МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

*Кафедра программной инженерии*

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
_____________ О.Г. Локтионова
«_4_» _03_____________ 2019 г.

# РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТЫ

Методические указания к лабораторной работе №10
по дисциплине «Вычислительная математика»
направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия»

Курск 2019

УДК 519.6

Составители Е.П. Кочура, В.М. Буторин

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии И.Н. Ефремова

**Решение системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты:** методические указания к лабораторной работе №10 по дисциплине «Вычислительная математика» для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Е.П. Кочура, В.М. Буторин. Курск, 2019. 14 с.

Содержит краткие теоретические сведения по теме лабораторной работы, цель выполнения работы, задание, пример выполнения лабораторной работы, требования к составлению отчета, список контрольных вопросов, таблицу индивидуальных заданий.

Предназначено для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия».

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 04.03.19. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 0,81. Уч.-изд. л. 0,74. Тираж 100 экз. Заказ 144 .
Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет
305040, Курск, ул.50 лет Октября, 94.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №10

## РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТЫ

### I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Изучение основных определений и положений теории дифференциальных уравнений.
2. Изучение основных численных методов решения задачи Коши.
3. Изучение методов Рунге-Кутты решения системы дифференциальных уравнений.
4. Разработка алгоритма, программы и решение на ЭВМ системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты.

### II. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

**1. Основные понятия. Задача Коши.** Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, которое содержит производные от искомой функции y(x):

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{2.1}$$

где x - независимая переменная, (n) - порядок производной. Наивысший порядок n, входящий в уравнение (2.1) называется порядком дифференциального уравнения.

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_n), \tag{2.2}$$

где $c_1, c_2, ..., c_n$ - произвольные постоянные. Их количество определяется порядком уравнения.

Если значения $c_1, c_2, ..., c_n$ известны и соответственно равны $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, \ldots, c_n^{(0)}$, то из (2.2) получаем частное решение:

$$y = \varphi(x, c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, ..., c_n^{(0)}).$$

Значения $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, \ldots, c_n^{(0)}$ определяются из условий, которые называются дополнительными условиями для уравнения (2.1).

Графики частных решений называются интегральными кривыми для данного дифференциального уравнения. Общее решение можно представить в виде семейства интегральных кривых.

Если дополнительные условия задаются в одной точке, то такая задача называется задачей Коши. Дополнительные условия в задачи Коши называются начальными условиями, а точка $x=x_0$, в которой они задаются - начальной точкой.

Если дополнительные условия задаются в двух точках a и b - “краях” отрезка [a,b], где ищется решение, то такая задача называется краевой задачей.
Дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad x \in [a, b]; \tag{2.4}$$

при заданных начальных условиях $y(x_0)=y_0$ называется задачей Коши для дифференциального уравнения первого порядка.
Если мы имеем систему дифференциальных уравнений первого порядка, то задачу Коши удобно записать в векторной форме:

$$\begin{aligned} \vec{y}'(x) &= \vec{f}(x, \vec{y}(x)), \\ \vec{y}(x_0) &= \vec{y}_0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

## 2. Методы Эйлера для решения задачи Коши

### 2.1 Метод Эйлера первого порядка точности

В методе Эйлера решение уравнения (2.4) представляется следующим образом:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h, \qquad i = 0,1,2,... \tag{2.6}$$

где $x_i = x_0 + ih$, $x_0$ - начальная точка, $h = x_{i+1} - x_i$ - шаг между узлами $x_i$ и $x_{i+1}$, $y_i = y(x_i)$ - значение искомой функции y(x) в узле $x_i$, $y_{i+1} = y(x_{i+1}) = y(x_i + h)$. При i=0 имеем:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h, \tag{2.7}$$

где $y_0=y(x_0)$ - начальное значение искомой функции y(x).
Абсолютная погрешность метода Эйлера на n шаге равна:

$$R_n \le c_1 R_0 + c_2 h, \tag{2.8}$$

где $c_1$ и $c_2$ - константы, $R_0$ - погрешность начального приближения.
Согласно (2.8) метода Эйлера имеет первый порядок точности.

