МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Локтионова
«15» 01 2021 г.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания к выполнению практических заданий
по дисциплине «Высшая математика»
для направления подготовки 30.05.03
«Медицинская кибернетика»

Курск 2021

УДК 51

Составитель: Н.А. Хохлов

Рецензент
кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры высшей математики *В.И. Дмитриев*

Высшая математика: методические указания к выполнению практических заданий по дисциплине «Высшая математика» для направления подготовки 30.05.03 «Медицинская кибернетика» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Н.А. Хохлов. – Курск, 2021. –21 с.

Излагаются методические рекомендации по выполнению практических заданий. Содержатся примеры типовых заданий с кратким разбором методов их решения.

Методические указания соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для направления подготовки 30.05.03 «Медицинская кибернетика».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 15.02.2021. Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж ____экз. Заказ 305. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Цель выполняемых практических заданий: овладеть навыками использования аппарата дифференциального и интегрального исчисления при исследовании различных объектов профессиональной деятельности.

Практические занятия

1. Действия над числовыми рядами – 10 ч
2. Разложение функций в степенные ряды – 16 ч
3. Гармонический анализ – 24 ч
4. Вычисление кратных интегралов – 16 ч
5. Расчеты в комплексной области – 24 ч

Практическое занятие 1

Цель работы: научиться различным подходам при исследовании поведения числовых рядов.

Типовое задание

1. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+12n-5}$.
2. Исследуйте ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$.
3. Вычислите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{3n^2}$ с точностью до 0,01.
4. Вычислите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!(2n+1)}$ с точностью до 0,001.

Пример выполнения типового задания с кратким описанием применяемых методов

Задача 1

Убеждаемся в сходимости ряда, сравнивая его со сходящимся рядом Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, – заданный ряд и ряд Дирихле ведут себя одинаково: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6}{9n^2+12n-5}/\frac{1}{n^2}\right)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

Вычислим несколько начальных членов заданного ряда:

$a_1=\frac{6}{9+12-5}=\frac{3}{8}$ $\quad(n=1)\quad$ $a_1=0{,}375$

$a_2=\frac{6}{65}$ $\quad(n=2)\quad$ $a_2=0{,}092$

$a_3=\frac{3}{56}$ $\quad(n=3)\quad$ $a_3=0{,}054$

$a_4=\frac{2}{63}$ $\quad(n=4)\quad$ $a_4=0{,}032$

$a_5=\frac{3}{140}$ $\quad(n=5)\quad$ $a_5=0{,}021$

Подсчитаем далее первые пять частичных сумм:

$S_1=a_1=0{,}375$

$S_2=a_1+a_2=0{,}467$

$S_3=a_1+a_2+a_3=0{,}521$

$S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=0{,}553$

$S_5=0{,}574$

Можно за приближенное значение суммы S данного ряда принять пятую частичную сумму S_5:

$$S\approx S_5.$$

При этом ошибка не превысит суммы остатка ряда, т.е. величины

$$\sum_{n=6}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}<\sum_{n=6}^{\infty}\frac{6}{9n^2}=\frac{2}{3}\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\frac{4}{3}\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=\frac{4}{3}\sum_{n=6}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{9}$$

Таким образом, приближенное равенство может дать нам довольно большую погрешность 0,22.

Чтобы добиться, например, точности 0,01 (при таком способе действий), потребуется подсчет 140-150 членов ряда. Для практики это не совсем приемлемо.

Вычислим **точную** сумму заданного ряда. Заметим, что $9n^2+12n-5=(3n-1)(3n+5)$ и, далее, что

$$\frac{6}{9n^2+12n-5}=\frac{6}{(3n-1)(3n+5)}=\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+5}.$$

Далее все основывается на том, что $3n+5=3(n+2)-1$.

Находим:

$$S=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{14}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{17}\right)+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{5},$$

все прочие дроби встречаются в сумме дважды – с противоположными знаками.

