

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич  
Должность: ректор  
Дата подписания: 16.12.2021 21:01:02  
Уникальный программный ключ:  
9ba7d3e34c012eba476ffd2d0646009a3e6a12741160c5e936f06

## МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра биомедицинской инженерии

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебной работе  
О.Г. Локтионова  
« 1 » \_\_\_\_\_ 2018 г.



### ТЕОРИЯ АНАЛИЗА И КЛАССИФИКАЦИИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

Методические рекомендации по организации и выполнению  
практических занятий для аспирантов направлений подготовки 12.06.01  
и 09.06.01

Курск 2018

УДК 004.93:61

Составитель: С.А. Филист.

Рецензент

Доктор технических наук, профессор А.Ф. Рыбочкин

**ТЕОРИЯ АНАЛИЗА И КЛАССИФИКАЦИИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ:** Методические рекомендации по организации и выполнению практических занятий / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: С.А. Филист. - Курск, 2018. - 77с.

Методические указания по структуре, содержанию и стилю изложения материала соответствуют требованиям, предъявляемым к учебным и методическим пособиям.

Предназначены для аспирантов направлений подготовки 12.06.01 «Фотоника, приборостроение, оптические и биотехнические системы и технологии (Приборы, системы и изделия медицинского назначения)» и 9.06.01 «Информатика и вычислительная техника» (специализация - «Системный анализ, управление и обработка информации (технические и медицинские системы)»).

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 1.03.18. Формат 60x84 1/16.  
Усл.печ.л. 4,5. Уч.-изд.л. 34 Тираж 100 экз. Заказ: 1453. Бесплатно. Юго-  
Западный государственный университет.  
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

# ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1. ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ФОРМИРОВАНИЯ ФАЙЛОВ ДАННЫХ С ЦИФРОВЫМИ ОТСЧЕТАМИ СИГНАЛОВ

## 1.1 Краткие теоретические сведения

Во многих случаях непрерывные сигналы, поступающие с выхода измерительного устройства, не обрабатываются непосредственно, а сначала подвергаются дискретизации, то есть наблюдаются только в определенные моменты времени. В общем случае наблюдения производятся периодически через постоянный промежуток времени  $T$  – шаг дискретизации. Следовательно, для физической реализации процесса дискретизации необходимо осуществить свертку дискретизируемой функции  $x(\tau)$  с импульсом Дирака:

$$x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - \tau)dt \quad (1.1)$$

при  $\tau = 0, T, 2T, 3T \dots$

Перейдем от периода дискретизации  $T$  к частоте дискретизации  $F = \frac{1}{T}$  и перепишем равенство (1.1) в дискретной форме:

$$x(\tau) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{k}{F_c}\right). \quad (1.2)$$

Учитывая формулу Пуассона, согласно которой  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{k}{F_c}\right) \Leftrightarrow F_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v - nF_c)$ , и теорему свертки, согласно которой умножение оригиналов соответствует свертка Фурье-образов, из (1.2) получим:

$$x(\tau) \Leftrightarrow F_c X(\nu) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - nF_c). \quad (1.3)$$

Из выражения (1.3) следует, что спектр дискретного сигнала  $x(\tau)$  представляет собой «периодическую» функцию с периодом  $F_c$ , показанную на рисунке 1.1.

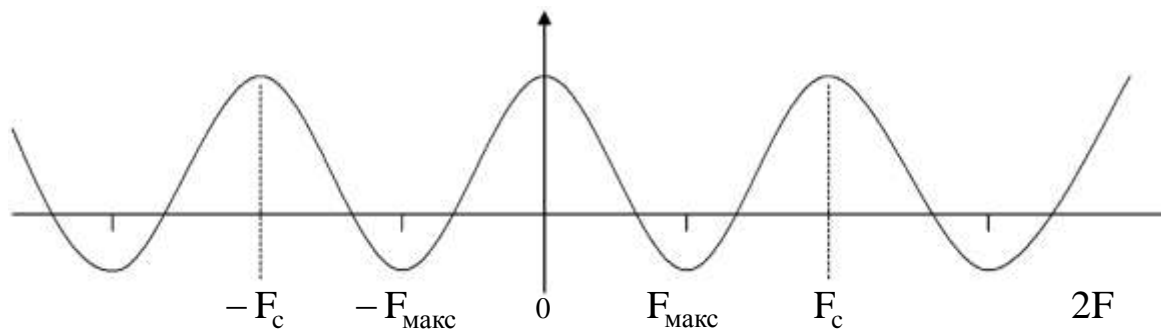


Рисунок 1.1 – Спектр дискретного сигнала

В данном случае спектр сигнала  $x(t)$  расположен в интервале  $(-F_{\text{макс}}, F_{\text{макс}})$  и, согласно теореме Шеннона, для того, чтобы периодическое повторение спектра, вызванное дискретизацией сигнала, не изменяло повторяемый спектр, необходимо и достаточно выполнения неравенства  $F_c \geq 2F_{\text{макс}}$ .

В этом случае сигнал может быть восстановлен по дискретным значениям по интерполяционной формуле

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{k}{F_c}\right) \cdot \frac{\sin \pi F_c (t - k/F_c)}{\pi F_c (t - k/F_c)}. \quad (1.4)$$

Для ответа на вопрос «Как следует на практике производить дискретизацию сигнала?» – необходимо знать, с какой целью осуществляется эта операция: в целях дальнейших вычислений или в целях восстановления сигнала.

Пусть мы дискретизируем сигнал  $x(t)$ , в целях дальнейших вычислений, который имеет спектр Фурье  $X(\nu)$ , где  $\nu$  лежит в интервале  $[-F; F]$ . Согласно теореме Шеннона, шаг дискретизации  $T$  должен удовлетворять неравенству  $T \leq \frac{1}{2} \cdot F$ . Если дискретизация функции  $x(t)$  произведена при выполнении этих условий, то по значениям  $x_k = x(kT)$  функции  $x(t)$  в точках дискретизации можно восстановить непрерывный сигнал  $x(t)$  по интерполяционной формуле Шеннона (1.4).

Таким образом, вычисление любых значений функции  $x(t)$  сводится к вычислению ее значений  $x(kT)$  в точках дискретизации, то есть вся информация о функции  $x(t)$  содержится в точках дискретизации.

Пусть мы дискретизируем сигнал с целью восстановления непрерывного сигнала.

Хотя интерполяционная формула Шеннона (1.4) теоретически обоснована, ее практическое применение, особенно при приближенных вычислениях, затруднительно.

Обозначим через  $S(t)$  и  $S_1(t)$  точный и восстановленный сигналы. Пусть  $\varepsilon = \Delta S_M(t) / S_M(t) = (S_M(t) - S_1(t)) / S_M(t)$ , где  $S_M(t)$  – максимальное значение  $S(t)$ . Доказано, что для синусоидального сигнала с частотой  $F$ , частота дискретизации  $F_c$  должна удовлетворять неравенству:

$$F_c \geq F \left( \frac{2,2}{\sqrt{\varepsilon}} \right),$$

где  $\varepsilon$  – допустимая ошибка.

Если  $\varepsilon = 0,01$ , то  $F_c \geq 22 \cdot F$ , т.е. частота дискретизации должна быть приблизительно в 10 раз больше частоты Шеннона.

Пусть спектр сигнала обрезан максимальной частотой  $F_c$ . Доказано, что в этом случае:

$$F_c \geq F_c \left( 2,2 / \sqrt{\varepsilon} \right).$$

Например, если ошибка  $\varepsilon \leq 0,01$ , то должно быть  $F_e \geq 22 \cdot F_c$ .

После дискретизации из непрерывного сигнала получается дискретный сигнал. Ось времени  $t$  разбивается на равные интервалы  $\tau$ . Получают, как показано на рисунок 1.2, а,  $N - 1$  интервала дискретизации. При этом на оси времени отмечают  $N$  точек, координатами которых являются следующие значения  $t$ :  $0; \tau; 2\tau; \dots, (N - 1)\tau$ . Для каждой из этих точек берется отвечающее ей значение  $x$ : производится отсчет исходной функции в данной точке.