### 2.2 Модификации метода Эйлера второго порядка точности

**а) метод трапеции.** В этом методе решение имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i + (h/2)[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]. \tag{2.9}$$

Этот метод неявный, т.к. для определения значений $y_{i+1}$ необходимо решать нелинейное уравнение (2.9). Метод трапеций имеет второй порядок точности по h.

**б) метод Эйлера-Коши.** Данный метод является прямым методом второго порядка точности:

$$y_{i+1} = y_i + (h/2)[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))]. \tag{2.10}$$

**в) усовершенствованный метод Эйлера второго порядка точности**:

$$y_{i+1} = y_i + hf[x_i + (h/2), y_i + (h/2) f(x_i, y_i)]. \qquad (2.11)$$

## 3. Методы Рунге-Кутты для задачи Коши

**а) расчетам формулы метода Рунге-Кутты второго порядка точности** имеют следующий вид:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot k, \qquad k = \sum_{j=1}^{2} c_j k^{(j)};$$

$$k^{(1)} = f(x_i, y_i), \qquad k^{(2)} = f(x_i + \alpha h, y_i + h(k^1 / \alpha)); \qquad (2.12)$$

$$c_1 = \frac{1}{2}\alpha, \qquad c_2 = 1 - \frac{1}{2}\alpha, \qquad 0 < \alpha \le 1.$$

Данный метод является двух этапным. Вначале вычисляется значение $k^{(1)}$, а затем значения $k^{(2)}$.

При $\alpha=1$ формулы (2.12) дают метод Эйлера-Коши, при $\alpha=1/2$ - усовершенствованный метод Эйлера.

**б) метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности.** Наиболее известным из методов Рунге-Кутты является классический 4-этапный метод четвертого порядка точности:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot k_i, \qquad k_i = \frac{1}{6}(k_i^{(1)} + 2k_i^{(2)} + 2k_i^{(3)} + k_i^{(4)});$$

$$k_i^{(1)} = f(x_i, y_i), \qquad k_i^{(2)} = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_i^{(1)}), \qquad (2.13)$$

$$k_i^{(3)} = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_i^{(2)}), \qquad k_i^{(4)} = f(x_i + h, y_i + hk_i^{(3)}).$$

Этот метод прост и эффективен, когда отрезок $[x_0, x_n]$ не очень велик.

**в) метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности для системы из 2-х уравнений.** Имеется система из двух дифференциальных уравнений:

$$y'(x) = f(x, y(x), z(x)),$$

$$z'(x) = \varphi(x, y(x), z(x)).$$

Расчетные формулы для вычисления значений функции y(x) и z(x) имеют следующий вид:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_i^{(1)} + 2k_i^{(2)} + 2k_i^{(3)} + k_i^{(4)}),$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{6}(q_i^{(1)} + 2q_i^{(2)} + 2q_i^{(3)} + q_i^{(4)}); \qquad (2.15)$$

где

$$
\begin{aligned}
&k_i^{(1)} = f(x_i, y_i, z_i),\\
&k_i^{(2)} = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_i^{(1)}, z_i + \frac{h}{2}q_i^{(1)}),\\
&k_i^{(3)} = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_i^{(2)}, z_i + \frac{h}{2}q_i^{(2)}),\\
&k_i^{(4)} = f(x_i + h, y_i + hk_i^{(3)}, z_i + hq_i^{(3)}),\\
&q_i(1) = \varphi(x_i, y_i, z_i);\\
&q_i^{(2)} = \varphi(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_i^{(1)}, z_i + \frac{h}{2}q_i^{(1)});\\
&q_i^{(3)} = \varphi(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_i^{(2)}, z_i + \frac{h}{2}q_i^{(2)});\\
&q_i^{(4)} = \varphi(x_i + h, y_i + hk_i^{(3)}, z_i + hq_i^{(3)}).
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

