найдите первую производную $F'(x)$ для расчета мультипликатора неподвижной точки.

- (а)

$$F'(x) = \mathrm{e}^{\lambda} + \frac{q \cdot \alpha}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda(1-z)}.$$

- (б)

$$F'(x) = \mathrm{e}^{\lambda} + \frac{\lambda \cdot \alpha}{q \cdot \mathrm{e}^{\lambda(1-z)}}.$$

.

- (в)

$$F'(x) = \mathrm{e}^{\lambda} + \frac{\lambda \cdot \alpha}{q}\mathrm{e}^{\lambda(1-z)}.$$

.

8. Пусть дано отображение $x_{k+1} = f(x_k)$, имеющее неподвижную точку x_* с мультипликатором $f'(x_*) = -1$. Чему равна $F''(x_*)$, где $F(x) = f(f(x))$?

- 1. $F''(x_*) = +1$;
- 2. $F''(x_*) = 0$;
- 3. $F''(x_*) = -1$.

9. Для отображения

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad F(a,x) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}} = a \cdot x^{\gamma} & , \quad 0 < x < 1; \\ F_{\mathcal{R}} = \dfrac{a \cdot x}{1 + \theta \cdot (x-1)} & , \quad x \geqslant 1, \end{cases}$$

$$\theta = \gamma^{1-b}, \quad \gamma = 1 - \frac{1}{b}$$

получите нормальную форму в виде кусочно-линейного отображения. Здесь $a > 0$ – варьируемый параметр, $b > 1$ – фиксированный параметр.

10. Определите устойчивость негиперболической неподвижной точки x_* отображения

$$x \mapsto 0.7 - x^2 \equiv F(x).$$

- (а) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = +1$; полуустойчивая.
- (б) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = +1$; устойчивая.
- (в) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = -1$; устойчивая.
- (г) x_* — не существует негиперболической неподвижной точки.
- (д) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = -1$; неустойчивая.
- (е) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = +1$; неустойчивая.

11. Какая бифуркация реализуется в кусочно-линейном отображении

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}} x + \mu, & x \leqslant 0; \\ a_{\mathcal{R}} x + \mu, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

если $a_{\mathcal{L}} = 0.5$ и $a_{\mathcal{R}} = -0.5$?

- (а) «border-collision» fold.
- (б) «border-collision» flip.
- (в) «border-collision» persistence.

12. Дано отображение

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \mathrm{e}^{\lambda}(x-1) + 2\mathrm{e}^{\lambda(1-z)} - 1, \quad \varphi(z, x) = q - x - \frac{q}{\alpha}(z - 0.5) = 0.$$

Получите уравнение периодов для расчета неподвижной точки.

- (а)

$$q-2\cdot\frac{\mathrm{e}^{\lambda(1-z)}-1}{1-\mathrm{e}^{\lambda}}-\frac{q}{\alpha}(z-1/2)=0.$$

$$q-1-\frac{\mathrm{e}^{\lambda}-\mathrm{e}^{\lambda z}}{1-\mathrm{e}^{\lambda}}-\frac{q}{\alpha}(z-1/2)=0.$$

.

- (в)

$$q-1-\frac{\mathrm{e}^{\lambda(1-z)}-1}{1-\mathrm{e}^{\lambda}}\cdot\mathrm{e}^{\lambda z}-\frac{q}{\alpha}(z-1/2)=0.$$

.

13. Для двумерного отображения

$$x_{k+1}=y_k;\quad y_{k+1}=a-bx_k-y_k^2$$

найдите неподвижные точки, след и определитель матрицы Якоби как функции параметров a и b.

- 1. $x_*=y_*=-\frac{1}{2}\left(b+1\pm\sqrt{(b+1)^2+4a}\right)$, $\delta=b$, $\tau=b+1\pm\sqrt{(b+1)^2+4a}$;
- 2. $x_*=y_*=\frac{1}{2}\left(b+1\pm\sqrt{(b-1)^2-4a}\right)$, $\delta=-b$, $\tau=b-1\pm\sqrt{(b+1)^2-4a}$;
- 3. $x_*=y_*=-\frac{1}{2}\left(b+1\pm\sqrt{(b+1)^2-4a}\right)$, $\delta=-b$, $\tau=b+1\pm\sqrt{(b+1)^2-4a}$;

14. Какая бифуркация реализуются в точке $a=3.5$ в отображении $x\mapsto ax(1-x)\equiv F(a,x)$?

- (а) Касательная.
- (б) Транскритическая.
- (в) Удвоения периода.
- (г) Вилообразная.
- (д) Никакая.

15. Найдите линию бифуркации седло-узел для отображения

$$x_{k+1} = a - x_k^2 - by_k; \quad y_{k+1} = x_k$$

в форме явной зависмости от параметрв a и b.

- (а) $a = -\dfrac{(1+b)^2}{4}$.
- (б) $a = -\dfrac{3(1+b)^2}{4}$.
- (в) $a = \dfrac{(1-b)^2}{4}$.

16. Определите устойчивость неподвижной точки кусочно-линейного отображения

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} 0.4x + 2, & x \leqslant 0; \\ -1.1x + 2, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

- (а) Устойчива.
- (б) Неустойчива.
- (в) Полуустойчива справа.

17. В какой последовательности проводится анализ локальной устойчивости неподвижной/периодической точки отображения?

(а) 1-привести к локальной форме; 2-найти инвариантное множество; 3-ли-неаризовать отображение, приведенное в локальной форме, в окрестности непо-движной/периодической точки; 4-найти мультипликаторы неподвижной/периодической точки; 5-провести анализ расположения мультипликаторов в комплексной плоскости относительно границы единичного круга.

(б) 1- найти инвариантное множество; 2-привести к локальной форме; 3 - линеаризовать отображение, приведенное в локальной форме, в окрестности неподвижной/периодической точки; 4-найти мультипликаторы неподвижной/периодической точки; 5-провести анализ расположения мультипликаторов в комплексной плоскости относительно границы единичного круга.

(в) 1-найти инвариантное множество; 2- линеаризовать отображение, в окрестности неподвижной/периодической точки; 3-привести к локальной форме; 4-найти мультипликаторы неподвижной/периодической точки; 5-провести анализ расположения мультипликаторов в комплексной плоскости относительно границы единичного круга.