Таким образом, $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=0{,}5+0{,}2=0{,}7.$

Задача 2

Члены $a_n=1-\cos\frac{\pi}{n}$ данного ряда положительны и образуют убывающую последовательность. Сходимость или расходимость такого ряда определяется, грубо говоря, быстротой убывания членов a_n. Воспользуемся тригонометрической формулой

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Получаем

$$a_n=1-\cos\frac{\pi}{n}=2\sin^2\frac{\pi}{2}.$$

Далее воспользуемся математическим анализом:

$$\sin x\sim x \quad \text{при} \quad x\to 0.$$

Получаем, так как $\frac{\pi}{2n}\to 0$ при $n\to\infty$,

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sim\frac{\pi}{2n}, \text{ так что } a_n\sim 2\cdot\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2=\frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{1}{n^2}.$$

Но ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится; поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)$ с эквивалентными членами также сходится.

Задача 3

Решение задачи 3 аналогично решению задачи 4.

Задача 4

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!(2n+1)}$ есть ряд лейбницевского типа. Если S – сумма такого ряда, $S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, то $S=\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}a_n+R_N$, где $R_N=\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ – остаток ряда, образованный т.н. отбрасываемыми членами.

Важное свойство:

$$|R_N|<a_{N+1}.$$

Поэтому

$$S\approx\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}a_n=S_N$$

с точностью, лучшей, чем первый из образованных членов.

Значит, следует действовать так: вычисляем последовательно члены заданного ряда $a_n=\frac{1}{n!(2n+1)}$, $n=1,2,\ldots$, находим наименьший номер (N + 1) такой, что $a_{N+1}<0{,}001$. Тогда $S\approx S_N$ с требуемой точностью.

$$a_1=\frac{1}{1!(2+1)}=\frac{1}{3} \qquad (n=1) \qquad a_1=0{,}5$$

$$a_2=\frac{1}{2!(4+1)}=\frac{1}{10} \qquad (n=2) \qquad a_2=0{,}1$$

$$a_3=\frac{1}{3!(6+1)}=\frac{1}{42} \qquad (n=3) \qquad a_3=0{,}024$$

$$a_4 = \frac{1}{4!(8+1)} = \frac{1}{216} \qquad (n=4) \qquad a_4 = 0{,}005$$

$$a_5 = \frac{1}{5!(10+1)} = \frac{1}{1320} \qquad (n=5) \qquad a_5 = 0{,}0008 < 0{,}001$$

Стало быть, a_5 можно считать первым отбрасываемым членом.

В итоге

$$S \approx a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = 0{,}500 - 0{,}100 + 0{,}024 - 0{,}005,$$

$$S \approx 0{,}419.$$

Контрольные вопросы

1. Понятия сходимости и расходимости числового ряда.
2. Признаки Коши (с радикалом) и Даламбера.
3. Знакочередующиеся ряды, знак Лейбница.

Практическое занятие 2

Цель работы: освоить методику исследования гладких функций с помощью степенных рядов.

Типовое задание

1. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n .$$

2. Найдите радиус и интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot x^n .$$

3. Разложите функцию f(x) = ln x в степенной ряд по степеням разности x – 1.

4. Вычислите «неберущийся» интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx \text{ с точностью до } 0{,}001,$$

с помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд.

Пример выполнения типового задания с кратким описанием применяемых методов

Задача 1

Заметим, что заданный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ является степенным рядом относительно переменной $t=\frac{1-x}{1+x}$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\cdot t^n$.

Найдем область сходимости этого ряда. Сначала найдем радиус сходимости (одна из формул для радиуса сходимости степенного ряда $\sum_n c_n t^n$ такова: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}/\frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)-1}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=1.$$

Следовательно, интервал сходимости − это интервал $(-1;1)$. Исследуем сходимость на концах этого интервала

$t=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\cdot(-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ − ряд расходится, будучи подобен гармоническому ряду.

$t=1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\cdot 1^n$ − знакочередующий ряд лейбницевского типа, сходится.

