

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)**

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ:



Первый проректор –
проректор по учебной работе
Е.А.Кудряшов
2011г.

Определенный интеграл

Методические указания и индивидуальные
задания к модулю №8

Курск 2011

УДК 510 (083)

Составитель Л.И.Студеникина

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры
высшей математики *Е.В.Журавлева*

Определенный интеграл. Методические указания и индивидуальные задания к М-8 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Л.И.Студеникина. Курск, 2011. 32 с. табл. 8. Библиогр.: с. 32

Представлены индивидуальные задания, состоящие из теоретических упражнений и практических заданий к модулю для студентов экономических специальностей, обучающихся по системе интенсивной рейтинговой технологии модульного обучения. Работа содержит примеры выполнения наиболее сложных заданий.

Работа предназначена для студентов экономических специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _____. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. _____. Уч.-изд. л. _____. Тираж 50 экз. Заказ. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Введение.....	4
1. Теоретические упражнения.....	5
2. Индивидуальные задания.....	9
Задание 1.....	9
Задание 2.....	11
Задание 3.....	13
Задание 4.....	15
Задание 5.....	17
Задание 6.....	19
Задание 7.....	21
Задание 8.....	23
Задание 9.....	25
Задание 10.....	25
3. Образцы выполнения заданий.....	27
Библиографический список	32

Введение

Важным фактором изучения вузовского математического курса является самостоятельная работа студентов. Одна из форм организации самостоятельной работы – система рейтинговой интенсивной технологии модульного обучения.

Опыт показывает, что данная система активизирует самостоятельную работу студентов, способствует повышению общего уровня математической культуры. Предлагаемая методическая разработка является одним из блоков в модульно-рейтинговой системе дисциплины «Математика».

Студентам предлагается выполнить в соответствии со своим вариантом 10 задач. Задания №1-3,7 – первого уровня сложности, 4-6, 8 – второго уровня. В 9-ом задании выбрать N как номер группы в потоке. Ряд заданий способствует развитию навыков в применении методологии и методов количественного и качественного анализа с использованием экономико-математического аппарата. Перед решением индивидуальных заданий следует ответить на теоретические вопросы и выполнить упражнения.

В ходе подготовки к защите выполненной работы, следует обратиться к дополнительной литературе, которая приведена в библиографическом списке.

Желаем успеха!

1 Теоретические упражнения

Упражнение 1

Установить последовательность действий при вычислении площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$) осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$.

1. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i .
2. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей системой точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
3. Вычислим произведение $f(\xi_i) \Delta x_i$.
4. Найдем значение функции $f(\xi_i)$.

5. Вычислим предел $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} I_n = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$.

6. Составим интегральную сумму $I_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$.

7. Если существует конечный предел не зависящий от способа деления отрезка на части и выбора точки ξ_i , то его значение численно равно искомой площади криволинейной трапеции.

Упражнение 2

Достаточным условием интегрируемости функции является

-
- 1) неотрицательность
 - 2) кусочная непрерывность
 - 3) монотонность
 - 4) ограниченность

Упражнение 3

Формула Ньютона-Лейбница имеет вид _____

$$1) \int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$$

$$2) \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$3) \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) + C$$

$$4) \int_a^b f(x)dx = F(x) + C$$

Упражнение 4

Некорректно записано свойство определенного интеграла

№ _____

$$1) \int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$2) \int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx, A = \text{const}$$

$$3) \int_a^a f(x)dx = 0, \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$4) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \text{ для } c \in [a, b]$$

$$5) \text{ Если } f(x) \leq g(x) \text{ на } [a, b], \text{ то } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

6) Если на $[a, b]$ выполнено неравенство $m \leq f(x) \leq M$, где m - наименьшее значение, M - наибольшее значение функции

$$y = f(x) \text{ на } [a, b], \text{ то } m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

7) Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$$

8) Определенный интеграл не зависит от переменной интегрирования.

Упражнение 5

Продолжите формулировку теоремы.

Пусть $u(x)$, $v(x)$ – две непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[a, b]$, тогда справедлива формула интегрирования

по частям: $\int_a^b u dv = \underline{\hspace{2cm}}$

$$1) uv \Big|_a^b + \int_a^b v du$$

$$2) \int_a^b v du - uv \Big|_a^b$$

$$3) uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$4) uv - \int v du$$

Упражнение 6

Выбрать правильное утверждение.

Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на некотором отрезке $[a, b]$. Пусть $x=\varphi(t)$, дифференцируемая монотонная функция на

$[\alpha; \beta]$, причем $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, тогда $\int_a^b f(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$

$$1) \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

$$2) \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \varphi'(t))dt$$

$$3) \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \cdot \varphi(t)dt$$

$$4) \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \cdot \varphi'(t)dt$$

Упражнение 7

Вставьте пропущенные слова в определениях.

а) Функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема на каждом конечном отрезке $[a, b]$, где $a < b$.

Выражение $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$ называется _____.

Если данный предел _____ и _____, то говорят, что _____ сходится, в противном случае _____.

б) Пусть неограниченная функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[a, b)$ и интегрируема на любом отрезке $[a, c]$, где $a < c < b$.

Выражение $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x)dx$ называется _____

функции $f(x)$ на промежутке $[a, b)$. Если данный предел существует и конечен, то говорят, что _____ интеграл _____ и равен

$\lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x)dx$; в противном случае он _____.

Упражнение 8

Установить соответствие.

<ol style="list-style-type: none"> 1. Площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными параметрически. 2. Площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в декартовых координатах. 3. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах. 4. Длина дуги кривой в декартовых координатах. 5. Длина дуги кривой заданной параметрически. 6. Длина дуги кривой в полярных координатах. 	<ol style="list-style-type: none"> а) $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi$ б) $\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$ в) $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$ г) $\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t) dt$ д) $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$ е) $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ ж) $\pi \int_a^b y(x) dx$
--	--

2. Индивидуальные задания

Задание 1. Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Таблица 2.1

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	2	3	4
1	$\int_1^2 \left(\frac{x^2 + 1}{x} + \cos x \right) dx$	2	$\int_1^3 \left(\frac{(x+2)^2}{x^3} + \sin x \right) dx$
3	$\int_1^4 \left(\frac{x^3 + x - 5}{x} - e^{2x} \right) dx$	4	$\int_1^2 \left(5^{2x} + \frac{x^4 + 2}{x} \right) dx$
5	$\int_0^1 \left(\frac{3}{4 + x^2} + \cos 3x \right) dx$	6	$\int_2^4 \left(\frac{5}{\cos^2 x} + \frac{x^3 - 2}{x} \right) dx$
7	$\int_2^5 \left(\frac{4}{\sin^2 x} - \frac{x^3 - 1}{x - 1} \right) dx$	8	$\int_0^1 (4 \sin x + e^{3x+2} + 6) dx$
9	$\int_1^2 \frac{(3\sqrt[3]{x} + 2)^2}{\sqrt[3]{x}} dx$	10	$\int_1^2 \left(\frac{x^6 - 3}{x} + 4^{2x+1} \right) dx$
11	$\int_{-2}^{-1} \left(2 \cos(3x - 1) + e^{5x} + \frac{1}{2x} \right) dx$	12	$\int_1^2 \left(7^{6x} + \frac{x^4 - x + 5}{x^2} \right) dx$
13	$\int_1^2 \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + x} - e^{4x} \right) dx$	14	$\int_1^3 \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx$
15	$\int_0^1 ((2x^2 + 1)(2 - x^3) + \cos 3x) dx$	16	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$
17	$\int_2^3 \left(\frac{x^3 - x + 2}{x^2 - 1} + \sin 4x \right) dx$	18	$\int_1^2 \left(\frac{2x^3 + x + 5}{x} - \sin x \right) dx$

1	2	3	4
19	$\int_1^2 \left(\frac{5}{x} - e^{2x+1} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$	20	$\int_1^9 \left(\frac{x^{3/2} + x + 5}{x} + \cos 2x \right) dx$
21	$\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{1 + x^2} dx$	22	$\int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^2} dx$
23	$\int_1^2 e^x \left(2 - \frac{e^{-x}}{x^3} \right) dx$	24	$\int_0^2 \frac{2^x + 5^x}{10^x} dx$
25	$\int_2^4 e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx$	26	$\int_1^3 4x \left(3 + \frac{1}{2x^2} \right) dx$
27	$\int_0^2 \left(2^x e^x + \frac{1}{1 + x^2} + x^3 \right) dx$	28	$\int_2^3 \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} dx$
29	$\int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - x + 5}{x} dx$	30	$\int_1^2 \frac{(\sqrt{x} - 1)^3}{x} dx$
31	$\int_0^2 \left(\frac{1}{5 + 4x} + \sin(1 + 2x) \right) dx$	32	$\int_1^4 \left(e^{2x-1} + \frac{1}{4x-2} \right) dx$
33	$\int_0^1 \left(\sqrt[3]{1+x} + \frac{6}{1+3x} \right) dx$	34	$\int_0^1 \left(\frac{1}{(2+x)^3} + \cos 2x \right) dx$
35	$\int_1^2 \left(e^{3x-5} + \frac{x^4 + 2x^3 + x + 6}{x} \right) dx$	36	$\int_0^1 (5^{1-2x} - \sin(1 - 4x)) dx$