18. Найдите неподвижные точки и отвечающие им мультипликаторы для отображения

$$x_{k+1} = 1 - ax_k^2 \equiv F(a, x_k).$$

- (а)

$$x_* = -\frac{1}{2a}\left(1 \pm \sqrt{1+4a}\right), \quad F'(x_*) = 1 \pm \sqrt{1+4a}.$$

- (б)

$$x_* = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4a}\right), \quad F'(x_*) = 1 \pm \sqrt{1+4a}.$$

- (в)

$$x_* = \frac{1}{2a}\left(1 \pm \sqrt{1+4a}\right), \quad F'(x_*) = -1 \pm \sqrt{1+4a}.$$

19. Для отображения

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad F(a,x) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}}(a,x) = a \cdot x^c & , \quad x < 1; \\ F_{\mathcal{R}}(a,x) = \dfrac{a \cdot x}{1+\beta(x-1)} & , \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

получите нормальную форму в виде кусочно-линейного отображения. Здесь a – варьируемый параметр, c и β – фиксированные параметры.

20. Определите устойчивость негиперболическойнеподвижной точки x_* отображения

$$x \mapsto 2x - x^3 \equiv F(x).$$

- (а) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = +1$; полуустойчивая.

- (б) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = +1$; устойчивая.
- (в) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = -1$; устойчивая.
- (г) x_* — не существует негиперболической неподвижной точки.
- (д) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = -1$; неустойчивая.
- (е) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = +1$; неустойчивая.

21. Какая бифуркация реализуется в кусочно-линейном отображении

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}} x + \mu, & x \leqslant 0; \\ a_{\mathcal{R}} x + \mu, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

если $a_{\mathcal{L}} = 0.5$ и $a_{\mathcal{R}} = -1.25$?

- (а) «border-collision» fold.
- (б) «border-collision» flip.
- (в) «border-collision» persistence.

22. Дано отображение

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \mathrm{e}^{\lambda}(x-1) + 2\mathrm{e}^{\lambda(1-z)} - 1, \quad \varphi(z,x) = q - x - \frac{q}{\alpha}(z - 0.5) = 0.$$

Найдите первую производную $F'(x)$ для расчета мультипликатора неподвижной точки.

- (а)

$$F'(x) = \mathrm{e}^{\lambda} - \frac{\lambda \cdot \alpha}{q}\mathrm{e}^{\lambda(1-z)}.$$

$$F'(x) = \mathrm{e}^{\lambda} + \frac{\alpha \cdot \lambda}{q}\mathrm{e}^{\lambda(1-z)}.$$

.

- (в)

$$F'(x) = \mathrm{e}^{\lambda} + \frac{q \cdot \alpha}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda(1-z)}.$$

.

23. Для двумерного отображения

$$x_{k+1} = y_k; \quad y_{k+1} = 1 - ax_k^2 + by_k$$

найдите неподвижные точки, след τ и определитель δ матрицы Якоби как функции параметров a и b.

- 1. $x_* = y_* = -\frac{1}{2a}\left(b - 1 \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}\right)$, $\delta = -b$, $\tau = b - 1 \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}$;
- 2. $x_* = y_* = \frac{1}{2a}\left(1 - b \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}\right)$, $\delta = b$, $\tau = 1 - b \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}$;
- 3. $x_* = y_* = -\frac{1}{2a}\left(b - 1 \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}\right)$, $\delta = -b$, $\tau = -b + 1 \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}$;

24. Какая бифуркация реализуются в точке $a = 3.5$ в отображении $x \mapsto ax(1-x) \equiv F(a,x)$?

- (а) Касательная.
- (б) Транскритическая.
- (в) Удвоения периода.
- (г) Вилообразная.
- (д) Никакая.

25. Найдите линию бифуркации удвоения периода для отображения

$$x_{k+1} = a - x_k^2 - by_k; \quad y_{k+1} = x_k$$

в форме явной зависмости от параметрв a и b.

- (а) $a = -\frac{(1+b)^2}{4}$.

- (б) $a = -\dfrac{3(1+b)^2}{4}$.
- (в) $a = \dfrac{(1-b)^2}{4}$.

26. Определите устойчивость неподвижной точки кусочно-линейного отображения

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} 0.4x - 1, & x \leqslant 0; \\ -1.1x - 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

- (а) Устойчива.
- (б) Неустойчива.
- (в) Полуустойчива справа.

27. Как ведет себя орбита линейного отображения

$$x_{k+1} = x_k - 6?$$

- (а) Уходит в $+\infty$.
- (б) Уходит в $-\infty$.
- (в) Совершает незатухающие колебания.

28. Какова скорость завершения переходного процесса в зависимости от величины мультипликатора $F'(x_*)$ устойчивой неподвижной точки x_* отображения $x \mapsto F(x)$?

- (а) Чем величина $|F'(x_*)|$ ближе к 1, тем выше скорость завершения переходного процесса.
- (б) Чем величина $|F'(x_*)|$ ближе к 1, тем ниже скорость завершения переходного процесса.

- (в) Скорость завершения переходного не зависит от величины $F'(x_*)$.

29. Найдите неподвижную точку и отвечающий ей мультипликатор для отображения

$$x_{k+1} = a - 0.2 - x_k^2 \equiv F(a, x_k)$$

Используя этот результат, найдите точку бифуркации удвоения периода. Определите устойчивость неподвижной точки при бифуркационном значении параметра. Какой тип бифуркации реализуется (субкритическая или суперкритическая бифуркация)?

30. Определите устойчивость негиперболической неподвижной точки x_* отображения

$$x \mapsto 2x - x^3 \equiv F(x).$$

- (а) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = +1$; полуустойчивая.
- (б) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = +1$; устойчивая.
- (в) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = -1$; устойчивая.
- (г) x_* — не существует негиперболической неподвижной точки.
- (д) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = -1$; неустойчивая.
- (е) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = +1$; неустойчивая.

31. Какая бифуркация реализуется в кусочно-линейном отображении

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}} x + \mu, & x \leqslant 0; \\ a_{\mathcal{R}} x + \mu, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

если $a_{\mathcal{L}} = 0.5$ и $a_{\mathcal{R}} = -1.25$?

- (а) «border-collision» fold.
- (б) «border-collision» flip.
- (в) «border-collision» persistence.

32. Дано отображение

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \mathrm{e}^{\lambda}(x-1) + 2\mathrm{e}^{\lambda(1-z)} - 1, \quad \varphi(z,x) = q - x - \frac{q}{\alpha}(z-0.5) = 0.$$

Найдите первую производную $F'(x)$ для расчета мультипликатора неподвижной точки.

- (а)

$$F'(x) = \mathrm{e}^{\lambda} - \frac{\lambda \cdot \alpha}{q}\mathrm{e}^{\lambda(1-z)}.$$

$$F'(x) = \mathrm{e}^{\lambda} + \frac{\alpha \cdot \lambda}{q}\mathrm{e}^{\lambda(1-z)}.$$

.

- (в)

$$F'(x) = \mathrm{e}^{\lambda} + \frac{q \cdot \alpha}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda(1-z)}.$$

.

33. Для двумерного отображения

$$x_{k+1} = y_k; \quad y_{k+1} = 1 - ax_k^2 + by_k$$

найдите неподвижные точки, след τ и определитель δ матрицы Якоби как функции параметров a и b.