В итоге: область сходимости − это промежуток $(-1;1]$. Вернемся к исходному ряду. Он сходится в точке x, только если $\frac{1-x}{1+x}$ лежит в области сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\cdot t^n$, т.е.

$$-1<\frac{1-x}{1+x}\le 1.$$

Решим двойное неравенство, т.е. систему

$$\begin{cases} \dfrac{1-x}{1+x} > -1, & (1) \\ \dfrac{1-x}{1+x} \le 1 & (2) \end{cases}$$

Решаем (1): $\dfrac{1-x}{1+x} + 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{1+x} > 0 \Leftrightarrow 1+x > 0 \Leftrightarrow x > -1.$

Решаем (2):

$$\frac{1-x}{1+x} - 1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{1+x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} \ge 0 \Leftrightarrow \{x < -1\} \cup \{x \ge 0\}.$$

В итоге получаем ответ: $x \in [0;\infty)$

Задача 2

Как уже отмечалось, радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_n c_n x^n$ можно вычислить (во многих случаях, не всегда) по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

В нашей задаче $c_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} = \dfrac{(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n)^2}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2n)}.$

Рассмотрим отношение $\dfrac{c_n}{c_{n+1}}$ и попробуем упростить соответствующее выражение

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \bigg/ \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} = \frac{(n!)^2 \cdot (2n+2)!}{(2n)!((n+1)!)^2} =$$

$=$ (сокращаем дробь на $(n!)^2$ и на $(2n)!$; заметим, что $((n+1)!)^2 = (n!)^2 \cdot (n+1)^2$ и $(2n+2)! = (2n)!(2n+1)(2n+2)$) $=$

$$= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{(2n+1)\cdot 2}{n+1}.$$

Далее, $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n+2}{n+1} = 4.$

Интервал сходимости имеет вид $(-4;4)$.

Задача 3

Самое простое решение получится, если мы воспользуемся стандартным разложение логарифма

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}=\dots \text{ для } |x|<1.$$

Идея заключается в том, чтобы x заменить на разность $x-1$:

$$f(x)=\ln x=\ln((1+(x-1))=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}=$$

$$=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\dots$$

Задача 4

В этой задаче требуется иметь разложение арктангенса в степенной ряд. Это разложение можно взять из таблиц стандартных разложений, а также можно получить независимо следующим образом. Взять геометрическую прогрессию $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ для $|x|<1$, заменить x на $-t^2$ для $|t|<1$:

$$\frac{1}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}, -$$

и проинтегрировать по отрезку [0;x] почленно:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt,$$

что дает нам требуемое разложение

$$\operatorname{arctg}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots(|x|<1)$$

Поэтому подынтегральная функция $\frac{\operatorname{arctg}x}{x}$ в интеграле из условия задачи представляется степенным рядом

$$1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^6}{7}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}.$$

Интегрируем:

$$\int_0^{1/2}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx=\int_0^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\int_0^{1/2}x^{2n}dx=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Bigg|_0^{1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2\cdot 2^{2n+1}}.$$

Остается вычислить сумму ряда лейбницевского типа с точностью до 0,001.

$$a_0=\frac{1}{1^2\cdot 2^1}=\frac{1}{2}=0{,}5000$$

$$a_1=\frac{1}{3^2\cdot 2^3}=\frac{1}{72}=0{,}0139$$

$$a_2=\frac{1}{5^2\cdot 2^5}=\frac{1}{800}=0{,}0012$$

$a_3=\dfrac{1}{7^2\cdot 2^7}=\dfrac{1}{49\cdot 128}<0{,}001;$ a_3 − первый отбрасываемый член.

В итоге $S=a_0-a_1+a_2=0{,}5000-0{,}0139+0{,}0012=0{,}4873.$

Ответ: 0,487.

Контрольные вопросы

1. Понятие сходимости и расходимости числового ряда.
2. Признаки Коши (с радикалом) и Даламбера.
3. Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница.

Практическое занятие 3

Цель работы: научиться проводить гармонический анализ периодических функций

Типовые задания

1. Найдите первую гармонику 2π - периодической функции

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$$

2. Разложите в ряд Фурье 2π - периодическую функцию

$$f(x)=x \text{ при } -\pi\le x<\pi.$$

Пример выполнение типового задания с кратким описанием применяемых методов

Задача 1

Гармоники, или гармонические составляющие, 2π-периодической функции $f(x)$ − это функции

$$g_n(x)=a_n\cos nx+b_n\sin x,\qquad n=0,1.2,...,$$

где a_n и b_n − коэффициенты Фурье функции f:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\ ,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\ .$$

