

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна  
Должность: проректор по учебной работе  
Дата подписания: 15.04.2021 19:08:49  
Уникальный программный ключ:  
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебной работе  
О.Г. Локтионова  
«   15  »   04  » 2021 г.



**ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА**

Методические указания к выполнению практических заданий  
по дисциплине «Высшая математика»  
для направления подготовки  
12.03.04 «Биотехнические системы и технологии»

Курск 2021

УДК 51

Составители: О.А. Бредихина, Н.А. Хохлов

Рецензент

кандидат физико-математических наук, доцент  
кафедры высшей математики *В.И.Дмитриев*

**Высшая математика:** методические указания к выполнению практических заданий по дисциплине «Высшая математика» для направления подготовки 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: О.А. Бредихина, Н.А. Хохлов. – Курск, 2021. – 12 с.

Излагаются методические рекомендации по выполнению практических заданий. Содержатся краткие описания применяемых при решении задач математики методов, задания и вопросы для контроля знаний.

Методические указания соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для направления подготовки 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии». Материал предназначен для бакалавров по направлению подготовки 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 09.04.21. Формат 60x84 1/16.

Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж \_\_\_\_\_ экз. Заказ 583. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

**Цель работ:** освоить необходимый математический аппарат, помогающий анализировать, моделировать и решать прикладные задачи.

### Задания по работам

1. Тема «Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной».

Составить уравнения касательной и нормали в точке  $x_0 = m$  к параболе  $y = nx^2 + (n-1)x + m$ , где  $m$  – число гласных букв в фамилии,  $n$  – число согласных букв в фамилии.

2. Тема «Функции нескольких переменных».

Для функции  $z = \cos x \cdot \log_5 y$  найти частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  и их значения в точке  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $y = 25$ .

3. Тема «Интегрирование функций. Определенные интегралы и их приложения».

Найти интеграл:  $\int \frac{\sqrt{5+x^2} - \sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}} dx$ . Сделать проверку.

4. Тема «Дифференциальные уравнения».

Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными  $xy^2 dx + y dy = x dx$ .

5. Тема «Числовые и функциональные ряды».

Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n+1}$ .

6. Тема «Двойные, тройные интегралы, криволинейные и поверхностные интегралы и их приложения».

Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (5x - 4y) dx dy$ , где область  $D$  – прямоугольник, ограниченный осями координат и прямыми  $x=2$ ,  $y=3$ .

7. Тема «Теория функций комплексного переменного. Элементы операционного исчисления».

Восстановить аналитическую функцию  $W = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$  по её известной действительной части  $u(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 5$ ,  $W(0) = 5$ .

## Примеры выполнения заданий с кратким описанием применяемых методов

### 1. Тема «Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной»

Составить уравнения касательной и нормали в точке  $x_0 = t$  к параболе  $y = nx^2 + (n-1)x + t$ , где  $t$  – число гласных букв в фамилии,  $n$  – число согласных букв в фамилии.

Пусть  $t = 8$  и  $n = 10$ , тогда  $x_0 = 8$ ,  $y = 10x^2 + 9x + 8$ . Найдём значение функции в точке  $x_0$ :  $y(8) = 10 \cdot 64 + 9 \cdot 8 + 8 = 720$ . Производная  $y'$  равна:  $y' = 20x + 9$ , а значение производной функции в точке  $x_0$  равно:  $y'(8) = 20 \cdot 8 + 9 = 169$ .

Дальнейшее решение задачи удобнее записать в виде таблицы.

Уравнение касательной к функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ : $y = y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0)$	Уравнение нормали к функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ : $y = y(x_0) - \frac{x - x_0}{y'(x_0)}$
$y = 720 + 169(x - 8)$ , $y = 169x - 632$ , общий вид: $169x - y - 632 = 0$	$y = 720 - \frac{x - 8}{169}$ , $169y = 121680 - x + 8$ , общий вид: $x + 169 - 121688 = 0$