- 1. $x_* = y_* = -\frac{1}{2a}\left(b - 1 \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}\right)$, $\delta = -b$, $\tau = b - 1 \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}$;
- 2. $x_* = y_* = \frac{1}{2a}\left(1 - b \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}\right)$, $\delta = b$, $\tau = 1 - b \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}$;

- 3. $x_* = y_* = -\frac{1}{2a}\left(b-1 \pm \sqrt{(b-1)^2+4a}\right)$, $\delta = -b$, $\tau = -b+1 \pm \sqrt{(b-1)^2+4a}$;

34. Какая бифуркация реализуются в точке $a = 3.5$ в отображении $x \mapsto ax(1-x) \equiv F(a,x)$?

- (а) Касательная.
- (б) Транскритическая.
- (в) Удвоения периода.
- (г) Вилообразная.
- (д) Никакая.

35. Найдите линию бифуркации удвоения периода для отображения

$$x_{k+1} = a - x_k^2 - by_k; \quad y_{k+1} = x_k$$

в форме явной зависмости от параметрв a и b.

- (а) $a = -\frac{(1+b)^2}{4}$.
- (б) $a = -\frac{3(1+b)^2}{4}$.
- (в) $a = \frac{(1-b)^2}{4}$.

36. Определите устойчивость неподвижной точки кусочно-линейного отображения

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} 0.4x - 1, & x \leqslant 0; \\ -1.1x - 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

- (а) Устойчива.
- (б) Неустойчива.
- (в) Полуустойчива справа.

37. Как ведет себя орбита линейного отображения

$$x_{k+1} = x_k - 6?$$

- (а) Уходит в $+\infty$.
- (б) Уходит в $-\infty$.
- (в) Совершает незатухающие колебания.

38. Какова скорость завершения переходного процесса в зависимости от величины мультипликатора $F'(x_*)$ устойчивой неподвижной точки x_* отображения $x \mapsto F(x)$?

- (а) Чем величина $|F'(x_*)|$ ближе к 1, тем выше скорость завершения переходного процесса.
- (б) Чем величина $|F'(x_*)|$ ближе к 1, тем ниже скорость завершения переходного процесса.
- (в) Скорость завершения переходного не зависит от величины $F'(x_*)$.

39. Найдите неподвижную точку и отвечающий ей мультипликатор для отображения

$$x_{k+1} = a - 0.2 - x_k^2 \equiv F(a, x_k)$$

Используя этот результат, найдите точку бифуркации удвоения периода. Определите устойчивость неподвижной точки при бифуркационном значении параметра. Какой тип бифуркации реализуется (субкритическая или суперкритическая бифуркация)? 1. Определите устойчивость негиперболической неподвижной точки x_* отображения

$$x \mapsto \frac{1 + 2x^2}{2x} - 1 \equiv F(x).$$

- (а) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = +1$; полуустойчивая.
- (б) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = +1$; устойчивая.
- (в) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = -1$; устойчивая.
- (г) x_* — неподвижная точка является гиперболической.
- (д) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = -1$; неустойчивая.
- (е) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = +1$; неустойчивая.

40. Какая бифуркация реализуется в кусочно-линейном отображении

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu, & x \leqslant 0; \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

если $a_{\mathcal{L}} = 0.275$ и $a_{\mathcal{R}} = -0.384$?

- (а) «border-collision» fold.
- (б) «border-collision» flip.
- (в) «border-collision» persistence.

41. Дано отображение

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \mathrm{e}^{\lambda}(x-1) + \mathrm{e}^{\lambda(1-z)}, \quad \varphi(z,x) = q - 1 - (x-1)\mathrm{e}^{\lambda z} = 0.$$

Найдите первую производную $F'(x)$ для расчета мультплитаторов неподвижной точки.

- (а)

$$F'(x) = \frac{q}{q-1} \cdot \mathrm{e}^{\lambda}.$$

$$F'(x) = \mathrm{e}^{\lambda} + \frac{\lambda}{q \cdot \mathrm{e}^{\lambda(1-z)}}.$$

.

- (в)

$$F'(x) = \mathrm{e}^{\lambda} + \frac{\lambda}{q}\mathrm{e}^{\lambda(1-z)}.$$

.

42. Пусть дано отображение $x_{k+1} = f(x_k)$, имеющее неподвижную точку x_* с мультипликатором $f'(x_*) = -1$. Чему равна $F'''(x_*)$, где $F(x) = f(f(x))$?

- 1. $F'''(x_*) = +1$;
- 2. $F'''(x_*) = 0$;
- 3. $F'''(x_*) = 2Sf(x_*)$, где Sf – производная Шварца функции f.

43. Какая бифуркация реализуются в точке $a = 1.0$ в отображении $x \mapsto ax(1 + x^2) \equiv F(a, x)$?

- (а) Касательная.
- (б) Транскритическая.
- (в) Удвоения периода.
- (г) Вилообразная.

44. Найдите мультипликаторы неподвижных точек x_* отображения

$$x_{k+1} = 1 - \frac{1}{2 + x_k} \equiv F(x_k).$$

- (а) $F'(x_*) = \dfrac{1}{(2 + x_*)^2}$, $x* = -\dfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.
- (б) $F'(x_*) = \dfrac{1}{(2 + x_*)^2}$, $x* = \dfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.
- (в) $F'(x_*) = \dfrac{2}{(1 + x_*)^2}$, $x* = -\dfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.

45. Определите устойчивость неподвижной точки кусочно-линейного отображения

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} 0.6x + 1, & x \leqslant 0; \\ -0.8x + 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

- (а) Устойчива.
- (б) Неустойчива.
- (в) Полуустойчива справа.

46. Как ведет себя орбита линейного отображения

$$x_{k+1} = -x_k + 1?$$

- (а) Уходит в $+\infty$.
- (б) Уходит в $-\infty$.
- (в) Совершает незатухающие колебания.

47. Оцените число итераций k (дискретное время), за которое изображающая точка попадет в окрестность неподвижной точки x_* линейного отображения $x_{k+1} = 0.5x_k$ длиной $\Delta = 10^{-p}, \Delta > 0$, если $x_0 = 1.0$? Здесь $p > 1$ –целое число.

- (а)

$$k \approx \left\lfloor -\frac{p \cdot \ln 10}{\ln 0.5} \right\rfloor.$$

- (б)

$$k \approx \left\lfloor -\frac{p \cdot \ln 10}{\ln 2} \right\rfloor.$$

- (в)

$$k \approx \left\lfloor \frac{p \cdot \ln 10}{\ln 0.5} \right\rfloor.$$

Здесь $\lfloor \cdot \rfloor$ –функция, выделяющая целую часть аргумента.