Задание 2. Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Таблица 2.2

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	2	3	4
1	$\int_0^8 \frac{dx}{1 + \sqrt{6x + 1}}$	2	$\int_0^1 \frac{xdx}{1 + \sqrt{5x + 1}}$
3	$\int_2^3 \frac{xdx}{1 - \sqrt{4x + 1}}$	4	$\int_1^2 \frac{dx}{5 + \sqrt{3x - 1}}$
5	$\int_2^3 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x - 1}}$	6	$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x + 1}}$
7	$\int_6^7 \frac{2x^2 dx}{\sqrt{x - 5}}$	8	$\int_{-1}^1 \frac{3xdx}{\sqrt{x + 4}}$
9	$\int_2^3 \frac{2dx}{\sqrt[6]{x^5} - \sqrt[4]{x^3}}$	10	$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{1 + 7x} - 6}$
11	$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{6\sqrt{x} + 4} dx$	12	$\int_0^4 \frac{dx}{2 + \sqrt{6x + 1}}$
13	$\int_1^2 \frac{xdx}{1 - \sqrt{3x + 1}}$	14	$\int_1^2 \frac{xdx}{1 - \sqrt{7x + 1}}$
15	$\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$	16	$\int_0^7 \frac{dx}{1 + \sqrt{5x + 1}}$
17	$\int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{8x + 1}}$	18	$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$
19	$\int_1^3 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x - 1}}$	20	$\int_1^2 \frac{xdx}{1 - \sqrt{6x + 1}}$

1	2	3	4
21	$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$	22	$\int_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx$
23	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$	24	$\int_2^9 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}$
25	$\int_0^1 \frac{dx}{3+\sqrt{9x+1}}$	26	$\int_0^2 \frac{dx}{4+\sqrt{6x+2}}$
27	$\int_2^3 \frac{dx}{x+3\sqrt{x-1}}$	28	$\int_0^1 \frac{dx}{6+\sqrt{7x+1}}$
29	$\int_0^2 \frac{dx}{10+\sqrt{12x+1}}$	30	$\int_2^{10} \frac{dx}{x+6\sqrt{x-1}}$
31	$\int_1^4 \frac{x dx}{1-\sqrt{6x+1}}$	32	$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x}+3}$
33	$\int_1^3 \frac{dx}{4+\sqrt{11x+5}}$	34	$\int_0^2 \frac{6 dx}{12+\sqrt{3x+1}}$
35	$\int_2^5 \frac{dx}{x+4\sqrt{x-1}}$	36	$\int_0^1 \frac{dx}{2+\sqrt{5x+1}}$

Задание 3. Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Таблица 2.3

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	2	3	4
1	$\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 4}$	2	$\int_0^1 (3x + 7)^{10} dx$
3	$\int_1^2 \frac{\ln^3 x}{x} dx$	4	$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^4 x dx}{1 + x^2}$
5	$\int_0^1 \frac{\operatorname{tg}^8 x}{\cos^2 x} dx$	6	$\int_1^2 \frac{3x^2 dx}{x^3 + 5}$
7	$\int_0^{1/2} \frac{\arccos^3 x - 2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$	8	$\int_1^2 \frac{2 + \ln x}{x} dx$
9	$\int_0^1 \frac{x dx}{x^4 + 1}$	10	$\int_0^1 \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^3 + 3x + 1)}$
11	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg}^2 x + x}{1 + x^2} dx$	12	$\int_1^3 \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx$
13	$\int_2^3 \frac{1 + \ln(x - 1)}{x - 1} dx$	14	$\int_0^1 x e^{x^2 + 1} dx$
15	$\int_{2,5}^3 (2x - 5)^{17} dx$	16	$\int_1^2 \frac{\operatorname{ctg}^{10} x}{\sin^2 x} dx$
17	$\int_1^2 x^2 5^{x^3 - 1} dx$	18	$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx$
19	$\int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx$	20	$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx$