### 2. Тема «Функции нескольких переменных»

Для функции  $z = \cos x \cdot \log_5 y$  найти частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  и их значения в точке  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $y = 25$ .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \log_5 y \cdot (-\sin x), \text{ тогда } \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\left(\frac{\pi}{6}; 25\right)} = -\log_5 25 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos x \cdot \frac{1}{y \cdot \ln 5}, \text{ тогда } \frac{\partial z}{\partial y} \bigg|_{\left(\frac{\pi}{6}; 25\right)} = \cos \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{25 \cdot \ln 5} = \frac{\sqrt{3}}{50 \cdot \ln 5}.$$

### 3. Тема «Интегрирование функций. Определенные интегралы и их приложения»

Найти интеграл:  $\int \frac{\sqrt{5+x^2} - \sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}} dx$ . Сделать проверку.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{5+x^2} - \sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}} dx &= \int \left( \frac{\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{25-x^4}} - \frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}} \right) dx = \int \left( \frac{\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{(5-x^2)(5+x^2)}} - \right. \\ &\left. - \frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{(5-x^2)(5+x^2)}} \right) dx = \int \left( \frac{1}{\sqrt{5-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{5+x^2}} \right) dx = \int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{5+x^2}} = \\ &= \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} - \ln |x + \sqrt{5+x^2}| + C. \end{aligned}$$

Проверка

$$\begin{aligned} \left( \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} - \ln |x + \sqrt{5+x^2}| + C \right)' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{x + \sqrt{5+x^2}} \cdot \left( 1 + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2\sqrt{5+x^2}} \cdot 2x \right) = \frac{1}{\sqrt{5-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{5+x^2}} = \frac{\sqrt{5+x^2} - \sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}} = f(x). \end{aligned}$$

### 4. Тема «Дифференциальные уравнения»

Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными  $xy^2 dx + y dy = x dx$ .

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными имеют вид  $P_1(x) \cdot Q_1(y) \cdot dx + P_2(x) \cdot Q_2(y) \cdot dy = 0$  или  $y' = f(x) \cdot g(y)$ .

Алгоритм решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

- 1) Если в уравнении присутствует  $y'$ , то заменим  $y' = \frac{dy}{dx}$ .
- 2) Разделим переменные, используя свойство пропорции.
- 3) Проинтегрируем левую и правую части уравнения.

$$\begin{aligned} xy^2 dx + y dy &= x dx, \\ xy^2 dx - x dx &= -y dy, \\ (y^2 - 1)x dx &= -y dy, \\ x dx &= -\frac{y}{y^2 - 1} dy, \\ \int x dx &= -\int \frac{y}{y^2 - 1} dy. \end{aligned}$$

Интеграл в левой части уравнения является простым табличным, а интеграл, полученный в правой части уравнения, решим отдельно.

$$\begin{aligned} -\int \frac{y}{y^2 - 1} dy &= -\int \frac{1}{y^2 - 1} \cdot y dy = \left[ \begin{array}{l} t = y^2 - 1 \\ dt = (y^2 - 1)' dy = 2y dy \\ y dy = \frac{dt}{2} \end{array} \right] = -\int \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{2} = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} \ln|t| + C = -\frac{1}{2} \ln|y^2 - 1| + C. \end{aligned}$$

Вернёмся к нашему уравнению:  $\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2} \ln|y^2 - 1| + C$ .

Заменим  $C = \frac{C_1}{2}$ , получим  $\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2} \ln|y^2 - 1| + \frac{C_1}{2}$ .

Таким образом, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид  $x^2 = C_1 - \ln|y^2 - 1|$ .

### 5. Тема «Числовые и функциональные ряды»

Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n+1}$ .

Решение задачи основано на использовании признака Даламбера. Рассмотрим положительный числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Если существует

предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ , то при  $L > 1$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится; при  $L < 1$

ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится; при  $L = 1$  требуется дальнейшее исследование.

Общий член ряда  $a_n = \frac{3^n}{2n+1}$ , тогда  $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2(n+1)+1} = \frac{3 \cdot 3^n}{2n+3}$ .