48. Найдите неподвижную точку и отвечающий ей мультипликатор для отображения

$$x_{k+1} = \frac{ax_k}{\sqrt{1 + x_k^2}}.$$

Используя этот результат, найдите точку вилообразной бифуркации. Изобразите качественно итерационные диаграммы до, в точке и после бифуркации. Определите устойчивость неподвижной точки при бифуркационном значении параметра. Какой тип бифуркации реализуется (субкритическая или суперкритическая бифуркация)?

49. Какая бифуркация реализуются в точке $a = -1$ в отображении $x \mapsto ax - x^3 \equiv F(a, x)$?

50. Определите устойчивость негиперболической неподвижной точки x_* отображения

$$x \mapsto -x - x^3 \equiv F(x_k).$$

51. Какая бифуркация реализуется в кусочно-линейном отображении

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu, & x \leqslant 0; \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

если $a_{\mathcal{L}} = 0.3$ и $a_{\mathcal{R}} = -0.95$?

52. Дано отображение

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \mathrm{e}^{\lambda}(x - 1) + 2\mathrm{e}^{\lambda(1-z)} - 1, \quad \varphi(z, x) = q - 1 - (x - 1)\mathrm{e}^{\lambda z} - \frac{q}{\alpha}(z - 1$$

Найдите первую производную $F'(x)$ для расчета мультипликатора неподвижной точки.

53. Пусть дано отображение $x_{k+1} = 3/4 - x_k^2 \equiv f(x_k)$, имеющее неподвижную точку x_* с мультипликатором $f'(x_*) = -1$. Чему равна $F'''(x_*)$, где $F(x) = f(f(x))$?

54. Найдите мультипликаторы неподвижных точек x_* отображения

$$x_{k+1} = 3/4 - x_k^2 \equiv F(x_k).$$

55. Как ведет себя орбита линейного отображения

$$x_{k+1} = -x_k - 2,$$

начинающаяся в точке $x_0 \in \mathbb{R}$?

56. Найдите неподвижные точки отображения

$$x \mapsto 1 - \frac{1}{2+x}.$$

57. Для двумерного отображения

$$x_{k+1} = y_k; \quad y_{k+1} = a - bx_k - y_k^2$$

найдите неподвижные точки, след τ и определитель δ матрицы Якоби как функции параметров a и b. Запишите условие седло-узловой бифуркации.

58. Для отображения

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad F(a,x) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}} = a \cdot x^{1-1/b} & , \quad 0 < x < 1; \\ F_{\mathcal{R}} = \dfrac{a \cdot x}{1 + \mu \cdot (x-1)} & , \quad x \geqslant 1, \end{cases}$$
$$\mu = \left(1 - \frac{1}{b}\right)^{1-b}$$

получите нормальную форму в виде кусочно-линейного отображения. Здесь $a > 0$ – варьируемый параметр, $b > 1$ – фиксированный параметр.

58. Определите устойчивость негиперболической неподвижной точки x_* отображения

$$x \mapsto \frac{1}{2x} - 1 + x \equiv F(x).$$

- (а) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = +1$; полуустойчивая.
- (б) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = +1$; устойчивая.

- (в) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = -1$; устойчивая.
- (г) x_* — неподвижная точка гиперболическая.
- (д) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = -1$; неустойчивая.
- (е) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = +1$; неустойчивая.

59. Какая бифуркация реализуется в кусочно-линейном отображении

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu, & x \leqslant 0; \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

если $a_{\mathcal{L}} = 0.25$ и $a_{\mathcal{R}} = -1.05$?

- (а) «border-collision» fold.
- (б) «border-collision» flip.
- (в) «border-collision» persistence.

60. Дано отображение

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \mathrm{e}^{\lambda}(x-1) + 2\mathrm{e}^{\lambda(1-z)} - 1, \quad \varphi(z,x) = q - 1 - (x-1)\mathrm{e}^{\lambda z} - \frac{q}{\alpha}z = 0.$$

Получите уравнение периодов для расчета неподвижной точки.

- (а)

$$q - 1 - 2 \cdot \frac{\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{\lambda z}}{1 - \mathrm{e}^{\lambda}} - \frac{q}{\alpha}z = 0.$$

$$q - 1 - \frac{\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{\lambda z}}{1 - \mathrm{e}^{\lambda}} - \frac{q}{\alpha}z = 0.$$

.

- (в)

$$q - 1 - \frac{\mathrm{e}^{\lambda(1-z)} - 1}{1 - \mathrm{e}^{\lambda}} \cdot \mathrm{e}^{\lambda z} - \frac{q}{\alpha}z = 0.$$

.

61. Пусть дано отображение $x_{k+1} = 2.8x_k(1-x_k) \equiv f(x_k)$. Опрелелите знак мультипликатором $f'(x_*)$ устойчивой неподвижной точки.

- 1. $f'(x_*) < 0$;
- 2. $f'(x_*) = 0$;
- 3. $f'(x_*) > 0$.

62. Какая бифуркация реализуются в точке $a = 1.0$ в отображении $x \mapsto ax(1-x) \equiv F(a,x)$?

- (а) Касательная.
- (б) Транскритическая.
- (в) Удвоения периода.
- (г) Вилообразная.

63. Найдите вторую итерацию $F(x) = f(f(x))$ функции $f(x)$, если

$$f(x) = 1 - ax^2.$$

- (а) $F(x) = 1 - a^2 - 2ax^2 + x^4$.
- (б) $F(x) = 1 - a + 2ax^2 - a^2x^4$.
- (в) $F(x) = 1 - a - 2ax^2 + a^2x^4$.

64. Определите устойчивость неподвижной точки кусочно-линейного отображения

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} 0.8x - 2, & x \leqslant 0; \\ -1.2x - 2, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

- (а) Устойчива.
- (б) Неустойчива.
- (в) Полуустойчива справа.

65. Как ведет себя орбита линейного отображения

$$x_{k+1} = -x_k - 1?$$

- (а) Уходит в $+\infty$.
- (б) Уходит в $-\infty$.
- (в) Совершает незатухающие колебания.

66. Найдите неподвижные точки и отвечающие им мультипликаторы для отображения

$$x_{k+1} = a - x_k^2 \equiv F(a, x_k).$$

- (а)

$$x_* = -\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+4a}\right), \quad F'(x_*) = 1 \pm \sqrt{1+4a}.$$

- (б)

$$x_* = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4a}\right), \quad F'(x_*) = 1 \pm \sqrt{1+4a}.$$

- (в)

$$x_* = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+4a}\right), \quad F'(x_*) = -1 \pm \sqrt{1+4a}.$$

67. Для отображения

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad F(a,x) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}}(a,x) = a \cdot x^c & , \quad x < 1; \\ F_{\mathcal{R}}(a,x) = \dfrac{a \cdot x}{1+\beta(x-1)} & , \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

получите нормальную форму в виде кусочно-линейного отображения. Здесь a – варьируемый параметр, c и β – фиксированные параметры.

