МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
______________О.Г. Локтионова
«_4_»_03______________2019 г.

НАХОЖДЕНИЕ МИНИМУМА ФУНКЦИИ МЕТОДОМ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ

Методические указания к лабораторной работе №8
по дисциплине «Вычислительная математика»
направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия»

Курск 2019

УДК 519.6

Составители Е.П. Кочура, В.М. Буторин

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии И.Н. Ефремова

Нахождение минимума функции методом золотого сечения: методические указания к лабораторной работе №8 по дисциплине «Вычислительная математика» для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Е.П. Кочура, В.М. Буторин. Курск, 2019. 13 с.

Содержит краткие теоретические сведения по теме лабораторной работы, цель выполнения работы, задание, пример выполнения лабораторной работы, требования к составлению отчета, список контрольных вопросов, таблицу индивидуальных заданий.

Предназначено для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия».

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 04.03.19. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 0,76. Уч.-изд. л. 0,68. Тираж 100 экз. Заказ 146 .
Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет
305040, Курск, ул.50 лет Октября, 94.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №8

НАХОЖДЕНИЕ МИНИМУМА ФУНКЦИИ МЕТОДОМ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Изучение основных определений и положений одномерной минимизации.
2. Изучение основных методов численного решения задач одномерной минимизации.
3. Разработка и решение на ЭВМ задачи минимизации функций одной переменной.

II. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1. Основные определения. Задача нахождения минимума функции f(x), $x \in [a,b]$ состоит в нахождении такой точки $\bar{x} \in [a,b]$, что

$$f(\bar{x}) = \underbrace{\min}_{x \in [a,b]} f(x), \quad \bar{x} \in [a,b]. \qquad (2.1)$$

Пусть задана функция f(x) на отрезке [a,b]. Точка $\bar{x} \in [a,b]$ называется точкой глобального минимума, если для всех $x \in [a,b]$ выполняется условие:

$$f(\bar{x}) \le f(x), \quad \forall x \in [a,b], \quad \bar{x} \in [a,b]. \qquad (2.2)$$

Точка $\bar{x}$ называется точкой локального минимума, если существует δ - окрестность этой точки, что выполняется условие:

$$f(\bar{x}) \le f(x), \quad \forall x \in [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta]. \qquad (2.3)$$

Если $\forall x \in [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta]$ выполняется условие $f(\bar{x}) < f(x)$, то говорят, что $\bar{x}$ является точкой строгого локального минимума.

2. Унимодальные функции. Если на отрезке [a,b] определена функция f(x) с одной точкой локального минимума $\bar{x}$ и при этом для всех $x < \bar{x}$ функция строго убывает, $\left[f(x) > f(\bar{x}), \bar{x} < x\right]$, а для всех $x > \bar{x}$ функция строго возрастает $\left[f(x) > f(\bar{x}), x > \bar{x}\right]$, то такая функция называется унимодальной.

3. Обусловленность задачи минимизации. Погрешность определения точки минимума $\bar{x}$ связана с предельной абсолютной погрешностью вычисления значения функции в точке $f(\bar{x})$ следующим образом:

$$\bar{\Delta}\bar{x} = \nu_{\Delta} * \bar{\Delta} f(\bar{x}), \qquad (2.4)$$

где $\nu_\Delta = 2 / \sqrt{\left|f^{(2)}(\bar{x})\right| \cdot \bar{\Delta} f(\bar{x})}$ - число обусловленности задачи минимизации. Отсюда следует, что погрешность в определении x увеличивается в ν_Δ по сравнению с погрешностью вычисления функции $\bar{\Delta} f(x)$. Так как при $\bar{\Delta} f \to 0$, имеем $\nu_\Delta >> 1$, то задача минимизации является плохо обусловленной.
Так как точность расчетов точки минимума ε не может быть выше погрешности $\Delta\bar{x}$, то имеем $\varepsilon \le \Delta\bar{x}$.

4. Этапы поиска минимума. Так же, как и в задаче поиска корня, задача поиска минимума разделяется на два этапа: этап локализации и этап итерационного уточнения.
На этапе локализации выделяется отрезок минимальной длины, содержащий одну точку локального минимума, на котором функция является унимодальной. На втором этапе используется один из методов поиска точки минимума.