1	2	3	4
21	$\int_0^1 x^3 \sqrt{4+5x^4} dx$	22	$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$
23	$\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\pi^2} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$	24	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{1+x^6}$
25	$\int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	26	$\int_0^1 (2x+3) \cos(x^2+3x+1) dx$
27	$\int_1^2 \frac{\ln^2 x + x^3}{x} dx$	28	$\int_{-1}^0 \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx$
29	$\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$	30	$\int_{-1}^0 \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx$
31	$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx$	32	$\int_0^{12\sqrt{3}} \frac{12x^5 dx}{\sqrt{x^6+1}}$
33	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$	34	$\int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx$
35	$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x \sqrt{1-\ln^2 x}}$	36	$\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} 12 \operatorname{ctg} 3x dx$

Задание 4. Вычислить интеграл, используя формулу интегрирования по частям.

Таблица 2.4

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	2	3	4
1	$\int_{-2}^0 (x^2 + 5x + 6)\cos 2x dx$	2	$\int_{-3}^0 (x + 3)\sin 4x dx$
3	$\int_1^2 x e^x dx$	4	$\int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1)\sin 3x dx$
5	$\int_1^2 (4 - 3x)e^{-3x} dx$	6	$\int_0^1 (4x + 3)\cos 2x dx$
7	$\int_1^2 \arctg \sqrt{4x - 1} dx$	8	$\int_0^1 (3x + 4)e^{3x} dx$
9	$\int_1^2 \arctg \sqrt{2x - 1} dx$	10	$\int_1^3 \ln(2x + 3) dx$
11	$\int_0^\pi (6x - 10)\sin 2x dx$	12	$\int_0^1 (x + 1)\ln(x + 1) dx$
13	$\int_{-1}^0 \arcsin (x + 1) dx$	14	$\int_0^1 \ln(x^2 + 4) dx$
15	$\int_0^2 (1 - 6x)\cos x dx$	16	$\int_0^{\frac{1}{9}} \arccos (9x - 1) dx$
17	$\int_1^2 \frac{x dx}{\cos^2 x}$	18	$\int_1^2 \frac{x dx}{\sin^2 x}$
19	$\int_2^4 x \sin^2 x dx$	20	$\int_1^3 \arctg 2x dx$

1	2	3	4
21	$\int_0^{\pi/9} \frac{x dx}{\cos^2 3x}$	22	$\int_{1/2}^1 \arcsin(1-x) dx$
23	$\int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx$	24	$\int_{-1}^0 x \ln(1-x) dx$
25	$\int_1^2 \ln(4+5x) dx$	26	$\int_{-1}^0 (x+1)e^{-2x} dx$
27	$\int_0^1 \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$	28	$\int_0^{\pi/2} (x+2) \cos \frac{x}{2} dx$
29	$\int_2^3 x \ln(x-1) dx$	30	$\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$
31	$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx$	32	$\int_{-1/3}^{-2/3} \frac{x}{e^{3x}} dx$
33	$\int_{-2}^{-1} \ln(1-4x) dx$	34	$\int_0^1 (1-4x) \sin x dx$
35	$\int_0^{\pi} (2x+6) \cos x dx$	36	$\int_3^4 (x-3) \sin 2x dx$

Задание 5 . Вычислить несобственные интегралы, если они сходятся.

Таблица 2.5

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	2	3	4
1	$\int_{-1/2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 2}$	2	$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{16x^4 + 1}$
3	$\int_1^{+\infty} \frac{16xdx}{16x^4 - 1}$	4	$\int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3 + 8)^4}}$
5	$\int_0^{+\infty} \frac{\arctg 2x}{\pi(1 + 4x^2)} dx$	6	$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 3x + 6}$
7	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}$	8	$\int_{5/8}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2 - 5x + 4}$
9	$\int_{-2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 10}$	10	$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 + x - 6}$
11	$\int_{-0.2}^{+\infty} \frac{dx}{5x^2 + 2x + 7}$	12	$\int_4^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}$
13	$\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\pi(x^2 + 4x + 5)}$	14	$\int_{0.5}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1}$
15	$\int_{11/4}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 - 11x + 2}$	16	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 + x + 2}$
17	$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{3x^2 - 12x + 3}$	18	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(6x^2 - 5x + 1) \ln \frac{3}{4}}$
19	$\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$	20	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 + 3x}$