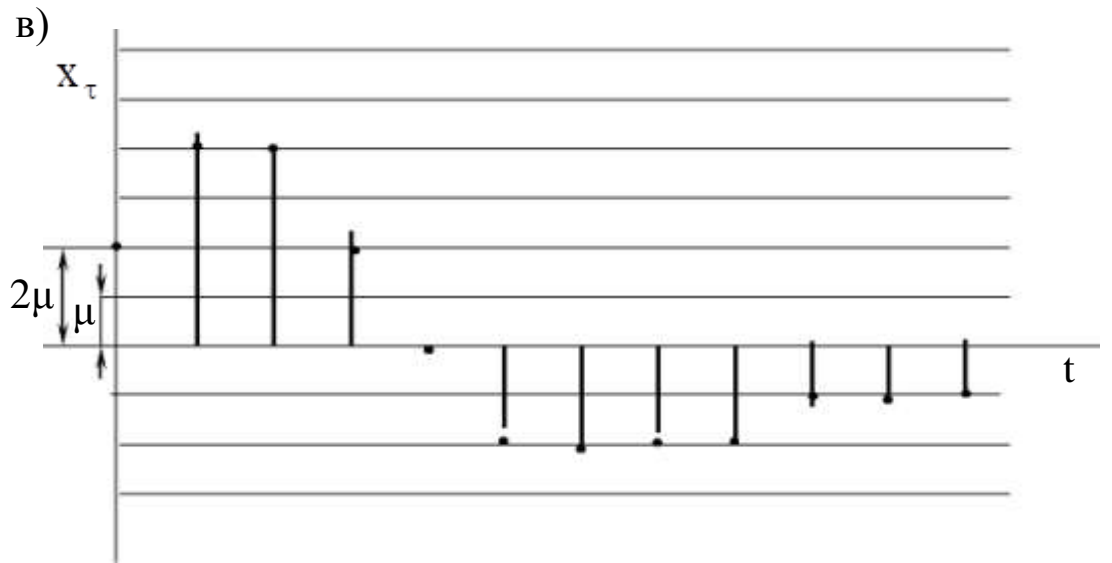
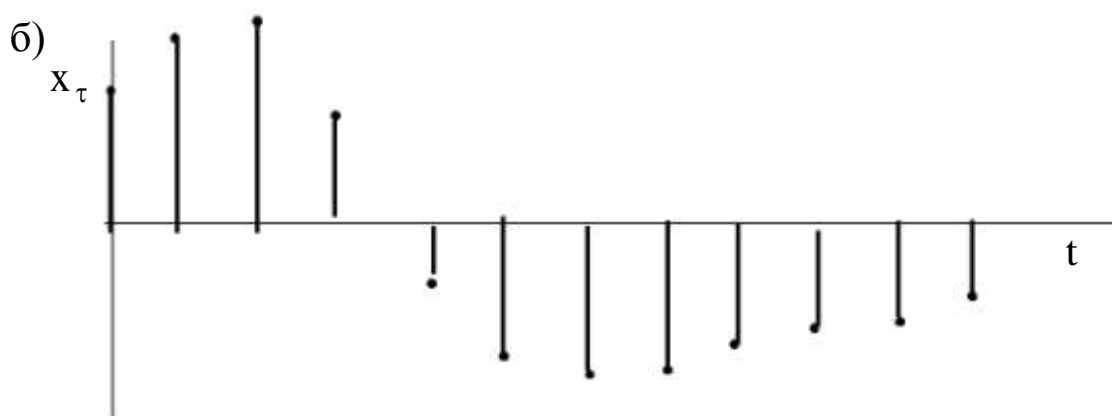
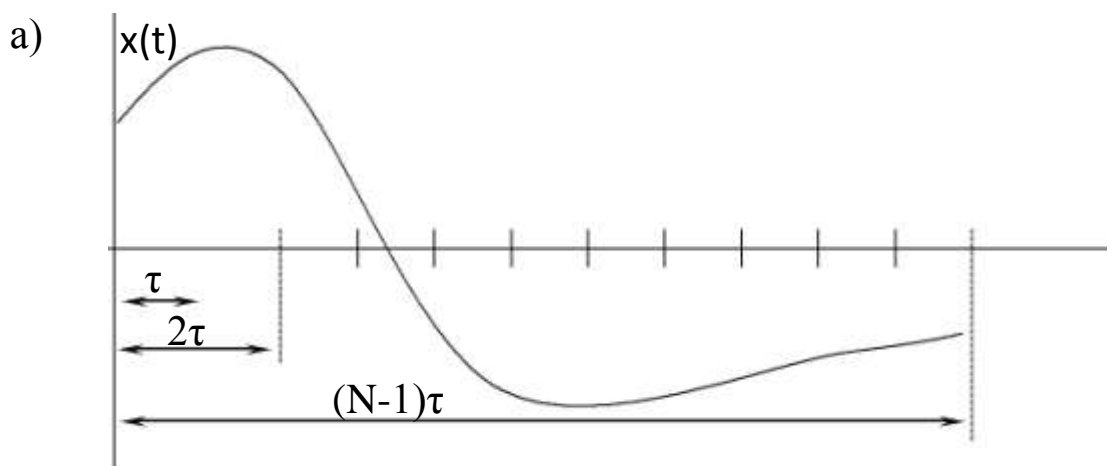


Рисунок 1.2 – а) исходный непрерывный сигнал;  
 б) дискретизированный сигнал; в) цифровой сигнал

Принято изображать полученное дискретное значение переменной величины, опуская из каждой из указанных точек перпендикуляр на ось  $t$ . Таким образом, получается, так называемая, решетчатая функция в виде

дискретных значений  $x$ , для которых примем обозначение  $x_t$  (рисунок 1.2, б).

Для того, чтобы дискретизированные указанным образом величины могли быть подвергнуты обработке с помощью цифровых устройств, необходимо из дискретного сигнала получить цифровой сигнал. Для нахождения его производится квантование по уровню: ось  $x_t$  разбивается, как показано на рисунке 1.2, в, на ряд интервалов и с точностью до единицы отсчета  $\mu$  определяется величина каждой из дискрет-ординат  $x_t$ . Полученные значения ординат кодируются и в таком виде вводятся в цифровое устройство.

## 1.2. Объект исследования

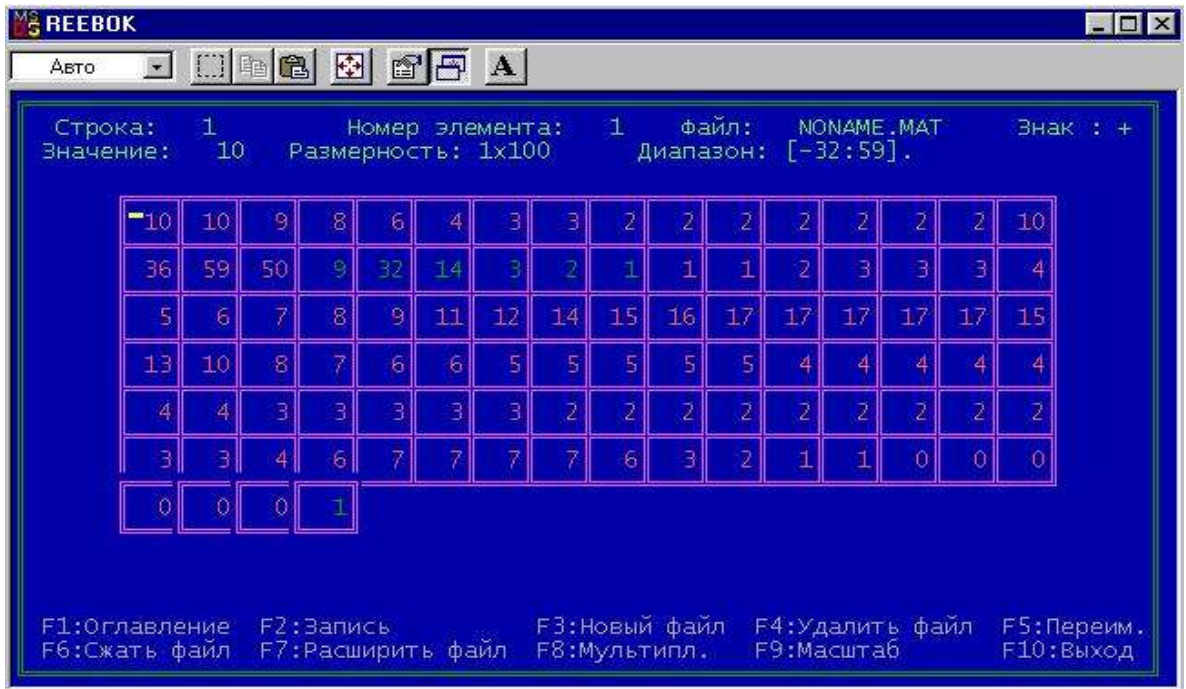
Объектом исследования в данной лабораторной работе является электрокардиосигнал с различными патологиями, взятый из атласа клинических электрокардиограмм. Рекомендуется использовать электрокардиограммы из атласа [3]. Выбранный электрокардиосигнал дискретизируется и квантуется. Необходимо сначала получить ксерокопию выбранного электрокардиосигнала, а затем с помощью программы REEВОК сохранить полученные отсчеты в файле данных.