**4. Автоматический выбор шага.** Локальная погрешность методов Рунге-Кутты точности p на i+1 шаге допускает представление:

$$R_{i+1}^{h} \approx r(x_i, y_i) \cdot h_i^{p+1}, \tag{2.17}$$

где $r(x_i,y_i)$ - непрерывная функция, p - порядок точности.
Следовательно, можем записать:

$$y(x_{i+1}) = y_{i+1}^{h_i} + r(x_i, y_i)h_i^{p+1}. \tag{2.17}$$

Здесь $y(x_{i+1})$-точное решение, $y_{i+1}^{h}$-приближенное решение с шагом h.

Уменьшим шаг интегрирования в два раза. Для вычисления значения функции $y(x_{i+1})$ нам потребуется два шага. На первом шаге погрешность будет равна:

$$R_{i+\frac{1}{2}}^{\frac{h_i}{2}} = r(x_i, y_i)(\frac{h_i}{2})^{p+1},$$

а на втором:

$$
\begin{aligned}
R_{i+1}^{\frac{h_i}{2}} &= r(x_i + \frac{h_i}{2}, y_{i+\frac{1}{2}})(\frac{h_i}{2})^{p+1} =\\
&= [r(x_i, y_i) + r'_x(x_i, y_i)\frac{h_i}{2} + r'_y(x_i, y_i)(y_{i+\frac{1}{2}} - y_i)](\frac{h_i}{2})^{p+1} =\\
&= [r(x_i, y_i) + r'_x(x_i, y_i)\frac{h_i}{2} + r'_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i)\frac{h_i}{2}](\frac{h_i}{2})^{p+1} \approx r(x_i, y_i)(\frac{h_i}{2})^{p+1}.
\end{aligned}
$$

Суммарная погрешность после двух шагов по $h_i/2$ будет равна сумме погрешностей на двух шагах:

$$R_{i+1}^{h_i} = R_{i+\frac{1}{2}}^{\frac{h_i}{2}} + R_{i+1}^{\frac{h_i}{2}} = 2r(x_i, y_i)(\frac{h_i}{2})^{p+1}. \tag{2.18}$$

Следовательно, можем записать:

$$y(x_{i+1}) = y_{i+1}^{\frac{h_i}{2}} + 2r(x_i, y_i)(\frac{h_i}{2})^{p+1}, \qquad (2.19)$$

здесь $y(x_{i+1})$ - точное решение, $y_{i+1}^{\frac{h_i}{2}}$ - приближенное решение с шагом $h_i/2$.
Вычитая из равенства (2.17) равенство (2.19) получим:

$$\left| y_{i+1}^{\frac{h_i}{2}} - y_{i+1}^{h_i} \right| = |r(x_i, y_i)|(h_i)^{p+1}[1 - \frac{1}{2^p}] = R_{i+1}^{h_i}(1 - \frac{1}{2^p}). \qquad (2.20)$$

Окончательно имеем:

$$R_{i+1}^{h} = \frac{\left| y_{i+1}^{\frac{h_i}{2}} - y_{i+1}^{h_i} \right| 2^p}{2^p - 1}. \qquad (2.21)$$

Если погрешность $R_{i+1}^{h}$ отличается от заданной погрешности R, то шаг h заменяют на новый шаг $\bar{h}$, например, уменьшают или увеличивают в два раза.

## III. ЗАДАНИЕ

1. Разработать текст программы для решения задачи Коши для системы из двух дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности.
2. Предусмотреть в программе контроль точности численного решения и автоматический выбор шага при заданной погрешности численного решения.
3. Решить задачу Коши для системы из двух дифференциальных уравнений из таблицы индивидуальных заданий.