1	2	3	4
21	$\int_{\frac{1}{4}}^{+\infty} \frac{dx}{2x - 3 - 4x^2}$	22	$\int_5^{+\infty} \frac{dx}{3x^2 - 8x - 3}$
23	$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{8 - 2x - x^2}$	24	$\int_4^{+\infty} \frac{dx}{5x - x^2 - 6}$
25	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 25}$	26	$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 - 8x + 30}$
27	$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{3x^2 - 9x + 6}$	28	$\int_4^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 - 3x - 2}$
29	$\int_{1.5}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 - 6x + 1}$	30	$\int_{\frac{3}{4}}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 - 3x + 2}$
31	$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 - 3x + 1}$	32	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{5x^2 - 10x + 25}$
33	$\int_{-\frac{3}{4}}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 + 3x + 6}$	34	$\int_{-\frac{5}{6}}^{+\infty} \frac{dx}{3x^2 + 5x + 1}$
35	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 - 2x + 3}$	36	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{4x^2 - 2x + 7}$

Задание 6. Вычислить несобственные интегралы, если они сходятся

Таблица 2.6

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	2	3	4
1	$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$	2	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$
3	$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$	4	$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^4}}$
5	$\int_{-1/3}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$	6	$\int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$
7	$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$	8	$\int_{-3/4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$
9	$\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$	10	$\int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$
11	$\int_0^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$	12	$\int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^3}$
13	$\int_0^{1/3} \frac{dx}{(1-3x)^2}$	14	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
15	$\int_{-1}^0 \frac{dx}{(x+1)^2}$	16	$\int_{-1/5}^0 \frac{dx}{(1+5x)^2}$
17	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$	18	$\int_2^4 \frac{2dx}{(2-x)^2}$

1	2	3	4
19	$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$	20	$\int_{\frac{3}{2}}^4 \frac{dx}{(2x-3)^2}$
21	$\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{dx}{(1-3x)^2}$	22	$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$
23	$\int_{-6}^0 \frac{dx}{(x+6)^2}$	24	$\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{dx}{(1-4x)^3}$
25	$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$	26	$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$
27	$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$	28	$\int_0^2 \frac{dx}{(2-x)^3}$
29	$\int_0^4 \frac{dx}{(x-4)^5}$	30	$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$
31	$\int_1^6 \frac{dx}{(x-6)^{1/4}}$	32	$\int_0^3 \frac{5dx}{\sqrt{3-x}}$
33	$\int_0^7 \frac{dx}{(x-7)^{1/5}}$	34	$\int_0^2 \frac{dx}{(2-x)^2}$
35	$\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{dx}{\sqrt[7]{1-3x}}$	36	$\int_{-\frac{3}{5}}^0 \frac{dx}{(5x+3)^2}$

Задание 7. Построить фигуру, ограниченную линиями, найти ее площадь

Таблица 2.7

№	$y = f_1(x)$ $y = f_2(x)$	№	$y = f_1(x)$ $y = f_2(x)$
1	2	3	4
1	$y = x^2 - 4x + 3$ $y = x + 3$	2	$y = x^2 - 8x + 7$ $y = -5x + 5$
3	$y = x^2 + 4x$ $y = x + 4$	4	$y = 9x^2 + 6x + 1$ $y = -x + 1$
5	$y = (x - 2)^2$ $y = 4x - 8$	6	$y = -(x + 3)(x - 2)$ $y = x - 2$
7	$y = 3x - x^2$ $y = -x$	8	$y = 2x^2 - 4x + 1$ $y = 2x - 3$
9	$y = -x^2 - 8x + 1$ $y = -x - 2$	10	$y = x^2 - 2x$ $y = \frac{1}{2}x + 5$
11	$y = (x + 1)(x - 4)$ $y = 5x - 4$	12	$y = x^2 + 6x + 1$ $y = 2x + 1$
13	$y = 2x^2 + 8x + 1$ $y = 6x + 1$	14	$y = (x - 1)^2$ $y = x + 1$
15	$y = -x^2 + x + 5$ $y = -2x + 7$	16	$y = x^2 + 3x + 1$ $y = 4x + 1$
17	$y = -2x^2 + 5x - 3$ $y = -3x - 3$	18	$y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ $y = 4x + 1$
19	$y = (x + 5)(x - 1)$ $y = 3.5x - 3.5$	20	$y = x^2 + x + 6$ $y = 4x + 6$
21	$y = -x^2 + 2x - 1$ $y = -2x + 2$	22	$y = 2x^2 - x + 5$ $y = -5x + 11$