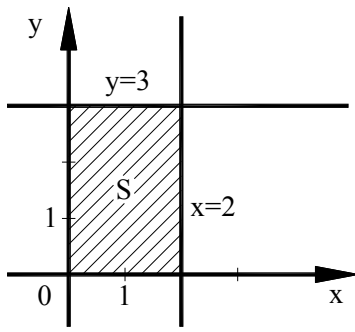
По признаку Даламбера:  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 3^n}{2n+3} : \frac{3^n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 3^n \cdot (2n+1)}{(2n+3) \cdot 3^n} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+3}{2n+3} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \left( 6 + \frac{3}{n} \right)}{n \cdot \left( 2 + \frac{3}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{6+0}{2+0} = 3.$$

Так как  $L > 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n+1}$  расходится.

### 6. Тема «Двойные, тройные интегралы, криволинейные и поверхностные интегралы и их приложения»

Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (5x - 4y) dx dy$ , где область  $D$  – прямоугольник, ограниченный осями координат и прямыми  $x=2$ ,  $y=3$ .



Область  $D$  изображена на рисунке. Тогда

$$\begin{aligned} \iint_D (5x - 4y) dx dy &= \int_0^2 dx \int_0^3 (5x - 4y) dy = \\ &= \int_0^2 \left( 5xy \Big|_0^3 - 2y^2 \Big|_0^3 \right) dx = \int_0^2 (15x - 18) dx = \\ &= \frac{15x^2}{2} \Big|_0^2 - 18x \Big|_0^2 = 30 - 36 = -6. \end{aligned}$$

### 7. Тема «Теория функций комплексного переменного. Элементы операционного исчисления»

Восстановить аналитическую функцию  $W = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$  по её известной действительной части  $u(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 5$ ,  $W(0) = 5$ .

Найдём частные производные первого порядка функции  $u(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 5$ :  $u'_x = 6x$  и  $u'_y = -6y$ .

Тогда мнимая часть функции  $W = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$  рассчитывается по формуле:  $v(x, y) = - \int_{x_0}^x u'_y(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y u'_x(x, y) dy$ .

$$\text{Пусть } x_0 = 0, y_0 = 0, \text{ тогда } v(x, y) = - \int_{x_0}^x -6y_0 dx + \int_{y_0}^y 6x dy =$$

$$= 6y_0 \int_{x_0}^x dx + 6x \int_{y_0}^y dy = 6y_0 x \Big|_{x_0}^x + 6xy \Big|_{y_0}^y = 6y_0 x - 6y_0 x_0 + 6xy - 6xy_0 =$$

$$= 6xy + C, \quad \text{где } C = -6x_0 y_0.$$

$$u(x, y) + i \cdot v(x, y) = (3x^2 - 3y^2 + 5) + i \cdot (6xy + C) =$$

$$= 3 \cdot (x^2 + 2 \cdot x \cdot (i \cdot y) + (i \cdot y)^2) + 5 + C \cdot i = 3 \cdot (x + i \cdot y)^2 + 5 + C \cdot i.$$

Поскольку комплексное число  $z = x + i \cdot y$ , то функция  $W = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$  примет вид:  $W(z) = 3z^2 + 5 + C \cdot i$ . Постоянную  $C$



можно найти из условия:  $W(0) = 5$ . Решая уравнение  $3 \cdot 0^2 + 5 + C \cdot i = 5$ , получаем  $C = 0$ .

Таким образом, найденная функция комплексного переменного имеет вид:  $W = 3z^2 + 5$ .

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теоремы о пределах.
2. Запишите формулу первого замечательного предела. Перечислите следствия.
3. Запишите формулу второго замечательного предела. Перечислите следствия.
4. Дайте определение производной функции.
5. Приведите уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке.
6. Какова связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке.
7. Дайте определение дифференциала функции. Приведите связь между дифференциалом и производной функции.
8. Сформулируйте лемму Ферма.
9. Сформулируйте теорему Лагранжа о среднем.
10. Сформулируйте теорему Коши о среднем.
11. Сформулируйте правило Лопиталья.
12. Что называется функцией нескольких переменных?
13. Что называется областью определения функции двух переменных?
14. Что называется областью изменений или множеством значений функции двух переменных?
15. Что такое частная производная?
16. Что такое полный дифференциал? Его геометрический смысл.
17. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.
18. Сформулируйте необходимые и достаточные условия экстремума функции двух переменных.
19. Дайте определение первообразной функции.
20. Что называется неопределенным интегралом?