Разрешение, с которым электрокардиосигнал представлен в атласе [3], составляет 1 мм как по вертикали, так и по горизонтали. Масштабы сигналов, представленных в атласе, составляют 25 мм/с и 10 мм/мВ. Реально, на 1 мм мы можем получить не более двух отсчетов, следовательно, частота дискретизации составит не более 50 Гц. Однако это вполне достаточно для исследуемого сигнала, так как он получен с помощью электромеханического самописца, который является фильтром нижних частот и имеет большую постоянную времени.

Оцифровка электрокардиосигнала осуществляется с помощью программы REEВОК, которая имеет два окна: окно графического редактора и окно текстового редактора. Возможные виды этих окон показаны на рисунке 1.3, а и 1.3, б.



а)



б)

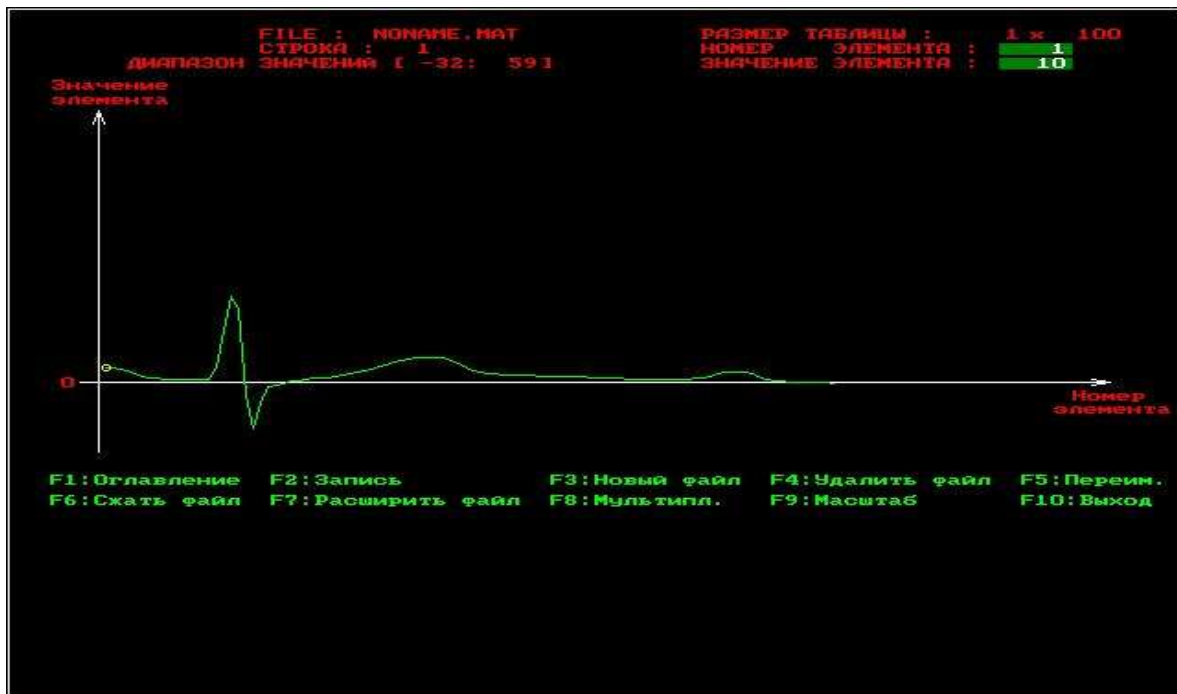


Рисунок 1.3 – Окна программы REEBOK: а) окно графического редактора, б) окно текстового редактора

В каждом окне имеется оконное меню, управляемое посредством функциональных клавиш. Процесс создания файла данных начинается с нажатия клавиши F3 – создать файл. Создаваемый файл имеет заголовок, после которого идут данные по умолчанию представляемые в виде матрицы целочисленных данных, которая может иметь произвольную размерность. Максимальная размерность матрицы файла 128x128 элементов. Если векторный сигнал имеет длину более 128 (точнее более 144) отсчетов, то его целесообразно сегментировать и представить в виде матрицы, которую записать в файле с помощью программы REEВOK. Если данные необходимо обрабатывать в векторной, а не в матричной форме, то после выборки данных из файла, полученная матрица разворачивается по строкам в вектор.

Формат файла данных, получаемый с помощью этой программы, иллюстрирует Листинг 1. Как видно из него перед размещением данных в файле вначале записывается заголовок длиной в 30 байт. Таким образом, файл данных является нетипизированным и запись и считывание из него ведется с помощью процедур работы с нетипизированными файлами, ознакомиться с которыми можно в [2].

Листинг 1.

```
PFHeader = ^FHeader;
```

```
FHeader = record           { заголовок файла данных }
    DataType :string[4];    { тип данных REAL или INTG}

    Cols :longint;          { число столбцов }
    Lines :byte;            { число строк }
    Frequency :longint;     { частота дискретизации }
    Time :longint;          { время наблюдения }
    Period :longint;        { период наблюдения }
    Pause :longint;         { период паузы }
```

```
Min,Max :integer;      { минимальный и максимальный }  
                        { элементы }  
end;                   { всего 30 байт }
```

В программе REEВОК из элементов заголовка, представленных в Листинге 1, указываются только число столбцов, число строк, максимальный элемент массива и минимальный элемент массива. Необходимо помнить, что хотя целочисленные переменные могут принимать значения в диапазон  $(-1024... +1024)$ , динамический диапазон сигнала не должен превышать 200. Это объясняется тем, что не все режимы мониторов отображают более 200 точек по вертикали.

Данные целесообразно вводить в текстовом редакторе, а корректировать в графическом редакторе. При этом в окне текстового редактора отображаются элементы только одной строки. Переход по строкам, если их больше одной, осуществляется клавишами PageUp – PageDown. Выбор элемента строки осуществляется клавишами "→", "←", "↓", "↑". После ввода числа в ячейку необходимо подтвердить ввод клавишей "Enter". В противном случае в ячейке останутся старые данные.

Подсказки и параметры ввода расположены в верхней части окна. Меню располагается в нижней части окна. После ввода данных их необходимо записать с помощью клавиши F2. Имя файла вводится после команды создать файл (F3). Расширение файла данных .mat формируется автоматически.

### **1.3. Цель работы**

Изучить методы получения цифровых сигналов и программное обеспечение для формирования файлов данных с цифровыми отсчетами сигналов.

### **1.4. Порядок выполнения работы**

1. Изучите раздел «Дискретизация непрерывных сигналов»

[1].

2. Из атласа [3] отсканируйте страницу с электрокардио-сигналами выбранной патологии. Каждый студент получает свой индивидуальный вариант (номер страницы атласа с индивидуальным вариантом записывается в журнал преподавателя). Выберите три непрерывных сигнала из разных отведений (по консультации с преподавателем). В указанных трех сигналах обязательно должен присутствовать сигнал второго отведения. Изобразите теоретический спектр электрокардиосигнала. Определите теоретическую частоту дискретизации сигналов.

3. Изучите программу моделирования данных REEВОК и ее графический и символьный интерфейсы, обратите особое внимание на структуру файла и его заголовков.