1	2	3	4
23	$y = 3x^2 + x - 4$ $y = 10x - 10$	24	$y = 0.5x^2 - x + 2$ $y = 2x + 2$
25	$y = x^2 + 8x - 3$ $y = 11x - 5$	26	$y = x^2 + 4x - 1$ $y = 7x - 3$
27	$y = -x^2 + 6x - 2$ $y = 3x$	28	$y = x^2 + 9x + 4$ $y = 12x + 2$
29	$y = -x^2 + x + 10$ $y = -2x + 12$	30	$y = x^2 + 6x + 1$ $y = 9x - 1$
31	$y = x^2 - 7x + 4$ $y = -4x + 2$	32	$y = x^2 + 5x - 1$ $y = 8x - 3$
33	$y = -x^2 + 3x - 2$ $y = 2x - 2$	34	$y = -x^2 + x + 1$ $y = -2x + 3$
35	$y = x^2 - x - 6$ $y = 2x - 8$	36	$y = x^2 + 2x + 7$ $y = 5x + 5$

Задание 8. Вычислить длины дуг кривых

Таблица 2.8

№	Уравнение кривой	№	Уравнение кривой
1	2	3	4
1	$y = 2e^{\frac{x}{2}}, \ln 3 \leq x \leq \ln 8$	2	$y = \frac{x^2}{2}, 0 \leq x \leq 1$
3	$\begin{cases} x = \frac{1}{6}t^6 \\ y = 2 - \frac{t^4}{4} \end{cases}$ Между точками пересечения с осями Ох, Оу	4	$2y - x^2 + 3 = 0$ Между точками пересечения с осями Ох
5	$y = e^x, 0 \leq x \leq 1$	6	$y = e^\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$
7	$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$	8	$y = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}, 0 \leq x \leq 9$
9	$y = \frac{x^2}{4}, 0 \leq x \leq 2$	10	$y = 4 - \frac{x^2}{2}, y \geq 0$
11	$y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3, 0 \leq x \leq 5$	12	$y = \int_0^x \sqrt{\cos 2t} dt, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$
13	$y = \int_0^x \sqrt{\sin 2t} dt, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$	14	$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
15	$\begin{cases} x = a \cos^5 t \\ y = a \sin^5 t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$	16	$x = a \cos t$ $y = -2a \ln \sin t$, от т.А (0,0) до В (x ₀ , y)
17	$\rho = 7(1 - \sin \varphi), -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$	18	$\rho = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}$
19	$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}, \pi \leq t \leq 2\pi$	20	$\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi$

1	2	3	4
21	$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$	22	$\begin{cases} x = 4(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 4(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}$ $0 \leq t \leq \pi$
23	$\rho = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	24	$\rho = \sqrt{2}e^\varphi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
25	$\rho = 6e^{\frac{12\varphi}{5}}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	26	$\rho = 4e^{\frac{4\varphi}{3}}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$
27	$\rho = 5e^{\frac{5\varphi}{12}}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$	28	$\rho = 1 - \sin \varphi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{6}$
29	$\rho = 3(1 + \sin \varphi), -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq 0$	30	$\rho = 5(1 - \cos \varphi), -\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq 0$
31	$\rho = 2e^{\frac{4\varphi}{3}}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	32	$\rho = 2(1 - \cos \varphi), -\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{2}$
33	$\rho = 4(1 - \sin \varphi), 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$	34	$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 + \cos t) \end{cases}, \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$
35	$\rho = 2(1 - \cos \varphi), -\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{2}$	36	$y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$

Задание 9.

Найти среднее значение издержек $K(x) = 3x^2 + px - N$ выраженных в денежных единицах, если объём продукции x меняется от 0 до N единиц. Указать объём продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

$N=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

Задание 10.

Для $n=1$ до 15

Определить объём продукции, произведённой рабочим за второй час рабочего дня, если производительность труда характеризуется

функцией $f(t) = \frac{k}{at + b} + c$.

Таблица.2.9

№	k	a	b	c
1	k=1	a=3	b=2	c=2
2	k=1	a=4	b=2	c=3
3	k=2	a=3	b=3	c=4
4	k=2	a=4	b=3	c=5
5	k=3	a=5	b=2	c=3
6	k=3	a=1	b=2	c=6
7	k=4	a=2	b=1	c=3
8	k=4	a=3	b=1	c=4
9	k=4	a=4	b=1	c=5
10	k=5	a=2	b=2	c=1
11	k=5	a=3	b=4	c=2
12	k=6	a=1	b=2	c=3
13	k=6	a=2	b=4	c=5
14	k=7	a=3	b=2	c=1
15	k=7	a=3	b=4	c=3

Для $n=16$ до 35

Изменение производительности производства с течением времени от начала внедрения нового технологического процесса задается функцией $z = a - b^{-\alpha t + \beta}$, где t – время в единицах. Найти объём продукции, произведённой за первый месяц, считая от начала внедрения рассматриваемого технологического процесса.