5. Методы прямого поиска:

а) оптимальный пассивный поиск. На отрезке [a,b] задается последовательность точек $x_0, x_1, ..., x_n$, таких, что $x_k = x_0 + kh$, $k=1,...,n$; $x_0 = a$, $x_n = b$. В этих точках вычисляется значение функции $f(x_k)$. За точку минимума $\bar{x}$ принимается та точка x_k, для которой выполняется соотношение: $f(x_k) = \underbrace{\min}_{0 \le i \le n} f(x_i)$. Следовательно: $x_{k-1} \le \bar{x} \le x_{k+1}$. Отсюда $\bar{\Delta}(\bar{x}) = h$.

б) метод деления отрезка пополам. На отрезке $\left[a_0, b_0\right]$ выбирается две точки: $\alpha_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} - \delta$, $\beta_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} + \delta$. Вычисляются значения $f(\alpha_0)$ и $f(\beta_0)$. Если $f(\alpha_0) < f(\beta_0)$, то точка минимума находится на отрезке $\left[a_0, \beta_0\right]$, если $f(\alpha_0) > f(\beta_0)$, то точка минимума находится на отрезке $\left[\alpha_0, b_0\right]$, т.к. функция является унимодальной. Отрезок с точкой минимума принимается за новый отрезок $\left[a_1, b_1\right]$, на котором опять выбираются две точки и т.д., до отрезка $\left[a_n, b_n\right]$ длина которого $\le \varepsilon$. Следовательно: $\bar{\Delta}(\bar{x}) = \varepsilon$.

в) метод золотого сечения. Золотым сечением отрезка называется деление отрезка на две части, так что отношение длины всего отрезка к длине большей части равно отношению большей части к меньшей (принцип подобия). Золотое сечение отрезка $[a,b]$ можно произвести двумя симметрично расположенными точками:

$$x_1 = a + (1-\tau)(b-a) = b - (b-a)\tau,$$
$$x_2 = b - (1-\tau)(b-a) = a + (b-a)\tau, \qquad (2.5)$$

где $\tau = (\sqrt{5}-1)/2 \approx 0.6180339,\ x_2 > x_1.$

Сечение называется золотым, потому, что точка x_1 в свою очередь производит золотое сечение отрезка $[a,x_2]$, а точка x_2 - золотое сечение отрезка $[x_1,b]$.

5. Методы поиска минимума для гладких функций. Пусть f(x) является унимодальной функцией на отрезке [a,b] и имеет непрерывную производную на этом отрезке, а точка $\bar{x}$ является точкой минимума. Следовательно, в точке $\bar{x}$ имеем:

$$f'(\bar{x}) = 0,\ \ \bar{x} \in [a,b]; \qquad (2.6)$$

при этом $f''(\bar{x}) > 0.$

Следовательно задачу поиска минимума (2.1) мы можем заменить на задачу поиска корня уравнения (2.6), т.е. применить методы решения нелинейных уравнений к уравнению относительно производной функции.

а) метод бисекции. Так как $f'(\bar{x}) = 0$ и $f''(\bar{x}) > 0$, то в точке минимума производная .меняет знак. Поэтому для поиска минимума отрезок делится на две части и исключается тот отрезок, где производная не меняет знак. Продолжая этот процесс уменьшается отрезок $l_n = \dfrac{a-b}{2^n}$ внутри которого функция достигает минимума. Метод бисекции сходится по закону:

$$|x - \bar{x}| \le (a-b)/2^{n+1}. \qquad (2.7)$$

б) метод Ньютона. Применение метода Ньютона для решения уравнения $f'(x) = 0$ дает следующую расчетную формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}. \qquad (2.8)$$

Он имеет квадратичную сходимость и итерационный процесс заканчивается при выполнении условия: $(x_n - x_{n-1}) < \varepsilon$.

Для сходимости метода необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$f^{(2)}(x) \ne 0, \qquad f^{(3)}(x) \ne 0;$

т.е. вторая и третья производные были знако постоянны на отрезке локализации.

III. ЗАДАНИЕ

1. Написать основные соотношения для минимизации методом золотого сечения функции из таблицы заданий.
2. Провести оценку числа обусловленности задачи минимизации для указанной в таблице относительной погрешности функции и определить максимально возможную точность вычисления точки минимума.
3. Написать программу и на ЭВМ рассчитать с максимально возможной точностью точку минимума функции.