4. Выбрав частоту дискретизации сигналов, полученных в п. 2, и задавшись остальными параметрами заголовка файла данных, получите с помощью программы REEВОК файлы данных согласно п. 1.

5. Сосчитайте заголовки файлов данных и сами данные с помощью программы, имеющейся в базе данных или разработанной самостоятельно. Сделайте необходимые выводы.

### **1.5. Содержание отчета**

1. Ксерокопия исследуемого сигнала.

2. Распечатки окон графического редактора с исследуемыми сигналами.

3. Предполагаемый вид спектра исследуемого сигнала и расчет теоретических значений его частоты дискретизации.

4. Распечатка листингов созданных программ.

5. Распечатка заголовков созданных файлов данных.

6. Электронная форма на компакт-диске.

7. Выводы.

### **1.6. Контрольные вопросы**

1. Чем отличается дискретный сигнал от цифрового?
2. Дайте определение Найквистовской частоты дискретизации.
3. Как изменится спектр сигнала, если он дискретизирован с частотой, меньшей, чем Найквистовская?
4. С какой целью перед дискретизацией аналоговый сигнал подвергают низкочастотной фильтрации? Как выбирается частота среза этого фильтра?
5. Нарисуйте структурную схему дискретизатора. Как в ней реализуется соотношение (1.1)?
6. Какие искажения имеют место при переходе от цифрового сигнала к непрерывному? Как реализуется этот переход?
7. Какие искажения дискретного сигнала вызывает отличие дискретизирующего импульса от  $\delta$ -импульса Дирака?
8. Нарисуйте частотную характеристику усилительного тракта электрокардиосигнала.
9. С чем связаны искажения сигнала при его квантовании? Как изменится спектр функции в результате квантования?
10. С чем связаны искажения сигнала при его дискретизации? Как изменится спектр функции в результате дискретизации?
11. Объясните, почему в кино колесо отправляющего поезда сначала медленно вращается вперед, потом останавливается, а затем начинается вращаться назад?
12. Пусть мы имеем сигнал вида  $\cos(8\pi/3t - \pi/3)$ . Какова самая низкая искажаемая дискретизацией частота, если шаг дискретизации равен единице?
13. Как изменится спектр функции в результате квантования? Покажите, что это преобразование нелинейное.
14. Представьте алгоритм равномерного квантования функции  $f(t)$ .
15. Пусть мы дискретизируем функцию  $\cos(8\pi/3t - \pi/3)$  с шагом дискретизации единица. Трансформируется ли при этом частота, если да, то в какую?
16. К каким сигналам: дискретным или непрерывным может быть применено поэлементное квантование?
17. Представьте алгоритм равномерного квантования функции  $f(t)$  в логарифмическом масштабе.
18. Чем определяются погрешности квантования?

19. Пусть мы имеем сигнал вида  $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \cos(2\pi n x / 9 + \pi / 3)$ . Какова самая низкая искажаемая дискретизацией частота, если дискретизация ведется в точках, соответствующих целым значениям  $x$ ?
20. Чем принципиально отличается спектр непрерывной и спектр дискретной функции?
21. Колесо велосипеда вращается с частотой 100 Гц. Какова кажущая частота вращения колеса, если стробоскоп дает вспышки с частотой 99 вспышек в 1 с?
22. Используя простые тригонометрические соотношения показать, что в точках дискретизации любая синусоида произвольной частоты  $f$  равнозначна синусоиде, лежащей в интервале  $[0, 1/(2f)]$ . Дискретизация ведется с найквистовской частотой в целые моменты  $t$ .
23. Приведите случаи, когда доказательство теоремы отсчетов будет некорректно.
24. Перечислите случаи, когда необходимо уменьшать шаг дискретизации по сравнению с расчетным. Почему рекомендуется это делать всегда.
25. Как изменится спектр сигнала при его дискретизации? Покажите, что это преобразование линейное.

## 1.7. Порядок защиты работы

Работа может быть зачтена, если студент представил отчет согласно пункта 1.5, исследуемые в работе сигналы соответствуют индивидуальному варианту, электронная форма соответствует представленному тексту, и студент дал исчерпывающие ответы на 10 произвольных вопросов из пункта 1.6.

## Список литературы

1. Сергиенко, А. Б. Цифровая обработка сигналов: учебное пособие / А.Б. Сергиенко. - 2-е изд. - СПб.: Питер, 2006. - 751 с.

2. Бежанова, М. М. Практическое программирование. Приемы создания программ на языке Паскаль: учебное пособие / М.М. Бежанова, Л.А. Москвина. - М. : Научный мир, 2001. - 269 с.

3. Струтынский, А. В. Электрокардиограмма: анализ и интерпретация / А. В. Струтынский. - 7-е изд. - М. : МЕДпресс-информ, 2007. - 224 с.

## Практическая работа №2 «Моделирование квазипериодических сигналов»

### 2.1. Краткие теоретические сведения

При модуляции параметров немодулированного (несущего) колебания:

$$u_{\omega} = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (2.1)$$

формируется модулированное колебание, которое в общем случае можно записать в виде:

$$u = U(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = U(t) \cos \Phi(t), \quad (2.2)$$

где  $\omega_0$  – несущая частота;  $\Phi(t) = (\omega_0 t + \varphi(t))$  – мгновенная фаза колебания.

Амплитуда  $U(t)$  и фазовый сдвиг  $\varphi(t)$  колебания (2.2) изменяются в зависимости от модулирующего сигнала  $s(t)$ .

Спектр модулированного колебания (2.2) обычно оказывается шире спектра модулирующего сигнала.

#### 2.1.1. Амплитудно-модулированные колебания

При амплитудной модуляции происходит изменение амплитуды  $U(t)$  модулированного колебания при постоянной начальной фазе  $\varphi$ . Выражение (2.2) принимает вид:

$$u_{AM} = U(t) \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (2.3)$$

Огибающая (амплитуда) модулированного колебания изменяется вокруг среднего значения  $U_0$  и связана с модулирующим сигналом  $s(t)$  линейным соотношением:

$$U(t) = U_0 + k_A s(t), \quad (2.4)$$

где  $k_A$  – коэффициент пропорциональности, такой, что при любых  $t$  обеспечивается  $U(t) \geq 0$ .

Модуляция гармоническим сигналом (тональная модуляция). Если модулирующий сигнал  $s(t)$  является гармоническим колебанием, т. е.



$$s(t) = S \cos(\Omega t + \Psi), \quad (2.5)$$

то, согласно (2.4), огибающая модулированного колебания имеет вид:

$$U(t) = U_0 + \Delta U \cos(\Omega t + \Psi), \quad (2.6)$$

где  $\Omega$  – частота модуляции ( $\Omega \ll \omega_0$ );  $\psi$  – начальная фаза огибающей;  $\Delta U = k_A S$  – наибольшее отклонение амплитуды от среднего значения. Мгновенное значение подобного тонально-модулированного колебания выражается как:

$$u_{AM} = U_0 [1 + M \cos(\Omega t + \Psi)] \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (2.7)$$

где отношение  $M = \Delta U / U_0$ , называемое коэффициентом модуляции, является одним из основных параметров АМ колебания.