## IV. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

**1. Задание:** Решить задачу Коши для системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} y' &= \mu \cdot y - z - \left(y^2 + z^2\right) \cdot y, \\ z' &= \mu \cdot z + y - \left(y^2 + z^2\right) \cdot z; \end{aligned} \qquad (4.1)$$

где $\mu$-параметр на отрезке [a,b], a=0,b=100 при следующих начальных условиях

$$y_0 = y(a) = 0, \qquad z_0 = z(a) = 1; \qquad (4.2)$$

с абсолютной точностью $\varepsilon=10^{-4}$ при $\mu=0.1$.

2. Для решения задачи Коши будем использовать метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности. В расчетных формулах (2.15, 2.16) имеем:

$$f(x,y,z) = \mu \cdot y - z - \left(y^2 + z^2\right) \cdot y,$$
$$\varphi(x,y,z) = \mu \cdot z + y - \left(y^2 + z^2\right) \cdot z;$$

3. Пример программ на Delphy (в консольном режиме) и на Mathcad.

```
   program lab10;
      {Решение Задачи Коши для системы из двух уравнений}
      {методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности}
      {a - начало отрезка, где необходимо найти решение}
      {b - конец отрезка, где необходимо найти решение}
      {y0,z0 - начальные условия}
      {e - точность вычисления}
      {h0 - начальное значение шага}
var a,b,y0,z0,e,h0,x,h,k1,k2,k3,k4,q1,q2,q3,q4 : real;
var u,xx,yy,zz,yh,zh,yhh,zhh,ry,rz,m : real;
var i,p,j,kk,mm : integer;
var x,y,z : array[0..5000] of real;
var outfile : text;
label m1,m2;
          function f(x,y,z: real) : real;
          {функция трех переменных f(x,y,z)}
               begin
                  f := m*y - z - (y*y + z*z)*y;                    формула (4.1)
               end;      {f}
          function g(x,y,z: real) : real;
          {функция трех переменных}
               begin
                  g := m*z + y - (y*y + z*z)*z;                    формула (4.1)
               end;      {g}
      begin
          assign(outfile,'d:\lab.dat');          объявление внешнего файла lab.dat
          rewrite(outfile);                      открытие внешнего файла для записи
        writeln('Введите значение a и значение b');
      readln (a,b);
        writeln('Введите значение y0 и значение z0');
      readln (y0,z0);
        writeln('Введите точность вычислений e');
      readln (e);
        writeln('Введите шаг h0');
      readln (h0);
            p:=4;
```

```
i:=0;
x[0]:=a;
y[0]:=y0;
z[0]:=z0;
   while x[i]<b do begin
     i:=i+1;
     kk:=0;
     mm:=0;
m2:h:=h0;
     xx:=x[i-1];
     yy:=y[i-1];
     zz:=z[i-1];
     j:=0;
m1:k1:=f(xx,yy,zz);
     q1:=g(x,yy,zz);
     k2:=f(xx+h/2,yy+k1*h/2,zz+q1*h/2);                    формулы (2.16)
     q2:=g(xx+h/2,yy+k1*h/2,zz+q1*h/2);
     k3:=f(xx+h/2,yy+k2*h/2,zz+q2*h/2);
     q3:=g(xx+h/2,yy+k2*h/2,zz+q2*h/2);
     k4:=f(xx+h,yy+k3*h,zz+q3*h);
     q4:=g(xx+h,yy+k3*h,zz+q3*h);
      if j=0 then begin
         yh:=yy+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;           вычисление с шагом h
         zh:=zz+h*(q1+2*q2+2*q3+q4)/6;
         h:=h/2;                            уменьшение шага в два раза
         j:=1;
         goto m1;                     переход на вычисление с шагом h/2
       end;
      if j=1 then begin
         yhh:=yy+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6.;      первый шаг с шагом h/2
         zhh:=zz+h*(q1+2*q2+2*q3+q4)/6.;
         xx:=xx+h;
         yy:=yhh;
         zz:=zhh;
         j:=2;
       goto m1;                       переход на второй шаг с шагом h/2
      end;
      if j=2 then begin
         yhh:=yy+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;        второй шаг с шагом h/2
         zhh:=zz+h*(q1+2*q2+2*q3+q4)/6;
      end;
     u:=exp(p*ln(2));                           вычисление 2 в степени p
```

```
          ry:=(abs(yhh-yh)*u)/(u-1.);
          rz:=(abs(zhh-zh)*u)/(u-1.);
            if (kk=0) and ((ry>e) or (rz>e)) then begin
              mm:=1;
              h0:=h0/2;          автоматическое уменьшение шага в два раза
              goto m2;
             end;
            if (mm=0) and ((ry<e) and (rz<e)) then begin
              kk:=1;
              h0:=2*h0;          автоматическое увеличение шага в два раза
              goto m2;
             end;
           x[i]:=x[i-1]+h0;
           y[i]:=yh;
           z[i]:=zh;
         writeln('i=',i,'    h0=',h0,'    x=',x[i],'    y=',y[i],'    z=',z[i]);
         writeln(outfile,'i=',i,'    h0=',h0,'    x=',x,'    y=',y[i],'    z=',z[i]);
       end;
     close(outfile);                               закрытие внешнего файла
end.
```

Решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений пераого порядка методом Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага.

$\mu := 0.1$ -параметр

$f(x,y,z) := \mu\cdot y - z - \left(y^2 + z^2\right)\cdot y$ $\qquad$ $g(x,y,z) := \mu\cdot z + y - \left(y^2 + z^2\right)\cdot z$

$:= 0$ $\qquad$ $b := 100$ $\qquad$ $y0 := 0$ $\qquad$ $z0 := 1$

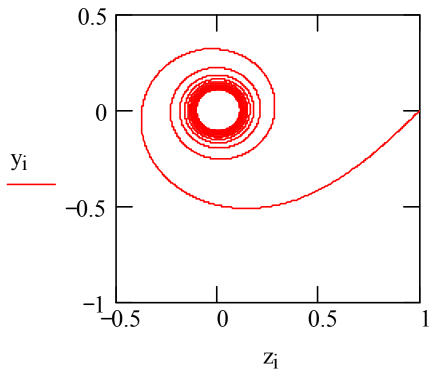
$p := 4$ $\qquad$ $h := 0.1$ $\qquad$ $\varepsilon := 10^{-5}$ $\qquad$ $pp := \dfrac{1}{1 - 0.5^{p}}$ $\qquad$ $d6 := \dfrac{1}{6}$

```
F(f,g,h) := | xx_0 ← a
            | yy_0 ← y0
            | zz_0 ← z0
            | i ← 0
            | while xx_i ≤ b
            |    | i ← i + 1
            |    | for j ∈ 1 .. 3
            |    |    | xx_i ← xx_{i−1} + h
            |    |    | k1 ← f(xx_{i−1}, yy_{i−1}, zz_{i−1})
            |    |    | q1 ← g(xx_{i−1}, yy_{i−1}, zz_{i−1})
            |    |    | k2 ← f(xx_{i−1} + 0.5·h, yy_{i−1} + k1·0.5·h, zz_{i−1} + q1·0.5·h)
            |    |    | q2 ← g(xx_{i−1} + 0.5·h, yy_{i−1} + k1·0.5·h, zz_{i−1} + q1·0.5·h)
            |    |    | k3 ← f(xx_{i−1} + 0.5·h, yy_{i−1} + k2·0.5·h, zz_{i−1} + q2·0.5·h)
            |    |    | q3 ← g(xx_{i−1} + 0.5·h, yy_{i−1} + k2·0.5·h, zz_{i−1} + q2·0.5·h)
            |    |    | k4 ← f(xx_{i−1} + h, yy_{i−1} + k3·h, zz_{i−1} + q3·h)
            |    |    | q4 ← g(xx_{i−1} + h, yy_{i−1} + k3·h, zz_{i−1} + q3·h)
            |    |    | if j = 1
            |    |    |    | yy_i ← yy_{i−1} + d6·h·(k1 + 2·k2 + 2·k3 + k4)
            |    |    |    | zz_i ← zz_{i−1} + d6·h·(q1 + 2·q2 + 2·q3 + q4)
            |    |    |    | h ← 0.5·h
            |    |    | otherwise
            |    |    |    | if j = 2
            |    |    |    |    | yh1 ← yy_{i−1} + d6·h·(k1 + 2·k2 + 2·k3 + k4)
            |    |    |    |    | zh1 ← zz_{i−1} + d6·h·(q1 + 2·q2 + 2·q3 + q4)
            |    |    |    |    | xx_{i−1} ← xx_i
            |    |    |    | if j = 3
            |    |    |    |    | yh1 ← yh1 + d6·h·(k1 + 2·k2 + 2·k3 + k4)
            |    |    |    |    | zh1 ← zh1 + d6·h·(q1 + 2·q2 + 2·q3 + q4)
            |    |    |    |    | xx_{i−1} ← xx_{i−1} − h
            |    |    |    |    | h ← 2·h
            |    | ry ← pp·|yh1 − yy_i|
            |    | rz ← pp·|zh1 − zz_i|
            |    | if ry > ε ∧ rz > ε ∧ h ≥ ε/2
            |    |    | h ← 0.51·h
            |    |    | i ← i − 1
            |    | h ← 2·h  otherwise
            |    | FF_{i,0} ← xx_i
            |    | FF_{i,1} ← yy_i
            |    | FF_{i,2} ← zz_i
            | FF_{0,0} ← xx_0
            | FF_{0,1} ← yy_0
            | FF_{0,2} ← zz_0
            | FF_{0,3} ← i
```