68. Какая бифуркация реализуются в точке $a = 1.0$ в отображении $x \mapsto ax(1-x^2) \equiv F(a,x)$?

- (а) Касательная.
- (б) Транскритическая.
- (в) Удвоения периода.
- (г) Вилообразная.

69. Определите гиперболичность и устойчивость неподвижной точки x_* отображения

$$x_{k+1} = -1/4 - x_k^2 \equiv F(x_k).$$

- (а) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = +1$; полуустойчивая.
- (б) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = +1$; устойчивая.
- (в) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = -1$; устойчивая.
- (г) x_* — гиперболическая устойчивая с мультипликатором $|F'(x_*)| < 1$.
- (д) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = -1$; неустойчивая.
- (е) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = +1$; неустойчивая.

70. Какая бифуркация реализуется в кусочно-линейном отображении

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu, & x \leqslant 0; \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

если $a_{\mathcal{L}} = 0.2$ и $a_{\mathcal{R}} = -1.2$?

- (а) «border-collision» fold.
- (б) «border-collision» flip.

- (в) «border-collision» persistence.

71. Дано отображение

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \mathrm{e}^{\lambda}(x-1) + \mathrm{e}^{\lambda(1-z)}, \quad \varphi(z,x) = q - 1 - (x-1)\mathrm{e}^{\lambda z} - \frac{q}{\alpha}z = 0.$$

Получите уравнение периодов для расчета неподвижной точки.

- (а)

$$\frac{\mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{\lambda(1-z)}}{1-\mathrm{e}^{\lambda}} + q \cdot \left(\frac{z}{\alpha} - 1\right) = 0.$$

- (б)

$$\frac{\mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{\lambda(1-z)}}{1-\mathrm{e}^{\lambda}} + \frac{q}{\alpha}z - q = 0.$$

.

- (в)

$$q - 1 - \frac{\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{\lambda z}}{1-\mathrm{e}^{\lambda}} - \frac{q}{\alpha}z = 0.$$

.

72. Пусть дано отображение $x_{k+1} = f(x_k)$, имеющее неподвижную точку x_* с мультипликатором $f'(x_*) = -1$. Чему равна $F'''(x_*)$, где $F(x) = f(f(x))$?

- 1. $F'''(x_*) = +1$;
- 2. $F'''(x_*) = 0$;
- 3. $F'''(x_*) = 2Sf(x_*)$, где Sf – производная Шварца функции f.

73. Найдите неподвижные точки отображения

$$x_{k+1} = 1 - \frac{1}{2 + x_k}.$$

- (а) $x_1^* = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2^* = \dfrac{2}{1-\sqrt{5}}$.

- (б) $x_1^* = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$, $x_2^* = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- (в) $x_1^* = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$, $x_2^* = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

74. Найдите мультипликаторы неподвижных точек x_* отображения

$$x_{k+1} = 3/4 - x_k^2 \equiv F(x_k).$$

- (а)

$$F'(x_*) = 1 \pm \sqrt{5}.$$

- (б)

$$F'(x_*) = -1.$$

- (в)

$$F'(x_*) = +1.$$

75. Как ведет себя орбита линейного отображения

$$x_{k+1} = x_k + 2,$$

начинающаяся в точке $x_0 \in \mathbb{R}$?

- (а) Уходит в $+\infty$.
- (б) Уходит в $-\infty$.
- (в) Уходит в $+\infty$ или в $-\infty$ в зависимости от знака x_0.

76. Для двумерного отображения

$$x_{k+1} = y_k; \quad y_{k+1} = 1 - ax_k^2 + by_k$$

найдите неподвижные точки, след τ и определитель δ матрицы Якоби как функции параметров a и b. Запишите условие бифуркации Неймарка-Сакера.

- 1. $x_* = y_* = -\dfrac{1}{2a}\left(b - 1 \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}\right)$, $\delta = -b$, $\tau = b - 1 \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}$. Условие бифуркации Неймарка-Сакера $\delta = 1$.
- 2. $x_* = y_* = \dfrac{1}{2a}\left(1 - b \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}\right)$, $\delta = b$, $\tau = 1 - b \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}$. Условие бифуркации Неймарка-Сакера $\delta = 1$;
- 3. $x_* = y_* = -\dfrac{1}{2a}\left(b - 1 \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}\right)$, $\delta = -b$, $\tau = -b + 1 \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}$. Условие бифуркации Неймарка-Сакера $1 - \tau + \delta = 0$;

77. Найдите неподвижную точку и отвечающий ей мультипликатор для отображения

$$x_{k+1} = ax_k - x_k^3 \equiv f(a, x_k).$$

Используя этот результат, найдите порог бифуркации удвоения периода (flip) для симметричной неподвижной точки, которая возникает через вилообразную бифуркацию. Определите устойчивость симметричной неподвижной точки в точке бифуркации удвоения периода. Здесь «порог бифуркации», «точка бифуркации» – бифуркационное значение параметра.

78. Определите устойчивость негиперболической неподвижной точки x_* отображения

$$x_{k+1} = 1 - 0.75x_k^2 \equiv F(x_k).$$

79. Какая бифуркация реализуется в кусочно-линейном отображении

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu, & x \leqslant 0; \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

если $a_{\mathcal{L}} = 0.4$ и $a_{\mathcal{R}} = -1.5$?

80. Дано отображение

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \mathrm{e}^{\lambda}(x - 1 + \gamma) - \gamma + \mathrm{e}^{\lambda(1-z)}, \quad \varphi(z, x) = x + q \cdot \left(\frac{z}{\alpha} - 1\right) = 0.$$

Получите уравнение периодов для расчета неподвижной точки.

81. Пусть дано отображение $x_{k+1} = f(x_k)$, имеющее неподвижную точку x_* с мультипликатором $f'(x_*) = -1$. Чему равна $F'''(x_*)$, где $F(x) =$

$f(f(x))$?

82.Найдите неподвижные точки отображения

$$x_{k+1} = \frac{ax_k}{\sqrt{1+x_k^2}}.$$

83. Найдите мультипликаторы неподвижных точек x_* отображения

$$x_{k+1} = \frac{4-x_k^2}{4} \equiv F(x_k).$$

85. Как ведет себя орбита линейного отображения

$$x_{k+1} = x_k - 1,$$

начинающаяся в точке $x_0 \in \mathbb{R}$?

85. Какова скорость завершения переходного процесса в зависимости от величины мультипликатора $F'(x_*)$ устойчивой неподвижной точки x_* отображения $x \mapsto F(x)$?