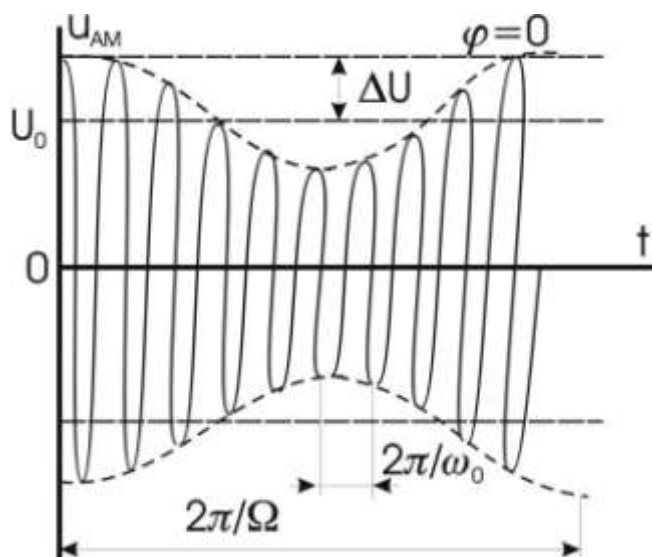


Рисунок 2.1 – Временная диаграмма колебания (2.7)

Колебание  $u_{AM}$  имеет дискретный спектр, состоящий из трех высокочастотных спектральных составляющих. Первое слагаемое правой части представляет собой исходное немодулированное колебание с частотой  $\omega_0$  и начальной фазой  $\varphi$ . Второе и третье слагаемые называют соответственно верхней и нижней боковыми составляющими. Они расположены симметрично относительно не-сущего колебания на верхней ( $\omega_0 + \Omega$ ) и нижней ( $\omega_0 - \Omega$ ) боковых частотах модуляции и имеют соответственно начальной фазы  $(\varphi + \Psi)$  и  $(\varphi - \Psi)$ . Амплитуды

боковых составляющих равны  $U_0 M/2$ . При неискаженной модуляции  $U_0 M/2 \leq U_0/2$  ( $M \leq 1$ ). Рисунок 2.2 иллюстрирует формирование спектра АМ колебания. На рисунке 2.2, а изображен спектр колебаний до модуляции. При модуляции (в результате перемножения функций  $\cos \Omega t - \cos \omega_0 t$ ) происходит сдвиг спектра модулирующего сигнала на величину  $\omega_0$  и расширение спектра (рисунок 2.2, б). Ширина полосы частот  $2\Delta\omega_{AM}$ , занимаемой АМ колебанием, определяется удвоенной частотой модулирующего сигнала.

$$2\Delta\omega_{AM} = 2\Omega.$$

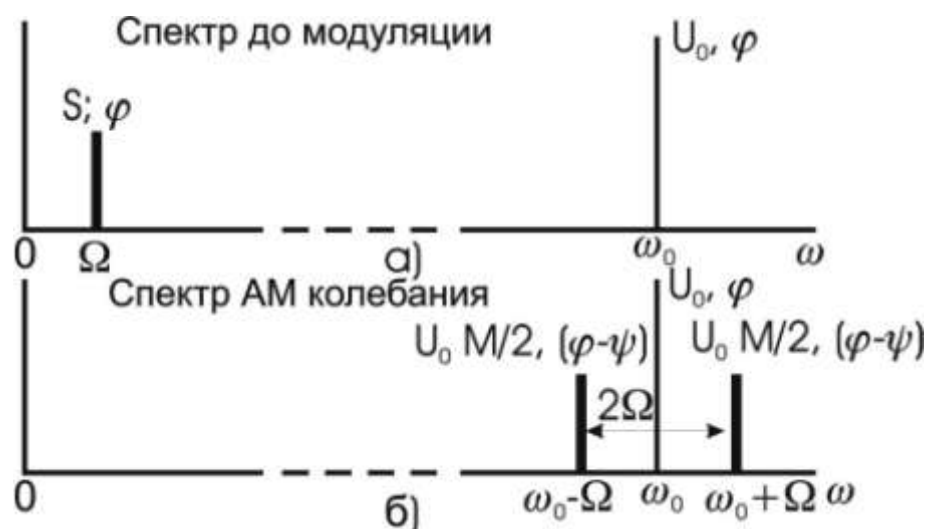


Рисунок 2,2 – Спектр колебаний до модуляции

Модуляция произвольным периодическим сигналом. Периодический модулирующий сигнал  $s_n(t)$  может быть представлен рядом Фурье вида (2.8):

$$s_n(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \Psi_n), \quad (2.8)$$

где  $\Omega$  – основная частота модулирующего сигнала.

Если отнести постоянную составляющую  $A_0/2$  ряда Фурье к амплитуде несущего колебания  $U_0$ , то огибающую  $U(t)$  модулированного колебания можно записать так:

$$U(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta U_n \cos(n\Omega t + \psi_n), \quad (2.9)$$

где  $\Delta U_n = k_A A_n$ .

Каждая спектральная составляющая модулирующего сигнала (2.8) так же, как при тональной модуляции, создает две боковые частоты в спектре модулированного колебания.

Если ширину спектра  $\Delta\Omega$  модулирующего сигнала определить как:

$$\Delta\Omega = \Omega_{\max} = m\Omega,$$

где  $\Omega_{\max}$  – максимальная частота, которая учитывается в спектре этого сигнала, соответствующая  $m$ -й гармонике, то ширина спектра АМ колебания равна:

$$2\Delta\omega_{\text{АМ}} = 2\Omega_{\max}.$$

Модуляция непериодическим сигналом. В случае модуляции непериодическим сигналом  $s(t)$  со спектральной плотностью  $G(\omega)$  огибающую  $U(t)$  и АМ колебание  $u_{\text{АМ}}(t)$  можно записать в виде:

$$U(t) = U_0 + k_A s(t), \quad (2.10)$$

$$u_{\text{АМ}}(t) = [U_0 + k_A s(t)] \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (2.11)$$

спектральная плотность огибающей, сосредоточенная в области нижних частот, «раздваивается» и переносится в область высоких частот, смещаясь на  $\pm\omega_0$ . спектральная плотность  $G_{\text{АМ}}(\omega)$  АМ колебания имеет две составляющие:  $1/2G_u(\omega - \omega_0)$  и  $1/2G_u(\omega + \omega_0)$ , сконцентрированные вблизи частот  $\omega_0$  и  $-\omega_0$  соответственно. Ширина спектра  $2\Delta\omega_{\text{АМ}}$  АМ колебания вдвое превышает ширину спектра  $\Delta\omega_U$  огибающей.

### 2.1.2. Колебания с угловой модуляцией

Общие понятия. При угловой модуляции под действием модулирующего сигнала происходит изменение фазового сдвига  $\varphi(t)$  несущего колебания (2.1) при постоянной амплитуде  $U_0$ . Модулированное колебание (2.2) принимает вид

$$u(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + \varphi] = U_0 \cos \Phi(t). \quad (2.12)$$

Изменение фазового сдвига  $\varphi(t)$  происходит как при модуляции мгновенной частоты  $\omega(t)$ , так и при модуляции непосредственно фазового сдвига  $\omega(t)$  колебания (2.12). Поэтому различают два вида угловой модуляции: частотную модуляцию (ЧМ) и фазовую модуляцию (ФМ).

При частотной модуляции имеет место линейная связь между мгновенной частотой  $\omega(t)$  колебания (2.12) и модулирующим сигналом  $s(t)$ :

$$\omega(t) = \omega_0 + \omega_D s(t)^* , \quad (2.13)$$

где  $\omega_D$  – девиация частоты, т. е. максимальное отклонение частоты  $\omega(t)$  от  $\omega_0$ .

Полная фаза  $\Phi(t)$  ЧМ колебания определяется как интеграл от мгновенной частоты (2.13):

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int \omega(t) dt + \varphi = \int [\omega_0 + \omega_D s(t)] dt + \varphi = \\ &= \omega_0 t + \omega_D \int s(t) dt + \varphi = \omega_0 t + \varphi(t) , \end{aligned} \quad (2.14)$$

где фазовый сдвиг:

$$\varphi(t) = \omega_D \int s(t) dt + \varphi . \quad (2.15)$$

При этом ЧМ колебание принимает вид:

$$u_{\text{ЧМ}} = U_0 \cos[\omega_0 t + \omega_D \int s(t) dt + \varphi] . \quad (2.16)$$

Таким образом, фазовый сдвиг  $\varphi(t)$  ЧМ колебания изменяется по закону интеграла от модулирующего сигнала  $s(t)$ .

Частотно-модулированный сигнал можно получить на выходе частотного модулятора, в котором модулирующий сигнал  $s(t)$  либо непосредственно управляет угловой частотой  $\omega(t)$  несущего колебания в соответствии с выражением (2.13), либо после интегрирования управляет фазовым сдвигом  $\varphi(t)$  несущего колебания согласно выражению (2.15).