Таблица 2.10

№	a	b	α	β
16	a=27	b=2	$\alpha = 0,3$	$\beta = 4$
17	a=35	b=3	$\alpha = 0,1$	$\beta = 3$
18	a=31	b=2	$\alpha = 0,4$	$\beta = 3$
19	a=29	b=4	$\alpha = 0,2$	$\beta = 2$
20	a=19	b=2	$\alpha = 0,1$	$\beta = 4$
21	a=31	b=5	$\alpha = 0,6$	$\beta = 2$
22	a=18	b=2	$\alpha = 0,4$	$\beta = 4$
23	a=30	b=2	$\alpha = 0,4$	$\beta = 4$
24	a=32	b=3	$\alpha = 0,1$	$\beta = 3$
25	a=25	b=5	$\alpha = 0,5$	$\beta = 2$
26	a=27	b=3	$\alpha = 0,5$	$\beta = 3$
27	a=19	b=4	$\alpha = 1$	$\beta = 3$
28	a=36	b=6	$\alpha = -0,5$	$\beta = 2$
29	a=49	b=7	$\alpha = -1$	$\beta = 4$
30	a=32	b=2	$\alpha = -0,5$	$\beta = 4$
31	a=31	b=2	$\alpha = -0,5$	$\beta = 2$
32	a=30	b=4	$\alpha = -0,5$	$\beta = 2$
33	a=41	b=9	$\alpha = -0,5$	$\beta = 3$
34	a=27	b=4	$\alpha = -0,5$	$\beta = 4$
35	a=30	b=9	$\alpha = -0,5$	$\beta = 3$

3. Образцы выполнения заданий

3.1. Пример 1

Вычислить определённый интеграл $\int_0^{15} \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}$.

Решение. Пусть $\sqrt{1+x} = t$, тогда $t^2 = 1+x$, $x = t^2 - 1$, $dx = 2t dt$.
Найдём новые пределы интегрирования: при $x = 0$, $t^2 - 1 = 0$, $t = 1$;
при $x = 15$, $15 = t^2 - 1$; $t^2 = 16$, $t = 4$.

Получим

$$\int_1^4 \frac{(t^2 - 1) \cdot 2t dt}{t} = \int_1^4 (2t^2 - 2) dt = \left(\frac{2t^3}{3} - 2t \right) \Big|_1^4 = \frac{2}{3} \cdot 4^3 - 2 \cdot 4 - \left(\frac{2}{3} - 2 \right) = 36.$$

3.2. Пример 2

Вычислить интеграл $\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx$.

Решение. Пусть $\ln x = t$, тогда $d \ln x = dt$, $\frac{1}{x} dx = dt$. При $x = 1$,
 $\ln 1 = t$, $t = 0$; при $x = e$, $\ln e = t$, $t = 1$. Получим $\int_0^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$.

3.3. Пример 3

Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$, используя формулу интегрирования по частям.

Решение.

Решение.

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = \left. \begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x dx \\ dv = \cos x dx \\ v = \sin x \end{array} \right| = x^2 \sin x \Big|_0^{2\pi} - \int 2x \sin x dx =$$

$$= \left. \begin{array}{l} u_1 = x \\ du_1 = dx \\ dv_1 = \sin x dx \\ v_1 = -\cos x \end{array} \right| = 4\pi^2 \sin 2\pi - 0 - 2x \cdot (-\cos x) \Big|_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} \cos x dx =$$

$$= 2 \cdot 2\pi \cos 2\pi - 0 - 2 \sin x \Big|_0^{2\pi} = 4\pi.$$

3.4. Пример 4

Вычислить несобственные интегралы, если они сходятся.

$$\text{а) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 7x + 14.5}; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}; \quad \text{в) } \int_0^3 \frac{dx}{(-3+x)^2}.$$

Решение.