86. Для отображения

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad F(a,x) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}} = a \cdot x^{1-1/b} & , \quad 0 < x < 1; \\ F_{\mathcal{R}} = \dfrac{a \cdot x}{1+\mu \cdot (x-1)} & , \quad x \geqslant 1, \end{cases}$$

$$\mu = \left(1 - \frac{1}{b}\right)^{1-b}$$

получите нормальную форму в виде кусочно-линейного отображения. Здесь $a > 0$ – варьируемый параметр, $b > 1$ – фиксированный параметр.

87.Найдите неподвижную точку x_* линейного отображения

$$x \mapsto ax - 2.$$

- (a) $x_* = 2/(1-a)$.

- (б) $x_* = 2/(a+1)$.
- (в) $x_* = 2/(a-1)$.

88. Определите устойчивость неподвижной точки линейного отображения

$$x_{k+1} = -0.98x_k + 1.2.$$

- (а) Устойчива.
- (б) Неустойчива.
- (в) Нейтральна.

89. Определите устойчивость негиперболической неподвижной точки x_* отображения

$$x_{k+1} = 0.75 - x_k^2 \equiv F(x_k).$$

- (а) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = +1$; полуустойчивая.
- (б) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = +1$; устойчивая.
- (в) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = -1$; устойчивая.
- (г) x_* — неподвижная точка является гиперболической.
- (д) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = -1$; неустойчивая.
- (е) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = +1$; неустойчивая.

90. Определите характер переходного процесса в линейном отображении

$$x_{k+1} = 0.5x_k - 2.5.$$

- (а) переходный процесс затухает монотонно:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0.$$

- (б) переходный процесс затухает колебательно:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0.$$

- (в) наблюдаются незатухающие колебания.

91. Точка $x_* \in \mathbb{R}$ отображения $x \mapsto F(x)$ является неподвижной, если

- (а)

$$F(x_*) - x_* = 0 \quad F^m(x_*) - x_* \neq 0.$$

- (б)

$$F(x_*) - x_* = 0 \quad F^m(x_*) - x_* = 0.$$

- (в)

$$F(x_*) - x_* \neq 0 \quad F^m(x_*) - x_* = 0.$$

.

Здесь

$$F^m x_0) = \underbrace{F(F(\dots F(x_0)\dots))}_{m \text{ раз}}.$$

92. Какая бифуркация реализуется в кусочно-линейном отображении

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu, & x \leqslant 0; \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

если $a_{\mathcal{L}} = 0.6$ и $a_{\mathcal{R}} = -1.25$?

- (а) «border-collision» fold.
- (б) «border-collision» flip.
- (в) «border-collision» persistence.

93. Дано отображение

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \mathrm{e}^{\lambda}(x - 1 + \gamma) - \gamma + \mathrm{e}^{\lambda(1-z)}, \quad \varphi(z, x) = x + \frac{q \cdot z}{\alpha} - q = 0.$$

Найдите первую производную $F'(x)$ для расчета мультипликатора неподвижной точки.

- (а)
$$F'(x) = \mathrm{e}^{\lambda} + \gamma + \frac{q \cdot \alpha}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda(1-z)}.$$
- (б)
$$F'(x) = \mathrm{e}^{\lambda} - \gamma + \frac{\lambda \cdot \alpha}{q \cdot \mathrm{e}^{\lambda(1-z)}}.$$
.
- (в)
$$F'(x) = \mathrm{e}^{\lambda} + \frac{\lambda \cdot \alpha}{q}\mathrm{e}^{\lambda(1-z)}.$$
.

94. Дано отображение $x \mapsto 1 - 3x^2/4)$, имеющее неподвижную точку x_* с мультипликатором $f'(x_*) = -1$. Чему равна $F'(x_*)$, где $F(x) = f(f(x))$?

- 1. $F'(x_*) = +1$;
- 2. $F'(x_*) = 0$;
- 3. $F'(x_*) = -1$.

95. Для отображения

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad F(a, x) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}} = a \cdot x^{\gamma} & , \quad 0 < x < 1; \\ F_{\mathcal{R}} = \dfrac{a \cdot x}{1 + \theta \cdot (x - 1)} & , \quad x \geqslant 1, \end{cases}$$
$$\theta = \gamma^{1-b}$$

получите нормальную форму в виде кусочно-линейного отображения.

Здесь $a > 0$ – варьируемый параметр, γ – фиксированный параметр.

96. Какая бифуркация реализуются в точке $a = 2.0$ в отображении $x \mapsto ax - x^3 \equiv F(a, x)$?

- (а) Касательная.
- (б) Транскритическая.
- (в) Удвоения периода.
- (г) Вилообразная.

97. Определите устойчивость негиперболической неподвижной точки x_* отображения

$$x_{k+1} = 3/4 - x_k^2 \equiv F(x_k).$$

- (а) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = +1$; полуустойчивая.
- (б) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = +1$; устойчивая.
- (в) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = -1$; устойчивая.
- (г) x_* — не существует негиперболической неподвижной точки.
- (д) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = -1$; неустойчивая.
- (е) x_* — негиперболическая с мультипликатором $F'(x_*) = +1$; неустойчивая.

98. Какая бифуркация реализуется в кусочно-линейном отображении

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \begin{cases} a_{\mathcal{L}} x + \mu, & x \leqslant 0; \\ a_{\mathcal{R}} x + \mu, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

если $a_{\mathcal{L}} = 0.3$ и $a_{\mathcal{R}} = -1.1$?

- (а) «border-collision» fold.
- (б) «border-collision» flip.
- (в) «border-collision» persistence.

99. Дано отображение

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \mathrm{e}^{\lambda}(x-1) + \mathrm{e}^{\lambda(1-z)}, \quad \varphi(z,x) = q - 1 - (x-1)\mathrm{e}^{\lambda z} - \frac{q}{\alpha}z = 0.$$

Найдите первую производную $F'(x)$ для расчета мультипликатора неподвижной точки.

- (а)

$$F'(x) = \mathrm{e}^{\lambda} - \frac{\lambda \mathrm{e}^{\lambda}}{\lambda \mathrm{e}^{\lambda z}(x-1) + \dfrac{q}{\alpha}}.$$

- (б)

$$F'(x) = \mathrm{e}^{\lambda} + \frac{\mathrm{e}^{\lambda}}{\lambda \mathrm{e}^{\lambda z}(x-1) - \dfrac{q}{\alpha}}.$$

.

- (в)

$$F'(x) = \mathrm{e}^{\lambda} + \frac{\mathrm{e}^{\lambda}}{\mathrm{e}^{\lambda z}(x-1) + \dfrac{q}{\alpha\lambda}}.$$

100. Пусть дано отображение $x_{k+1} = 3/4 - x_k^2 \equiv f(x_k)$, имеющее неподвижную точку x_* с мультипликатором $f'(x_*) = -1$. Чему равна $F''(x_*)$, где $F(x) = f(f(x))$?