$cc := F(f, g, h)$ $n := cc_{0,3}$ $i := 0..n$

$x_i := cc_{i,0}$ $y_i := cc_{i,1}$ $z_i := cc_{i,2}$

$n = 5.418 \times 10^3$



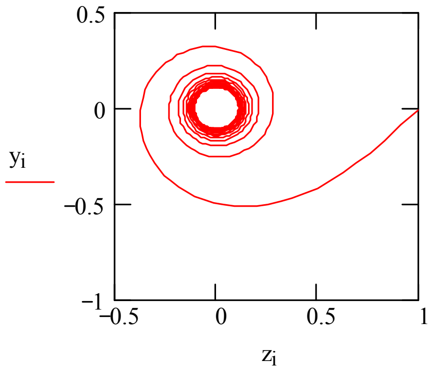

## Проверка встроенной программой Mathcad

$$x \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \mu \cdot x_0 - x_1 - \left[ (x_0)^2 + (x_1)^2 \right] \cdot x_0 \\ \mu \cdot x_1 + x_0 - \left[ (x_0)^2 + (x_1)^2 \right] \cdot x_1 \end{bmatrix}$$

$Z := \mathrm{rkfixed}(x, a, b, 1000, D)$ $i := 0..999$

$y_i := Z_{i,1}$ $z_i := Z_{i,2}$



## V. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1.Название лабораторной работы.
2.Индивидуальное задание.
3.Текст программы.
4.Таблица результатов расчета на ЭВМ.

**Замечание**: Пункты 1-4, а также таблица пункта 5 без численных результатов должны быть оформлены до начала выполнения лабораторной работы. Результаты программы в Delphy нужно вывести в виде графика используя файл с данными и соответствующую программу для построения графиков.