В нашей задаче $f(x)=0$ при $-\pi\le x<0,\quad f(x)=x$ при $0\le x<\pi,$ и $n=1.$

Вычислим коэффициенты Фурье a_1 и b_1

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos xdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos xdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos xdx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\cdot\cos xdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos xdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos xdx.$$

Интеграл $\int_0^{\pi}x\cos xdx$ вычислим с помощью интегрирования по частям:

$$\int_0^{\pi}x\cos xdx=\begin{bmatrix}u=x; \quad du=dx\\ dv=\cos xdx; v=\int dv=\int\cos xdx=\sin x\end{bmatrix}=$$

$$=x\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin xdx=\cos x\Big|_0^{\pi}=\cos\pi-\cos 0=-1-1=-$$

$$(\sin\pi=0)$$

Итак, $a_1 = -\frac{2}{\pi}$.

Далее

$$\pi b_1 = \int_{-\pi}^{0} 0 \cdot \sin x dx + \int_{0}^{\pi} x \sin x dx = \int_{0}^{\pi} x \sin x dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x; & du = dx \\ dv = \sin x dx; & v = dv = \int \sin x dx = -\cos x \end{bmatrix} = -x \cos \Big|_0^{\pi} +$$

$$+ \int_0^{\pi} \cos x dx = -\pi \cos \pi + 0 \cos 0 + \sin x \Big|_0^{\pi} = -\pi \cdot (-1) + 0 + 0 = \pi.$$

Значит, $\pi b_1 = \pi$, т.е. $b_1 = 1$.

Ответ: $g_1(x) = -\frac{2}{\pi} \cos x + 1 \cdot \sin x$.

Задача 2

Разложить 2π-периодическую функцию в ряд Фурье − значит представить ее в виде суммы ее гармоник:

$$f(x) = \frac{1}{2} g_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).$$

Таким образом, нужно найти все гармоники заданной функции $f(x) = x$, $-\pi \le x < \pi$. Для этого найдем все коэффициенты Фурье этой функции.

a_0 рекомендуется вычислить отдельно.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos x dx = \begin{bmatrix} u = x; & du = dx \\ dv = \cos x dx; & v = \frac{\sin nx}{n} \end{bmatrix} =$$

$$= x \cdot \frac{\sin nx}{n} \cos \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{n} dx = 0 + \frac{\cos nx}{n^2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_n = 0$$

(так и должно быть, поскольку подынтегральная функция $x\cos nx$ нечетна).

Далее

$$\pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin nx dx = 2\int_0^{\pi} x \sin nx dx$$

(из-за четности подынтегральной функции $x \sin nx$ значения интегралов по промежуткам $[-\pi;0]$ и $[0;\pi]$ совпадают)

$$= \left[\begin{array}{l} u = x; \qquad du = dx \\ dv = \sin nx dx; \ \ v = \int dv = \int \sin nx dx = -\dfrac{\cos nx}{n} \end{array}\right] =$$

$$= 2\left(-x \cdot \frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nx dx \right) = 2\left(-\pi \cdot \frac{\cos n\pi}{n} + \frac{1}{n^2} \sin nx \Bigg|_0^{\pi} \right) =$$

$$= -2\pi \frac{\cos n\pi}{n} = -2\pi \cdot \frac{(-1)^n}{n},$$

так как $\cos n\pi = (-1)^n$.

Следовательно,

$$b_n = -2 \cdot \frac{(-1)^n}{n} = 2\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Окончательно,

$$f(x) = \frac{0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(0 \cdot \cos nx + 2\frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin x \right),$$

т.е.

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx.$$

В частности, если $x \in (-\pi;\pi)$, то

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\sin nx}{n}.$$

Контрольные вопросы

1. Ортогональность функций.
2. Тригонометрические коэффициенты Фурье.

3. Разложение периодической функции в ряд Фурье.

Практическое занятие 4

Цель работы: овладеть методами вычисления кратных интегралов

Типовое задание

1. Область на плоскости Oxy ограничена линиями $y = x$ и $y = \sqrt{x}$ и представляет собой материальную пластинку переменной плотности $\rho(x, y) = x + y^2$. Какова масса этой пластинки?
2. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x + y + z = 2,\ x^2 + y^2 = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.
3. См. задачу 1. Найдите координаты центра масс пластинки.