При фазовой модуляции в соответствии с модулирующим сигналом  $s(t)$  изменяется фазовый сдвиг:

$$\varphi(t) = \varphi + ms(t), \quad (2.17)$$

где  $\varphi$  – начальная фаза немодулированного колебания;  $m$  – индекс угловой модуляции, т. е. максимальное отклонение фазы колебания (2.12) от начальной фазы  $\varphi$ . Учитывая (2.17), полную фазу  $\Phi(t)$  модулированного колебания (2.12) можно определить по формуле

$$\Phi(t) = \omega_0 t + ms(t) + \varphi. \quad (2.18)$$

При этом фазомодулированное колебание принимает вид:

$$u_{\text{ФМ}} = U_0 \cos[\omega_0 t + ms(t) + \varphi]. \quad (2.19)$$

Мгновенная частота ФМ колебания, равная:

$$\omega(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \omega_0 + m \frac{ds(t)}{dt}, \quad (2.20)$$

изменяется по закону производной от модулирующего сигнала  $s(t)$ .

Следовательно, ФМ сигнал можно получить на выходе фазового модулятора, в котором модулирующий сигнал  $s(t)$  либо непосредственно управляет фазовым сдвигом  $\varphi(t)$  несущего колебания согласно выражению (2.17), либо после дифференцирования управляет угловой частотой  $\omega(t)$  несущего колебания в соответствии с (2.20).

Ограничимся рассмотрением ЧМ и ФМ колебаний при модуляции гармоническим сигналом:

$$s(t) = S \cos \Omega t. \quad (2.21)$$

Сравним основные характеристики сигналов с частотной и фазовой модуляцией.

ЧМ колебаие .

Согласно (2.13)

$$\omega(t) = \omega_0 + \omega_{\text{Д}} \cos \Omega t. \quad (2.22)$$

Здесь  $\omega_d = k_{\text{ЧМ}}S$ , т.е. девиация частоты ЧМ колебания пропорциональна амплитуде  $S$  модулирующего сигнала и не зависит от частоты модуляции  $Q$ . Тогда:

$$\varphi(t) = m \sin \Omega t + \varphi, \quad (2.23)$$

где

$$m = \omega_d / \Omega. \quad (2.24)$$

То есть индекс угловой модуляции  $m$  ЧМК пропорционален амплитуде модулирующего сигнала и обратно пропорционален частоте модуляции.

Таким образом:

$$u_{\text{ЧМ}} = U_0 \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t + \varphi). \quad (2.25)$$

ФМ колебаие

Согласно (2.17)

$$\varphi(t) = \varphi + m \cos \Omega t. \quad (2.26)$$

Здесь  $m = k_{\text{ФМ}}S$ , т.е. индекс угловой модуляции ФМ колебания пропорционален амплитуде  $S$  модулирующего сигнала и не зависит от частоты модуляции  $u$ . Тогда:

$$\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi(t) = \omega_0 t + m \cos \Omega t + \varphi, \quad (2.27)$$

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} [\omega_0 t + \varphi(t)] = \omega_0 - m \Omega \sin \Omega t = \omega_0 - \omega_d \sin \Omega t. \quad (2.28)$$

где

$$\omega_d = m \Omega. \quad (2.29)$$

Следовательно, девиация частоты  $\omega_d$  ФМК пропорциональна амплитуде и частоте модулирующего сигнала.

Таким образом имеем:

$$u_{\text{ФМ}} = U_0 \cos(\omega_0 t + m \cos \Omega t + \varphi). \quad (2.30)$$

Из выражений (2.25) и (2.30) и приведенных графиков видно, что при тональной модуляции нельзя определить, является ли сигнал частотно- или фазомодулированным. Различие между этими видами модуляции проявляется только при изменении частоты модуляции  $\Omega$ . При ЧМ с увеличением  $\Omega$  девиация частоты  $\omega_{\text{Д}}$  остается постоянной, а индекс модуляции  $m$  в соответствии с (2.24) уменьшается по закону гиперболы (рисунок 2.3, а), в то время как при ФМ постоянным остается индекс модуляции  $m$ , а девиация частоты  $\omega_{\text{Д}}$  в соответствии с (2.29) растет по линейному закону (рисунок 2.3, б).

Если модулирующий сигнал  $s(t)$  негармонический, то ЧМ и ФМ колебания различаются по характеру изменения параметров  $\omega(t)$  и  $\varphi(t)$ . На рисунке 2.4 приведены графики мгновенной частоты  $\omega(t)$  и фазового сдвига  $\varphi(t)$  ЧМ и ФМ колебаний для случая, когда модулирующий сигнал  $s(t)$  имеет вид пилообразной функции. Как следует из рисунка 2.4, б, е, угловая частота ЧМ сигнала изменяется монотонно в соответствии с модулирующим сигналом  $s(t)$ , тогда как частота  $\omega(t)$  ФМ сигнала изменяется скачками.

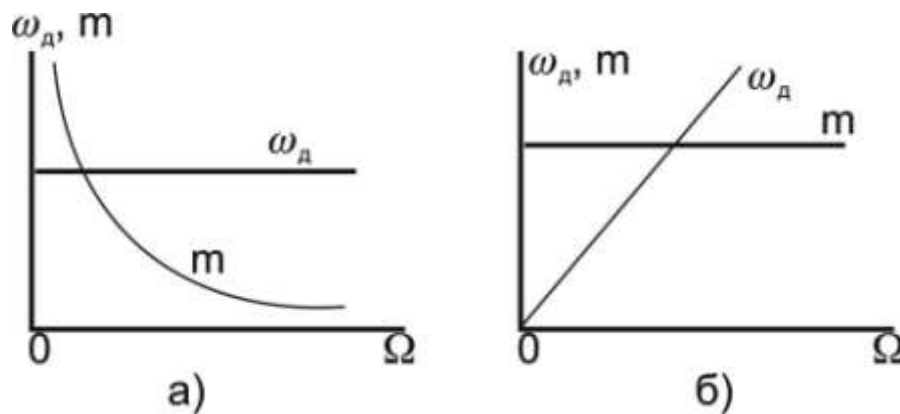


Рисунок 2.3 – График изменения модуляции по закон гиперболы (а) и по линейному закону (б)

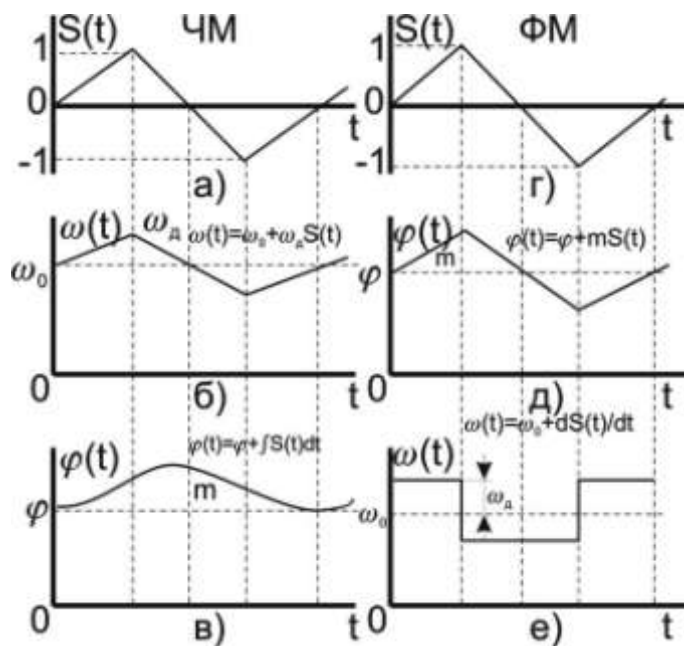


Рисунок 2.4 – Графики мгновенной частоты  $\omega(t)$  и фазового сдвига  $\varphi(t)$  ЧМ и ФМ колебаний

Спектр колебания при гармонической угловой модуляции. Как уже указывалось, модулированное колебание, представленное в виде:

$$u = U_0 \cos[\omega_0 t + m \sin(\Omega t + \Psi) + \varphi] \quad (2.31)$$

в равной степени соответствует ЧМ и ФМ колебаниям.

Спектр колебания, изображенный на рисунке 2.5, состоит из бесконечного числа боковых составляющих, расположенных попарно симметрично относительно несущей частоты  $\omega_0$  и имеющих частоты  $(\omega_0 + n\Omega)$ .