## VI. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое обыкновенное дифференциальное уравнение?
2. Какое дифференциальное уравнение называется разрешимым относительно старшей производной.
3. Что называется линейным дифференциальным уравнением?
4. Определение частного и общего решения дифференциального уравнения.
5. Задача Коши.
6. Краевая задача
7. Определение интегральной кривой.
8. Методы Эйлера первого и второго порядка точности.
9. Модификации метода Эйлера.
10. Методы Рунге-Кутты второго и четвертого порядка точности.
11. Методы Рунге-Кутты для систем дифференциальных уравнений.
12. Автоматический контроль погрешности и выбор шага численного решения.
13. Метод Адамса-Бошфорта.
14. Метод Адамса-Моултона.
15. Метод прогноза и коррекции.
16. Можно ли в методах Адамса контролировать точность расчетов с помощью изменения шага h?

## VII. ТАБЛИЦА ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Решить задачу Коши $y'=f(x,y,z)$, $z'=\varphi(x,y,z)$; при $y_0=y(a)$, $z_0=z(a)$, на отрезке $[a,b]$ с заданной абсолютной погрешностью $\varepsilon$.

| № | f(x,y,z) | φ(x,y,z) | y(a) | z(a) | a | b | ε |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\mathrm{arctg}1/(1+y^2+z^2)$ | $\sin(yz)$ | 1 | 1 | -1 | 1 | $10^{-3}$ |
| 2. | $\mathrm{arctg}(x^2+z^2)$ | $\sin(x+y)$ | 0,5 | 1,5 | 0 | 2 | $10^{-4}$ |
| 3. | $x^2y+z$ | $\cos(y+xz)$ | -1 | 1 | 0 | 4 | $10^{-3}$ |
| 4. | $x^2+z^2$ | $xyz$ | 1 | 2 | 0 | 5 | $10^{-4}$ |
| 5. | $\sin z$ | $\cos y$ | 0,5 | -0,5 | 1 | 3 | $10^{-3}$ |
| 6. | $x\cos(x+z)$ | $\sin(y-z)$ | -0,6 | 2 | 2 | 5 | $10^{-4}$ |
| 7. | $\sin y\cos^3 z$ | $\cos y\cos z$ | 1 | 0 | -1 | 3 | $10^{-3}$ |
| 8. | $2\sqrt{3x^2+y^2+z}$ | $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ | 0,5 | 1,2 | 0 | 2 | $10^{-4}$ |
| 9. | $(y+x)/e^{y+z}$ | $(z-x)/e^{y+z}$ | 1 | -1 | 2 | 4 | $10^{-3}$ |
| 10. | $(3+e^{-z})^{-1}$ | $(2+e^{-y})^2$ | 0 | -3 | 2 | 5 | $10^{-4}$ |
| 11. | $\cos(yz)$ | $\sin(y+z)$ | 2 | 1 | 0 | 2 | $10^{-3}$ |
| 12. | $y\ln x$ | $y+z^2$ | -2 | -1 | 1 | 4 | $10^{-4}$ |
| 13. | $x+y^2$ | $(y-z)^2$ | 3 | 1 | -1 | 1 | $10^{-4}$ |
| 14. | $y^2+z^2$ | $yz$ | -1 | 1 | 0 | 4 | $10^{-3}$ |
| 15. | $e^{yz}$ | $e^{-yz}$ | 0 | 0 | 0 | 2 | $10^{-4}$ |
| 16. | $y+z+y^3+z^3$ | $y-z+z^3+y^3$ | 0 | 1 | 1 | 20 | $10^{-4}$ |
| 17. | $y+z^2+y^3+z^3$ | $-y^2+z^2+y^3+z^3$ | 0 | -2 | 0 | 10 | $10^{-4}$ |
| 18. | $y+z+(z+y)yz$ | $y-z+(z+y)yz$ | 1 | 1 | 2 | 12 | $10^{-3}$ |
| 19. | $\sin y+\cos^3 z$ | $\sin^3 y+\cos^3 z$ | 1 | 0 | 0 | 5 | $10^{-4}$ |
| 20. | $\sin y^2+\cos^3 z^2$ | $\sin y^2-\cos z^2$ | | | | | $10^{-3}$ |