IV. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Задание. Вычислить точку минимума функции $f(x) = \mathrm{ch}\ x + \ln^2 x$ с максимально возможной точностью, если $\delta f(x)=10^{-7}$. Оценить число обусловленности для данной функции, если $\delta f(x)=10^{-11}$ и определить максимально возможную точность вычисления точки минимума.

1. Проводим грубую локализацию точки минимума. Так как область определения логарифма лежит от $x=0$ до $x\to\infty$,то точка минимума лежит на отрезке $[0,\infty]$. При $x_1=0.1$ имеем:

$$y_1 = f(0.1) = \frac{e^{0.1} + \frac{1}{e^{0.1}}}{2} + \ln^2 0.1 \approx 1 + 6 \approx 7;$$

при $x_2=1$ имеем:

$$y_2 = f(1) = \frac{e^{1} + \frac{1}{e^{1}}}{2} + 0 \approx 1.5;$$

при $x_3=3$ имеем:

$$y_3 = f(10) = \frac{e^{3} + \frac{1}{e^{3}}}{2} + 1{,}5 \approx 8.$$

Отсюда следует: $y_2<y_1$ и $y_2<y_3$. Следовательно, точка минимума лежит в интервале $0.1 \div 3$,т.е. на отрезке $[0.1,3]$.

2. Согласно (2.5) для отрезка [0.1,3] золотое сечение дается точками:

$$x_1=b-(b-a)\tau,\ x_2=a+(b-a)\tau,$$

где:

$$a=0.1;\ b=3.0;\ \tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \qquad (4.1).$$

3. Вычисляем значения $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ и сравниваем их. Если $y_1>y_2$, то точка минимума находится на отрезке $[x_1,b]$, при этом точка x_2 является точкой золотого сечения для этого отрезка. Если $y_1<y_2$, то точка минимума находится на отрезке $[a,x_2]$, а точка x_1 является точкой золотого для этого отрезка.

4. Если $y_1>y_2$, то отрезок $[a,b]$ заменяем на отрезок $[x_1,b]$ меньшей длины и переобозначаем:

$a=x_1$, $x_1=b-(b-a)\tau=x_2$, $y_1=y_2$, (4.2)

Вычисляем новые значения:

$x_2=a+(b-a)\tau$ и $y_2=f(x_2)$. (4.3)

5. Если $y_1<y_2$, то отрезок $[a,b]$ заменяем на отрезок $[a,x_2]$ меньшей длины и пере обозначаем:

$b=x_2$, $x_2=a+(b-a)\tau=x_1$, $y_2=y_1$, (4.4)

Вычисляем новые значения:

$x_1=b-(b-a)\tau$ и $y_1=f(x_1)$. (4.5)

6. Сравниваем значения y_1, y_2 и выбираем один из двух отрезков т.д. Процесс закончим, когда $(b-a)\le\varepsilon$.

7. Проводим оценку числа обусловленности задачи минимизации для функции:

$y = \mathrm{ch}\ x + \ln^2 x.:$

$$\nu_\Delta = 2 / \sqrt{|f''(x)| \cdot \overline{\Delta} f(x)}, \qquad (4.6)$$

Имеем:

$$\overline{\Delta} f(x) = \delta f(x) \cdot |f(x)| \approx 10^{-7} \cdot |f(x)|;$$

$$f''(x) = \mathrm{ch}\ x + \frac{2 - 2\ln\ x}{x^2}.$$

На отрезке [0.1;3] получаем следующие оценки:

$|f(x) \approx 1, \qquad ||f''(x)| \approx 10.$

Следовательно:

$$\Delta f(x) = 10^{-7}, \qquad \nu_\Delta = \frac{2}{\sqrt{10^{-11} \cdot 10}} \approx 2 \cdot 10^5.$$

8. Определяем погрешность $\Delta\overline{x}$. Согласно (2.4) имеем $\Delta\overline{x} \le \overline{\Delta}\overline{x} = \nu_\Delta \cdot \Delta f(x) \approx 2 \cdot 10^5 \cdot 10^{-11} = 2 \cdot 10^{-6}.$

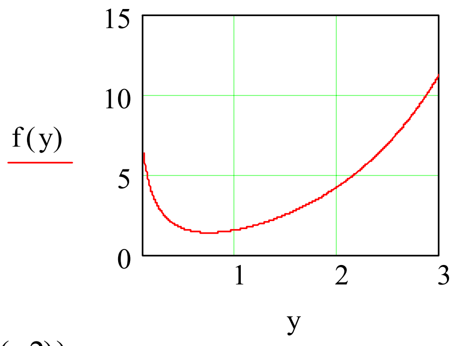
Следовательно, рассчитывать точку минимума будем с точностью не выше чем ε~$2*10^{-6}$.