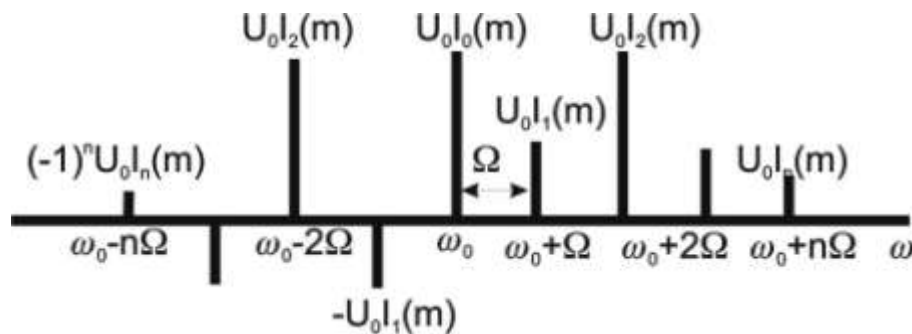


Рисунок 2.5 – Спектр колебания

Теоретически колебание с угловой модуляцией занимает бесконечную полосу частот. Однако для заданного индекса модуляции  $m$



практически можно не учитывать боковые составляющие порядка  $n = m + 2$  и выше из-за малости их амплитуд.

Ширина спектра  $2\Delta\omega$  колебания, ограниченного  $(m + 1)$  парой боковых составляющих, выражается приближенным равенством:

$$2\Delta\omega \approx 2\Omega(m + 1) \quad (2.32)$$

а при  $m \gg 1$  примерно равна удвоенному значению девиации частоты  $\omega_d$ .

$$2\Delta\omega \approx 2m\Omega = 2\omega_d. \quad (2.33)$$

При изменении амплитуды  $S$  модулирующего сигнала ( $\Omega = \text{const}$ ) в ЧМ и ФМ колебаниях изменяется индекс модуляции  $m$ , и, следовательно, изменяются число боковых составляющих, ширина спектра  $2\Delta\omega = 2\Omega(m + 1)$  и амплитуды  $U_0 J_n(m)$  составляющих спектра.

При изменении частоты модуляции  $\Omega(S = \text{const})$  в случае ЧМ изменяется согласно (2.37) индекс модуляции  $m$ , следовательно, число и амплитуды составляющих спектра. Ширина спектра  $2\Delta\omega_{\text{ЧМ}}$ , практически не меняется. При ФМ амплитуды составляющих и их число остаются без изменения (так как  $m = \text{const}$ ), а ширина спектра  $2\Delta\omega_{\text{ФМ}}$  изменяется пропорционально частоте модуляции.

### 3.2. Объект исследования

Объектом исследования является спектр модулированного сигнала. В этих целях предлагается использовать модулированный сигнал, полученный с помощью программы MODEL. Программа MODEL позволяет синтезировать сигнал, состоящий из десяти гармоник, причем каждая гармоника может модулироваться отдельно моногармоническим сигналом. Предусмотрена возможность как амплитудной, так и фазовой модуляции. Окно программы MODEL показано на рисунке 2.6.

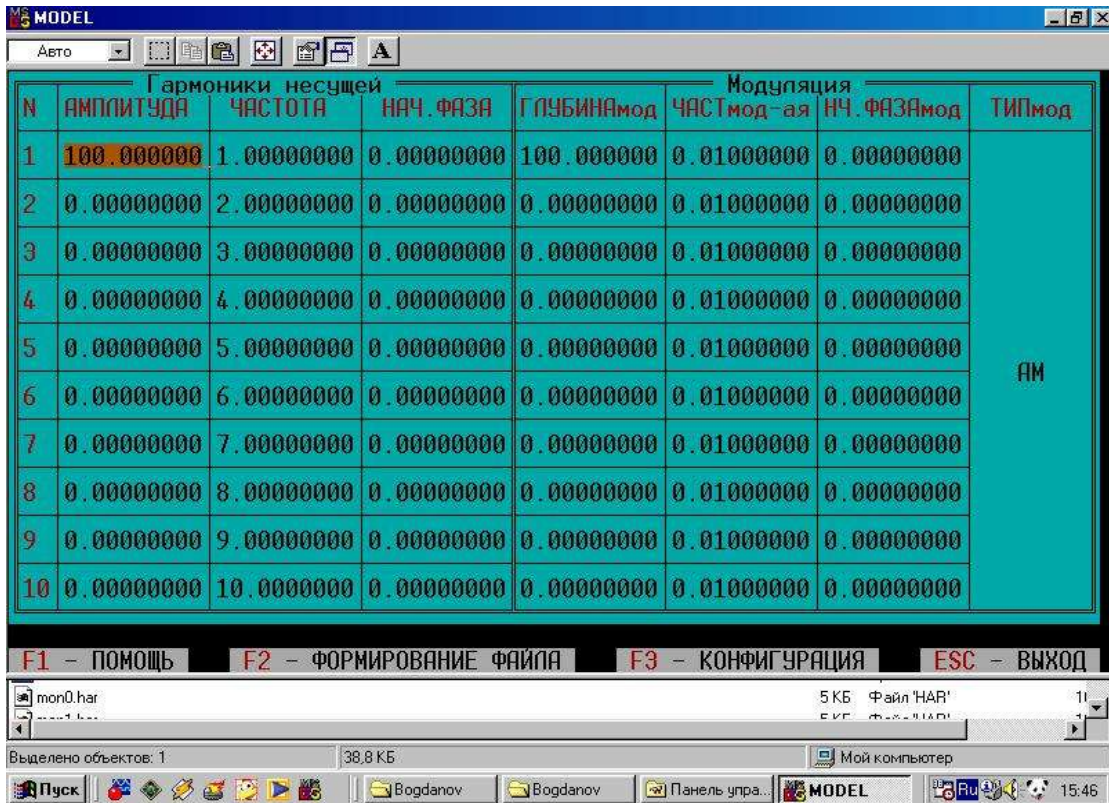


Рисунок 2.6 – Окно программы MODEL

С помощью клавиш перемещения курсора можно выбрать любую комбинацию из десяти несущих частот (исключение несущей частоты из континуума осуществляется путем задания нулевой амплитуды). Используя данные лабораторной работы №1 нужно выбрать такие частоты, которые вошли в спектр электрокардиосигнала. В работе используется только амплитудная модуляция. Модулирующие частоты выбираются на основе анализа медленных волн, модулирующих электрокардиосигнал.

После заполнения таблицы, показанной на рисунке 2.6, нажимается клавиша F2, и появляется окно, показанное на рисунке 2.7.