а)

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 7x + 14.5} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{dx}{x^2 + 2 \cdot \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 14.5}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{d(x + 3.5)}{(x + 3.5)^2 + \frac{9}{4}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{3}{2}} \arctg \frac{x + 3.5}{\frac{3}{2}} \Big|_1^a =$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{a \rightarrow \infty} \arctg \frac{2x + 7}{3} \Big|_1^a = \frac{2}{3} \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\arctg \frac{2a + 7}{3} - \arctg 3 \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg 3 \right).$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = \frac{t^3}{3} - t \\ y = t^2 + 2, 0 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

Решение. При параметрическом задании кривой $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,

длина дуги вычисляется по формуле $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$.

В нашем случае $x' = t^2 - 1$; $y' = 2t$, тогда

$$\begin{aligned} L &= \int_0^3 \sqrt{(t^2 - 1)^2 + 4t^2} dt = \int_0^3 \sqrt{t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2} dt = \\ &= \int_0^3 \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} dt = \int_0^3 \sqrt{(t^2 + 1)^2} dt = \int_0^3 (t^2 + 1) dt = \left(\frac{t^3}{3} + t \right) \Big|_0^3 = \\ &= \frac{3^3}{3} + 3 = 12. \end{aligned}$$

в) Вычислить длину дуги кривой $\rho = \varphi^2$ $\hat{=} \varphi = 0 \hat{=} \varphi = \pi$.

Решение.

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi.$$

$\rho' = 2\varphi$, значит,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi} \sqrt{\varphi^4 + 4\varphi^2} d\varphi = \int_0^{\pi} \varphi \sqrt{\varphi^2 + 4} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sqrt{\varphi^2 + 4} d(\varphi^2 + 4) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(\varphi^2 + 4)^{3/2}}{3/2} \Big|_0^{\pi} = \frac{(\varphi^2 + 4)^{3/2}}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3} ((\pi^2 + 4)^{3/2} - 4^{3/2}) = \\ &= \frac{1}{3} ((\pi^2 + 4)^{3/2} - 8). \end{aligned}$$

3.6. Пример 6

Найти среднее значение издержек $K(x) = 3x^2 + px - N$ выраженных в денежных единицах, если объём продукции x меняется от 0 до N единиц. Указать объём продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

$$n = 5, N = 9.$$

Решение. Согласно теореме о среднем значении

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Называется средним значением функции на отрезке $[a, b]$.

В нашем случае

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{9} \int_0^9 (3x^2 + 5x + 9) dx = \frac{1}{9} \left(\frac{3x^3}{3} + \frac{5x^2}{x} + 9x \right) \Big|_0^9 = \\ &= \frac{1}{9} (x^3 + 2,5x^2 + 9x) \Big|_0^9 = \frac{1}{9} (9^3 + 2,5 \cdot 9^2 + 9 \cdot 9) = 112,5 \end{aligned}$$

Определим, при каком объеме издержки принимают это значение.

Для этого надо решить уравнение

$$3x^2 + 5x + 9 = 112,5$$

$$3x^2 + 5x - 103,5 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot (-103,5) = 1267$$

$$x_1 = -6,8, \quad x_2 = 5,1$$

Учтем, что объём продукции не может быть отрицательным, получим

$$\xi = x = 5,1$$

3.7. Пример 7

Для $n = 1$ до 15

Определить объём продукции, произведённой рабочим за второй час рабочего дня, если производительность труда характеризу-

ется функцией $f(t) = \frac{k}{at + b} + c$.

Решение.

Пусть $k = 7$, $a = 5$, $b = 1$, $c = 2$.

Если $f(t)$ характеризует производительность труда рабочего в зависимости от времени t , то объем продукции, произведенным рабочим за промежуток времени от t_1 до t_2 будет выражаться формулой

$$V = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

В нашем случае

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 \left(\frac{7}{5t+1} + 2 \right) dt = \left(\frac{7}{5} \ln |5t+1| + 2t \right) \Big|_1^2 = \frac{7}{5} \ln 11 + 4 - \frac{7}{5} \ln 6 - 2 = \\ &= \frac{7}{5} \ln \frac{11}{6} + 2. \end{aligned}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Высшая математика для экономистов: Практикум / под ред. проф. Н.Ш.Кремера. 2-е изд. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1. М.: 1978. 575 с.
3. Общий курс математики для экономистов: Учебник / Под ред. В.И. Ермакова.- М.: ИНФРА-М, 2000.-656 с.(Высшее образование).
4. Сборник заданий по высшей математике. Учебное пособие / Кузнецов Л.А.. – Спб : изд. «Лань», 2008 . 240с.
Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1997.
1. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник. М.: Дело, 2000.