9. Примеры программ на Mathcad и на Delphy (в консольном режиме) для нахождения минимума функции методами деления отрезка пополам и золотого сечения:

Поиск минимума функции методом деления отрезка попалам

$f(x) := \cosh(x) + \ln(x)^2$ $\quad a := 0.1 \quad b := 3 \quad \varepsilon := 2\cdot 10^{-6}$

$$
\mathrm{Min}(f,a,b,\varepsilon) := \left|\begin{array}{l}
k \leftarrow 1 \\
\text{while } (|b-a| > \varepsilon) \\
\quad \left|\begin{array}{l}
k \leftarrow k+1 \\
xc \leftarrow \dfrac{b+a}{2} \\
\delta \leftarrow \dfrac{\varepsilon}{10} \\
y1 \leftarrow xc - \delta \\
y2 \leftarrow xc + \delta \\
a \leftarrow y1 \ \text{ if } (f(y1) > f(y2)) \\
b \leftarrow y2 \ \text{ otherwise}
\end{array}\right. \\
xc \leftarrow \dfrac{a+b}{2} \\
y_0 \leftarrow k \\
y_1 \leftarrow xc \\
y
\end{array}\right.
$$



$$\mathrm{Min}(f,a,b,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 22 \\ 0.74072713 \end{pmatrix}$$

y_0 - количество итераций

y_1 - значение минимума

$x := 2$

$\mathrm{Minimize}(f,x) = 0.7407272$

Проверка встроенной программой MATHCAD

```
  program lab8;
     {Нахождение минимума функции методом золотого сечения}
     {a -нижняя, b- верхняя граница отрезка локализации}
     {e-точность вычисления}
     {x - точка минимума}
     {i - число итераций}
var a,b,e,t,x,x1,x2, y1,y2 : real;
var i : integer;
           function f(y : real) : real;
           {функция для заданного нелинейного уравнения}
                begin
```

```
            f:=(exp(y)+exp(y))/2+ln(y)*ln(y);
          end;      {f}
    begin
     writeln('Введите значение нижней границы отрезка локализации a');
    readln (a);
     writeln('Введите значение верхнего границы отрезка локализации b');
    readln (b);
     writeln('Введите точность вычислений e');
    readln (e);
      begin
        i:=0;
        t:=(sqrt(5)-1)/2;                          вычисление по (4.1)
        x1:=b-(b-a)*t;
        x2:=a+(b-a)*t;
        y1:=f(x1);
        y2:=f(x2);
          while abs(b-a)>=e do begin
           i:=i+1;
            if y1>y2 then begin
               a:=x1;
               x1:=x2;                             вычисление по (4.2)
               y1:=y2;
               x2:=a+(b-a)*t;                      вычисление по (4.3)
               y2:=f(x2);
              end else begin
               b:=x2;
               x2:=x1;                             вычисление по (4.4)
               y2:=y1;
               x1:=b-(b-a)*t;                      вычисление по (4.5)
               y1:=f(x1);
              end;
           end;
          x:=(a+b)/2;
       writeln('Значение точки минимума x=',x,'....','число итераций i=',i);
    end.
```

Нахождение минимума методом золотого сечения

$f(x) := \cosh(x) + \ln(x)^2 \qquad a := 0.1 \qquad b := 3 \qquad \varepsilon := 2\cdot 10^{-6}$

```
Minzol(f, a, b, ε) := | i ← 0
                      | t ← (√5 − 1)/2
                      | x1 ← b − (b − a)·t
                      | x2 ← a + (b − a)·t
                      | y1 ← f(x1)
                      | y2 ← f(x2)
                      | while |b − a| > ε
                      |    | i ← i + 1
                      |    | if y1 > y2
                      |    |    | a ← x1
                      |    |    | x1 ← x2
                      |    |    | y1 ← y2
                      |    |    | x2 ← a + (b − a)·t
                      |    |    | y2 ← f(x2)
                      |    | otherwise
                      |    |    | b ← x2
                      |    |    | x2 ← x1
                      |    |    | y2 ← y1
                      |    |    | x1 ← b − (b − a)·t
                      |    |    | y1 ← f(x1)
                      | x_1 ← (b + a)/2
                      | x_0 ← i
                      | x
```

$$\mathrm{Minzol}(f, a, b, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 30 \\ 0.741 \end{pmatrix}$$