- 1. $F''(x_*) = +1$;
- 2. $F''(x_*) = 0$;
- 3. $F''(x_*) = 2Sf(x_*)$, где Sf – производная Шварца функции f.

Шкала оценивания результатов тестирования: в соответствии с действующей в университете балльно-рейтинговой системой оценивание результатов промежуточной аттестации обучающихся осуществляется в рамках 100-балльной шкалы, при этом максимальный балл по промежуточной аттестации обучающихся по очной форме обучения составляет 36 баллов, по очно-заочной и заочной формам обучения- 60 баллов (установлено положением П 02.016).

Максимальный балл за тестирование представляет собой разность двух чисел: максимального балла по промежуточной аттестации для данной формы обучения (36 или 60) и максимального балла за решение компетентностно-ориентированной задачи (6).

Балл, полученный обучающимся за тестирование, суммируется с баллом, выставленным ему за решение компетентностно-ориентированной задачи. Общий балл по промежуточной аттестации суммируется с баллами, полученными обучающимся по результатам текущего контроля успеваемости в течение семестра; сумма баллов переводится в оценку по дихотомической шкале следующим образом:

Соответствие 100 бальной и дихотомический шкал

Оценка по 100-балльной шкале	Оценка по дихотомической шкале
100-50	зачтено
49 и менее	не зачтено

2.3 КОМПЕТЕНТНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ

Компетентностно-ориентированная задача №1.

Найдите порог бифуркации Андронова-Хопфа в осцилляторе Гудвина

$$\frac{dx}{dt} = -b_1 x + \varphi(z), \quad \frac{dy}{dt} = -b_2 y + g_1 x, \tag{1}$$
$$\frac{dz}{dt} = -b_3 x + g_2 y, \quad \varphi(z) = \frac{a}{1 + K z^n}$$

при вариации $0.2 < b_1 < 0.8$. Остальные параметры: $b_2 = 0.5$, $b_3 = 0.3$, $g_1 = 2.0$, $g_2 = 0.5$, $a = 100$, $K = 0.1$, $n > 8$.

Компетентностно-ориентированная задача №2.

Рассмотрите систему Рёсслера

$$\frac{dx}{dt} = -y - z, \quad \frac{dy}{dt} = x + ay, \tag{2}$$
$$\frac{dz}{dt} = b + (x - c)z, \quad a = 0.2, \quad b = 0.2, \quad 2 < c < 5.$$

Определите порог рождения предельного цикла из состояния равновесия при вариации c.

Компетентностно-ориентированная задача №3.
Дано отображение

$$x_{k+1} = \frac{a \cdot x_k^2}{1 + x_k^2} \equiv f(x_k), a > 0.$$

Найдите неподвижную точку x_* и отвечающий ей мультипликатор $f'(x_*)$. Используя этот результат, определите значения параметра a при которых неподвижная точка неустойчива либо полу-устойчива слева или справа.

Компетентностно-ориентированная задача №4.
Дано отображение

$$x_{k+1} = \frac{(1 + a) \cdot x_k}{1 + a \cdot x_k} \equiv f(x_k).$$

Найдите неподвижную точку x_* и отвечающий ей мультипликатор $f'(x_*)$. Используя этот результат, определите значения параметра a при которых неподвижная точка асимптотически устойчива.

Компетентностно-ориентированная задача №5.
Рассмотрите отображение

$$x_{k+1} = 1 - a \cdot x_k^2 \equiv f(x_k).$$

Найдите неподвижную точку x_* и отвечающий ей мультипликатор $f'(x_*)$. Используя этот результат, определите значения параметра a при которых неподвижная точка устойчива.

Компетентностно-ориентированная задача №6.
Для заданного отображения

$$x_{k+1} = (1 + a) \cdot x_k - x_k^3 \equiv f(x_k)$$

найдите неподвижную точку x_* и отвечающий ей мультипликатор $f'(x_*)$. Используя этот результат, определите значения параметра a при которых неподвижная точка устойчива.

Компетентностно-ориентированная задача №7.
Дано отднмерное отображение

$$x_{k+1} = (1+a) \cdot x_k + x_k^3 \equiv f(x_k).$$

Найдите неподвижную точку x_* и отвечающий ей мультипликатор $f'(x_*)$. Используя этот результат, определите значения параметра a при которых неподвижная точка становится негиперболической.

Компетентностно-ориентированная задача №9.

Найдите неподвижные точки и отвечающие им мультипликаторы отображения

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$$
$$F(a, x) = a - x^2.$$

Здесь a – параметр. Используя этот результат, выполните качественный анализ касательной бифуркации и бифуркации удвоения периода.

Компетентностно-ориентированная задача №10.

Постройте график функции

$$\mathrm{g}(a, x) = F(F(a, x)), F(a, x) = a + 1 - x^2$$

при различных значениях параметра a. Опишите трансформацию графиков $\mathrm{g}(a, x)$ и $F(a, x)$ в окрестности точки бифуркации удвоения периода неподвижной точки отображения:

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad F(a, x) = a + 1 - x^2.$$

Укажите элементы цикла с периодом 2 после бифуркации на графике дважды проитерированной функции $\mathrm{g}(a, x) = F(F(a, x))$.

Компетентностно-ориентированная задача №11.
Покажите, что если отображение

$$x_{k+1} = F(x_k)$$

имеет негиперболическую неподвижную точку x_* с мультипликатором -1:

$$F'(x_*) = -1,$$

то вторая итерация этого отображения

$$\mathrm{g}(x_*) = F(F(x_*))$$

обладает следующими свойствами:

- $\mathrm{g}'(x_*) = +1$;
- $\mathrm{g}''(x_*) = 0$;
- $\mathrm{g}'''(x_*) = 2SF(x_*)$, где

$$SF(x) = \frac{F'''(x)}{F'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{F''(x)}{F'(x)}\right]^2$$

– производная Шварца.

Компетентностно-ориентированная задача №12.

Найдите значения параметра a, отвечающие касательной бифуркации и бифуркации удвоения периода неподвижной точки отображения

$$x_{k+1} = a - x_k^4.$$

Компетентностно-ориентированная задача №13.

Найдите значение параметра a для суперкритической вилообразной бифуркации неподвижной точки отображения

$$x_{k+1} = ax_k - x_k^3.$$

Изобразите итерационные диаграммы до, в точке и после бифуркации.

Компетентностно-ориентированная задача №14.

Найдите значение параметра a для субркритической вилообразной бифуркации неподвижной точки отображения

$$x_{k+1} = ax_k + x_k^3.$$

Изобразите итерационные диаграммы до, в точке и после бифуркации.

Компетентностно-ориентированная задача №15.