Пример выполнения типового задания с кратким описанием применяемых методов

Задача 1

Масса пластинки равна двойному интегралу от плотности по области, занимаемой пластинкой:

$$m = \iint\limits_{D} \rho(x, y)dxdy.$$

Область D представляет собой «линзу», между прямой $y = x$ и полупараболой $y = \sqrt{x},\ 0 \le x \le 1$, причем кривая $y = \sqrt{x}$ ограничивает область сверху.

Находим:

$m = \iint\limits_{D} (x + y^2)dxdy =$ (переходим к повторному интегрированию: внутренний интеграл по переменной y от x до $\sqrt{x}$, внешний интеграл по x от 0 до 1)

$$= \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} (x + y^2) dy \right) dx = \int_0^1 \left(xy + \frac{1}{3} y^3 \right) \Bigg|_{y=x}^{y=\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{3} x\sqrt{x} - x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{4}{3} x^{3/2} - x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) dx =$$

$$= \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{8}{15} - \frac{1}{3} - \frac{1}{12} - 0 = \frac{7}{60}.$$

Напомним, что при отыскании внутреннего интеграла переменная x (временно) считалась постоянной.

Задача 2

Учащимся полезно сделать схематический рисунок. Тело T представляет собой вертикальный (вдоль оси z) цилиндр с двумя плоскими стенками $x = 0$ и $y = 0$ и круговой стенкой $x^2 + y^2 = 1$; при этом «дном» цилиндра служит четверть K круга $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, в плоскости Oxy ($z = 0$), а «крышкой» является кусок плоскости $z = 2 - x - y$, где $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Ищем объем V тела T.

$$V = \iiint\limits_T 1 dxdydz = \iint\limits_K \left(\int_0^{2-x-y} dz \right) dxdy = \iint\limits_K (2 - x - y) dxdy =$$ (перейдем к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$; при этом r и φ изменятся независимо друг от друга: $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$; не забудем о якобиане r) $= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} \left(2 - r\cos\varphi - r\sin\varphi\right) r\, d\varphi \right) dr = \int_0^1 r(2\varphi - r\sin\varphi +$

$$+ r\cos\varphi \Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} dr = \int_0^1 r\left(\pi - r + 0 - 0 - 0 - r\right) dr = \int_0^1 (\pi r - 2r^2)\, dr =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} r^2 - \frac{2}{3} r^3 \right) \Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3\pi - 4}{6} \approx 5{,}44.$$

Задача 3

Координаты центра масс плоской пластинки можно подсчитать по формулам:

$$x_c = \frac{1}{m}\iint_D x\cdot\rho(x,y)dx\,dy,\ y_c = \frac{1}{m}\iint_D y\cdot\rho(x,y)dx\,dy.$$

Здесь m – масса пластинки (вычислена ранее: $m = \frac{7}{60}$).

Находим:

$$\iint_D x\cdot\rho(x,y)dx\,dy = \iint_D x(x+y^2)dx\,dy = \int_0^1\left(\int_x^{\sqrt{x}}\left(x^2+xy^2\right)dy\right)dx =$$

$$= \int_0^1\left(x^2y + x\cdot\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=x}^{y=\sqrt{x}}dx = \int_0^1\left(x^2\sqrt{x} + x\cdot\frac{x\sqrt{x}}{3} - x^3 - \frac{x^4}{3}\right)dx =$$

$$= \int_0^1\left(\frac{4}{3}x^{5/2} - x^3 - \frac{1}{3}x^4\right)dx = \left(\frac{4}{3}\cdot\frac{x^{7/2}}{7/2} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{8}{21} - \frac{1}{4} - \frac{1}{15} = \frac{9}{140}.$$

Поэтому $x_c = \frac{60}{7}\cdot\frac{9}{140} = \frac{27}{49}$.