21. Дайте определение операции интегрирования. Запишите соотношения, устанавливающие связи между интегрированием и дифференцированием.
22. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла.
23. В чем суть способа интегрирования, введением множителя  $\varphi'(x)$  под знак дифференциала? Запишите соответствующую формулу.
24. Напишите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла.
25. Укажите типы интегралов, вычисление которых целесообразно производить при помощи метода интегрирования по частям.
26. Понятие определенного интеграла.
27. Какова формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла?
28. Перечислите свойства определенного интеграла.
29. Вычисление площади плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в декартовой системе координат, или в полярной системе координат, или заданной параметрически.
30. Дайте определение дифференциального уравнения. Что называется решением дифференциального уравнения?
31. Дайте определение порядка дифференциального уравнения.
32. Что называется общим решением дифференциального уравнения, частным решением?
33. Укажите общий вид дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, а также алгоритм их решения.
34. Укажите общий вид линейных дифференциальных уравнений. При помощи какой замены решается тип данных уравнений?
35. Укажите общий вид дифференциальных уравнений Бернулли. При помощи какой замены решается тип данных уравнений?
36. Дайте определение дифференциальных уравнений высших порядков.
37. Дайте определение числового ряда.
38. Дайте определение частичной суммы числового ряда, суммы ряда.
39. Сформулируйте свойства числового ряда.

40. Дайте определение ряда геометрической прогрессии.
41. Запишите формулу вычисления суммы ряда геометрической прогрессии.
42. Дайте определение знакочередующегося числового ряда.
43. Сформулируйте признак Лейбница.
44. Дайте определение функционального ряда.
45. Укажите формулы для нахождения радиуса сходимости степенного ряда.
46. Методы вычисления двойного интеграла.
47. Методы вычисления тройного интеграла.
48. Перечислите виды криволинейных интегралов.
49. Перечислите виды поверхностных интегралов.
50. Дайте определение функции комплексного переменного.
51. Сформулируйте условия Коши-Римана.
52. Дайте определения оригинала и изображения.

## **РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА**

1. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика [Текст]: учебник. -М.: Проспект, 2011. -608 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст]: учебное пособие. Т.1, М.: Интеграл-Пресс, 2007. -416 с.
3. Бойцова Е.А. Практикум по математике [Текст]: учебное пособие. -Старый Оскол: ТНТ, 2014. -160 с.
4. Бойцова Е.А. Практикум по математике. Спецглавы [Текст]: учебное пособие/ Е.А.Бойцова. -Старый Оскол: ТНТ, 2014. -156 с.
5. Сборник задач по математике для втузов. Ч.1 [Текст] / Под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова -М.: Физматлит. 2009. -288 с.
6. Сборник задач по математике для втузов. Ч.2 [Текст] / Под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова – М.: Физматлит. 2009. -432 с.
7. Сборник задач по математике для втузов. Ч.3 [Текст] / Под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова – М.: Физматлит. 2009. -544 с.
8. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии [Текст]: учебное пособие / Д. В. Клетеник. - 17-е изд. - СПб. : Профессия, 2010. -224 с.

9. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] -М.: Высшая школа, 1983. -128с.
10. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление [Текст] -М.: Наука, 1988. - 432с.
11. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного [Текст]: учебник. -М.: Наука, 1989. -464с.
12. Волков Е.А. Численные методы [Текст]: учебное пособие. - М.: Наука, 1982. -254с.
13. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной [Электронный ресурс]: индивидуальные задания / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.В. Скрипкина. – Курск: ЮЗГУ, 2014.-52 с.
14. Интегрирование функций [Электронный ресурс]: индивидуальные задания к М-5 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Моргунова Н.А., Пихлап А.Ф. –Курск: ЮЗГУ, 2014. – 38с.
15. Интегрирование функций одной переменной. Приложения [Электронный ресурс]: методические указания по выполнению модуля / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Моргунова Н.А., Пихлап А.Ф. – Курск: ЮЗГУ, 2014. –53с.
16. Функции нескольких переменных [Электронный ресурс]: индивидуальные задания и методические указания к выполнению модуля 6.1 для студентов технических специальностей / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Бредихина О.А., Шеставина С.В. –Курск: ЮЗГУ, 2014. -15 с.