Для отображения

$$x_{k+1} = \alpha - x_k^2 + \beta y_k; \quad y_{k+1} = x_k$$

найдите

- ∘ уравнение для неподвижных точек;
- ∘ матрицу Якоби;
- ∘ след τ матрицы Якоби;
- ∘ определитель δ матрицы Якоби.

Определите линию седло-узловой (saddle-node, fold) бифуркации.

Компетентностно-ориентированная задача №16.

Для отображения

$$x_{k+1} = \alpha - x_k^2 + \beta y_k; \quad y_{k+1} = x_k$$

найдите

- ∘ уравнение для неподвижных точек;
- ∘ матрицу Якоби;
- ∘ след τ матрицы Якоби;
- ∘ определитель δ матрицы Якоби.

Определите линию бифуркации удвоения периода (period-doubling, flip).

Компетентностно-ориентированная задача №17.

Для отображения

$$x_{k+1} = y_k; \quad y_{k+1} = \beta y_k - \alpha x_k + x_k^2.$$

найдите

- ∘ уравнение для неподвижных точек;
- ∘ матрицу Якоби;
- ∘ след τ матрицы Якоби;
- ∘ определитель δ матрицы Якоби.

Определите

- ∘ линию седло-узловой (saddle-node, fold) бифуркации;
- ∘ линию бифуркации удвоения периода (period-doubling, flip);

Компетентностно-ориентированная задача №18.

Для отображения

$$x_{k+1} = \alpha x_k + y_k; \quad y_{k+1} = \beta x_k + x_k^3.$$

найдите

- ∘ уравнение для неподвижных точек;
- ∘ неподвижные точки как функции параметров α, β;
- ∘ матрицу Якоби;
- ∘ след τ матрицы Якоби;
- ∘ определитель δ матрицы Якоби.
- ∘ мультпликаторы как функции параметров α, β;

Определите линию седло-узловой (saddle-node, fold) бифуркации.

Компетентностно-ориентированная задача №19.

Для отображения

$$x_{k+1} = \alpha x_k + y_k; \quad y_{k+1} = \beta x_k + x_k^3.$$

найдите

- ∘ уравнение для неподвижных точек;
- ∘ неподвижные точки как функции параметров α, β;
- ∘ матрицу Якоби;
- ∘ след τ матрицы Якоби;
- ∘ определитель δ матрицы Якоби.
- ∘ мультпликаторы как функции параметров α, β;

Определите линию бифуркации удвоения периода (period-doubling, flip).

Компетентностно-ориентированная задача №20.

Для двумерного отображения

$$x_{k+1} = a - x_k^2 - by_k \equiv f_1(x_k, y_k);$$
$$y_{k+1} = x_k \equiv f_2(x_k, y_k)$$

найдите элементы 2-цикла как функции параметров a, b. Определите мультипликатор 2-цикла, для чего найдите матрицу монодромии, вычислите след S и определитель этой матрицы. Найдите аналитическое выражение для линии бифуркации удвоения периода 2-цикла как функцию параметров a, b.

Компетентностно-ориентированная задача №21.

Для двумерного отображения

$$x_{k+1} = 1 - ax_k^2 - by_k \equiv f_1(x_k, y_k);$$
$$y_{k+1} = x_k \equiv f_2(x_k, y_k)$$

найдите элементы 2-цикла как функции параметров a, b. Определите мультипликатор 2-цикла, для чего найдите матрицу монодромии, вычислите след S и определитель этой матрицы. Найдите аналитическое выражение для линии бифуркации удвоения периода 2-цикла как функцию параметров a, b.

Компетентностно-ориентированная задача №22.

Найдите границу бифуркации Неймарка-Сакера для неподвижной точки двумерного отображения

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 - ay^2 + bx \\ x \end{pmatrix}.$$

Компетентностно-ориентированная задача №23.

Для тривиальной неподвижной точки отображения

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + y \\ bx + x^3 \end{pmatrix}.$$

найдите линию седло-узловой бифуркации.

Компетентностно-ориентированная задача №24.

Получите характеристическое уравнение для анализа локальной устойчивости 2-цикла отображения

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 - ax^2 - y \\ bx \end{pmatrix}.$$

в форме явной зависимости от параметров.

Компетентностно-ориентированная задача №25.

Найдите уравнение линии бифуркации удвоения периода 2-цикла отображения

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 - ax^2 - y \\ bx \end{pmatrix}.$$

Шкала оценивания решения компетентностно-ориентированной задачи: в соответствии с действующей в университете балльно-рейтинговой системой оценивание результатов промежуточной аттестации обучающихся осуществляется в рамках 100-балльной шкалы, при этом максимальный балл по промежуточной аттестации обучающихся по очной форме обучения составляет 36 баллов, по очно-заочной и заочной формам обучения - 60 (установлено положением П 02.016). Максимальное количество баллов за решение компетентностно-ориентированной задачи - 6 баллов. Балл, полученный обучающимся за решение компетентностно-ориентированной задачи, суммируется с баллом, выставленным ему по результатам тестирования. Общий балл промежуточной аттестации суммируется с баллами, полученными обучающимся по результатам текущего контроля успеваемости в течение семестра; сумма баллов переводится в оценку по дихотомической шкале:

Соответствие 100 бальной и дихотомической шкал

Оценка по 100-балльной шкале	Оценка по дихотомической шкале
100-50	зачтено
49 и менее	не зачтено

Критерии оценивания решения компетентностно-ориентированной задачи (нижеследующие критерии оценки являются примерными и могут корректироваться): 6-5 баллов выставляется обучающемуся, если решение задачи демонстрирует глубокое понимание обучающимся предложенной проблемы и разностороннее ее рассмотрение; свободно конструируемая работа представляет собой логичное, ясное и при этом краткое, точное описание хода решения задачи (последовательности (или выполнения) необходимых трудовых действий) и формулировку доказанного, правильного вывода (ответа); при этом обучающимся предложено несколько вариантов решения или оригинальное, нестандартное решение (или наиболее эффективное, или наиболее рациональное, или оптимальное, или единственно правильное решение); задача решена в установленное преподавателем время или с опережением времени. 4-3 балла выставляется обучающемуся, если решение задачи демонстрирует понимание обучающимся предложенной проблемы; задача решена типовым способом в установленное преподавателем время; имеют место общие фразы и (или) несущественные недочеты в описании хода решения и (или) вывода (ответа). 2-1 балла выставляется обучающемуся, если решение задачи демонстрирует поверхностное понимание обучающимся предложенной проблемы; осуществлена попытка шаблонного решения задачи, но при ее решении допущены ошибки и (или) превышено установленное преподавателем время. 0 баллов выставляется обучающемуся, если решение задачи демонстрирует непонимание обучающимся предложенной проблемы, и (или) значительное место занимают общие фразы и голословные рассуждения, и (или) задача не решена.