10. Заполняем таблицу:

Метод	Корень	Точность	Число итераций
Дел. отрезка пополам	0,7407271	$2*10^{-6}$	22
Золотого сечения	0,7407271	$2*10^{-6}$	30

V. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Название лабораторной работы.
2. Индивидуальное задание.
3. Теоретическая часть.
4. Текст программы.
5. Результаты расчета.

Пункты 1-4 должны быть оформлены до начала лабораторной работы.

VI. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Необходимое и достаточное условие минимума непрерывной функции.
2. Этапы поиска минимума функции.
3. Что такое локальный и глобальный минимум?
4. Определение унимодальной функции.
5. Абсолютное число обусловленности задачи минимизации.
6. Максимально возможная точность нахождения точки минимума функции.
7. Метод оптимально пассивного поиска.
8. Метод деления отрезка пополам.
9. Метод золотого сечения.
10. В чем преимущество метода золотого сечения.
11. Метод бисекции.
12. Метод Ньютона.
13. Необходимое и достаточное условия сходимости метода Ньютона.

VII.ТАБЛИЦА ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

№	Функция f(x)	Характер экстремума	Относительная погрешность $\delta f(x)$
1	$\frac{x^2}{2} + 5\cos x$	min	10^{-8}

№	Функция f(x)	Характер экстремума	Относительная погрешность δf(x)
2	$2e^{x}-\frac{5}{2}x^{2}$	min	10^{-8}
3	$e^{-x}+x^{2}$	min	10^{-9}
4	$\frac{x^{2}}{(x-1)^{2}}+x^{4}$	min	10^{-9}
5	$\sqrt{x+x^{2}}+\frac{1}{1+x^{2}}$	min	10^{-8}
6	$\mathrm{arctg}(\sin x-\cos x)$	max	10^{-9}
7	$\frac{x^{2}-6x+4}{3x-2}+e^{2x}$	min	10^{-9}
8	$\frac{2x^{2}-1}{\sqrt{x^{2}-2}}+x^{4}$	min	10^{-8}
9	$\mathrm{sh}^{2}x+e^{x}$	min	10^{-9}
10	$\frac{1}{\ln x}+x^{2}$	min	10^{-8}
11	$\frac{1}{x}+\mathrm{ch}x$	min	10^{-8}
12	$\frac{1}{x^{2}}+\mathrm{tg}x$	max	10^{-9}
13	$\sin x^{2}+\sin^{2}x$	max	10^{-10}
14	$\frac{1}{\mathrm{sh}x}+x^{4}$	min	10^{-8}
15	$\frac{e^{x-3}}{x-3}+\ln x$	min	10^{-9}
16	$\mathrm{ch}(x-\sin(x))$	min	10^{-11}
17	$\mathrm{sh}^{2}(x^{2}+x)+x^{2}$	min	10^{-10}
18	$\frac{x^{2}-3x+4}{x^{4}+x^{2}+5}$	min	10^{-9}
19	$\frac{x^{2}-1}{\ln^{2}(x^{4}+3x^{2}+7)}$	min	10^{-10}
20	$e^{-(x-1)^{2}}+4$	max	10^{-11}

№	Функция f(x)	Характер экстремума	Относительная погрешность δf(x)
21	arctg(x)+ln(x)	max	10^{-8}
22	$\dfrac{x^4+4x-6+\sin(x)}{x^2+0.4}$	min	10^{-10}
23	$\sin(x^2+tg(x)-0.3)$	min	10^{-8}
24	$\dfrac{\cos(x+4)}{\cos(2x-2)+2}$	min	10^{-10}
25	$\dfrac{arcct(x)}{2+\ln(x^2+0.5)}$	min	10^{-11}