Аналогично

$$\iint_D y\cdot\rho(x,y)dx\,dy = \iint_D y(x+y^2)dx\,dy = \int_0^1\left(\int_x^{\sqrt{x}}\left(xy+y^3\right)dy\right)dx =$$

$$= \int_0^1\left(x\cdot\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_x^{\sqrt{x}}dx = \int_0^1\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{20}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{20} = \frac{3}{40}.$$

Поэтому $y_c = \frac{60}{7}\cdot\frac{3}{40} = \frac{9}{14}$.

Контрольные вопросы

1. Вычисление краткого интеграла повторным интегрированием.
2. Вычисление объемов цилиндрических тел с помощью двойного интеграла.
3. Механические приложения двойных и тройных интегралов.

Практическое занятие 5

Цель работы: освоить методы расчетов с использованием комплексных чисел.

Типовое задание

1. Для комплексных чисел $z_1 = 2+5i$, $z_2 = -1+3i$ найдите $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$.

2. Представьте дробь $\dfrac{1}{z^2+4}$ в виде суммы простейших дробей (в комплексной области).

3. Укажите фундаментальную систему комплексных решений дифференциального уравнения $2y'' + 2y' + 5y = 0$.

Пример выполнения типового задания с кратким описанием применяемых методов

Задача 1

Простейшие операции над комплексными числами:

$z_1 + z_2 = 2+5i-1+3i = 1+8i$;

$z_1 \cdot z_2 = (2+5i)(-1+3i) = -2+6i-5i+15i^2 = -2+i+15\cdot(-1) =$
$= -17+i$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+5i}{-1+3i} = \frac{(2+5i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)} = \frac{-2-6i-5i+15}{1+9} = \frac{13-11i}{10} =$$

$$=\frac{13}{10}-\frac{11}{10}i.$$

Задача 2

Знаменатель z^2+4 допускает в комплексной области разложение на линейные множители:

$$z^2+4=(z-2i)(z+2i).$$

Тогда

$$\frac{1}{z^2+4}=\frac{1}{(z-2i)(z+2i)}=\frac{A}{z-2i}+\frac{B}{z+2i}=\frac{A(z+2i)+B(z-2i)}{z^2+4}.$$

Значит, $1-A(z+2i)+B(z-2i)$ при всех z.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z (слева и справа), получаем

$$\begin{cases} A+B=0, \\ 2iA-2iB=1. \end{cases} \qquad A-B=\frac{1}{2i}=\frac{i}{2i^2}=-\frac{1}{2}i$$

Отсюда $A=-\frac{1}{4}i,\quad B=\frac{1}{4}i$.

Ответ: $\frac{1}{z^2+4}=-\frac{1}{4}i\cdot\frac{1}{z-2i}+\frac{1}{4}i\cdot\frac{1}{z+2i}$.

Задача 3

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$2\lambda^2+2\lambda+5=0,$$

$$D=4-40=-36=(6i)^2,$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-2\pm 6i}{4}=-\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}i.$$

Фундаментальная система комплексных решений образована функциями

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)x} = e^{-\frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{3}{2}ix},$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)x} = e^{-\frac{x}{2}} \cdot e^{-\frac{3}{2}ix}.$$

Контрольные вопросы

1. Формула Муавра.
2. Экспонента в комплексной области.
3. Формулы Эйлера.

Рекомендованная литература

1 Основная учебная литература

1. Ильин, В. А. Высшая математика [Текст] : учебник / В. А. Ильин, А. В. Куркина ; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Проспект, 2011. – 608 с.
2. Сборник задач по математике для втузов [Текст] : учебное пособие / под ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. – М. : Физматлит, 2009. –Ч. 2. – 432 с.
3. Протасов, Ю.М. Математический анализ. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Ю.М. Протасов. − М.: Флинта, 2012. − 165с. – Режим доступа: http: //biblioclub.ru/.

3 Перечень методических указаний

1. Числовые ряды [Электронный ресурс] : методические указания и индивидуальные задания к модулю / Юго-Зап. гос. ун-т ; сост.: А.В.Бойков. − Курск : ЮЗГУ, 2018. - 62 с.
2. Функциональные ряды [Электронный ресурс] : методические указания и индивидуальные задания к модулю / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.В.Журавлева, Н.А.Конорева. − Курск : ЮЗГУ, 2018. - 30 с.