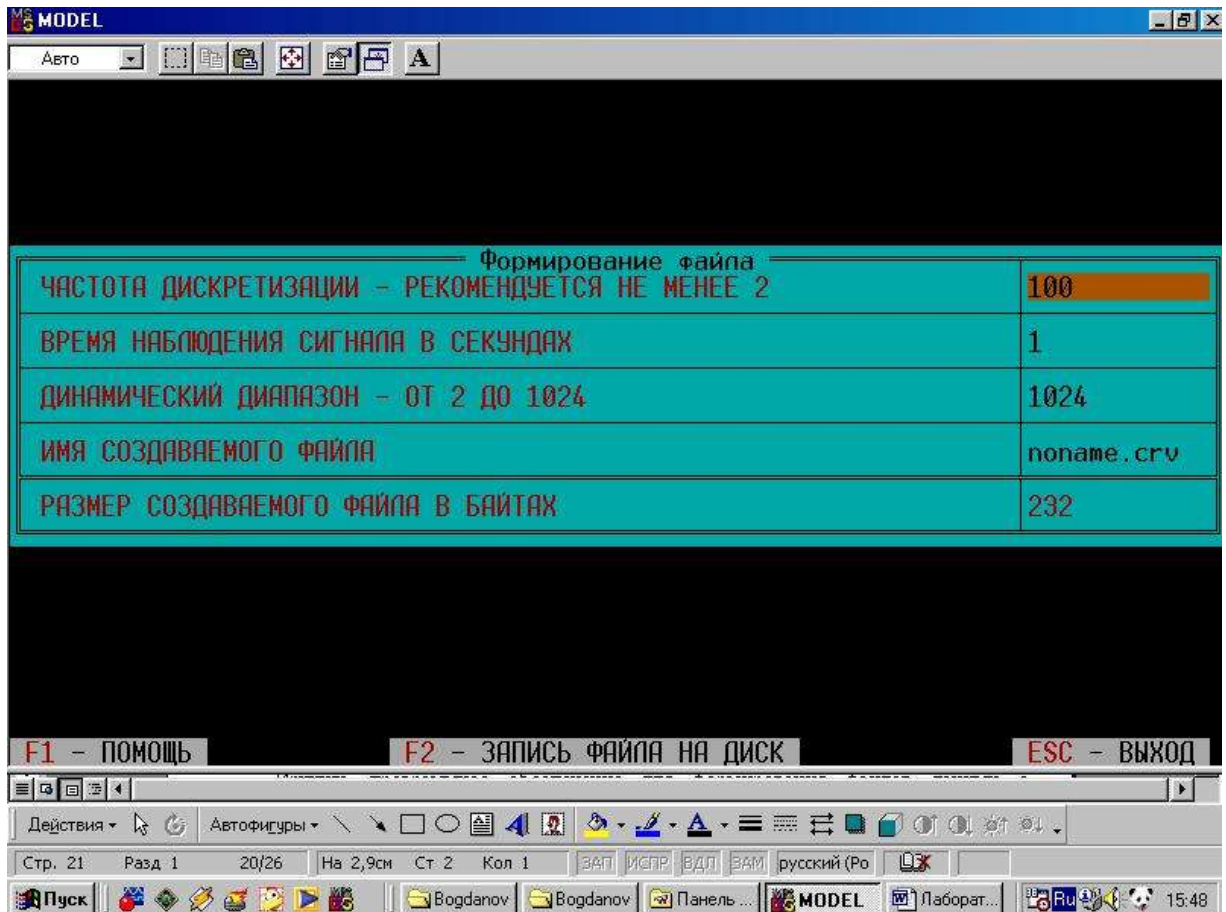


Рисунок 2.7 – Окно формирования файла данных программы MODEL

Частота дискретизации сигнала выбирается на основе соображений, изложенных в материалах лабораторной работы №2. Время наблюдения сигнала и его динамический диапазон выбирается близкими к параметрам сигнала, файл которого был получен при выполнении лабораторной работы №1. При нажатии клавиши F2 формируется файл, структура которого описана в материалах лаборатории №1.

### 2.3. Цель работы

Изучить методы модуляции сигналов и программное обеспечение для формирования файлов данных с цифровыми отсчетами модулированных сигналов.

### 2.4. Содержание работы и порядок ее выполнения

Изучите раздел «Модуляция сигналов» [1].

Изучите программу моделирования данных MODEL, обращая особое внимание на структуру файла данных и его заголовков.

Запишите математические выражения амплитудно-модулированного и частотно-модулированного сигналов. Зарисуйте их спектры.

Изучите спектр электрокардиосигнала, полученный при выполнении лабораторной работы №1. Выберите 5...10 значимых гармоник и задайте их значения и величину, согласно полученным спектральным характеристикам реального электрокардиосигнала.

Выберите модулирующие частоты и глубину модуляции для каждой несущей гармоники исходя из свойств реальных сигналов, которые модулируют электрокардиосигнал.

Исходя из пункта 4, задайтесь частотой дискретизации синтезированного сигнала и с помощью программы MODEL создайте файл данных с этим сигналом.

Сосчитайте заголовок файла данных и сами данные с помощью программы, имеющейся в базе данных или разработанной самостоятельно при выполнении лабораторной работы №1 и №2. Сделайте необходимые выводы.

## 2.5. Содержание отчета

1. Спектр исходного немодулированного сигнала.
2. Представление рядом Фурье модели немодулированного электрокардиосигнала.
3. Спектр медленных волн, модулирующих гармоники электрокардиосигнала
4. Распечатка графика модели электрокардиосигнала, полученного в результате выполнения пункта 2.
5. Распечатка графика модели электрокардиосигнала, полученного в результате выполнения пункта 2 и пункта 3.
6. Электронная форма на компакт-диске с файлом .CRV.
7. Выводы.

## 2.6. Вопросы для самопроверки

1. Что понимается под несущим и модулирующим колебаниями? В чем заключается процесс модуляции?
2. Как записать АМ колебание при модуляции:
  - а) гармоническим колебанием;
  - б) произвольным периодическим колебанием;
  - в) непериодическим сигналом?
3. Как определяется коэффициент модуляции АМ колебаний?
4. Как формируется спектр АМ колебания при модуляции:
  - а) гармоническим колебанием;

- б) произвольным периодическим колебанием;
- в) непериодическим сигналом?

5. Дайте графическое представление спектра.

6. Запишите выражение для колебания с угловой модуляцией. Какими соотношениями связаны полная фаза и мгновенная частота колебания?

7. Как определяются и чем отличаются ЧМ и ФМ колебания?

8. Какой физический смысл имеют понятия «девиация частоты»  $\omega_d$  и «индекс модуляции»  $m$ ? Как они определяются при частотной и фазовой модуляции гармоническим сигналом?

9. По каким приближенным формулам можно определить ширину спектра ЧМ и ФМ колебаний при гармонической модуляции случаях  $m \ll 1$  и  $m > 1$ ?

10. От каких параметров модулирующего гармонического сигнала и как зависят спектры ЧМ, ФМ и АМ колебаний?

11. Чем отличаются спектральные диаграммы АМ и ЧМ колебаний при  $m \ll 1$ ?

12. Дайте определение АЧМ сигнала.

13. Какой вид имеют амплитудный и фазовый спектры АЧМ сигнала при большой базе  $m$  сигнала?

14. Запишите в общем виде выражение для узкополосного сигнала. Как устраняется неоднозначность в определении огибающей, фазы и мгновенной частоты узкополосного сигнала?

15. Как представить в комплексной форме произвольный узкополосный сигнал? Что понимается под комплексной огибающей сигнала?

16. Как определить огибающую и фазу узкополосного сигнала, если известна его спектральная плотность?

17. Как осуществляется дискретизация по времени АМ и ЧМ колебания?

## 2.7. Порядок защиты работы

Работа может быть зачтена, если студент представил отчет согласно пункту 5, исследуемые в работе сигналы соответствуют индивидуальному варианту, электронная форма соответствует представленному тексту, и студент дал исчерпывающие ответы на 10 произвольных вопросов из пункта 6.

## Список литературы

1. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач : учебное пособие / С. И. Баскаков. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Высшая школа, 2002. - 214 с.

## Практическая работа №3 «Аппроксимация и интерполяция квазипериодических сигналов»

### 3.1. Краткие теоретические сведения

Наиболее удобной в обращении на практике функцией является алгебраический многочлен. Чтобы задать многочлен, нужно задать только конечное число его коэффициентов. Значения многочлена легко вычисляются, его легко продифференцировать, проинтегрировать и т. д. Поэтому алгебраические многочлены нашли широкое применение для приближения (аппроксимации) функций. Наряду с алгебраическими многочленами применяются также тригонометрические многочлены, которые являются более естественными для приближения периодических функций.

*Интерполяция функций по формуле Лагранжа*

Пусть известны значения некоторой функции  $f$  в  $n + 1$  различных точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , которые обозначим следующим образом:

$$f_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n.$$

Например, эти значения получены из эксперимента или найдены с помощью достаточно сложных вычислений. Возникает задача приближенного восстановления функции  $f$  в произвольной точке  $x$ . Часто для решения этой задачи строится алгебраический многочлен  $L_n(x)$  степени  $n$ , который в точках  $x_i$  принимает заданные значения, т. е.

$$L_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

и называется интерполяционным. Точки  $x_i; i = 0, 1, \dots, n$  называются узлами интерполяции.

Приближенное восстановление функции  $f$  по формуле:

$$f(x) = L_n(x) \quad (3.2)$$

называется интерполяцией функции  $f$  с помощью алгебраического многочлена.

Существует теорема, согласно которой имеется только один интерполяционный многочлен  $n$ -й степени, удовлетворяющий условию (1).

Интерполяционный многочлен, представленный в виде:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n P_{ni}(x) f_i, \quad (3.3)$$

где

$$P_{ni}(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (3.4)$$

$x \in [a, b]$

называется интерполяционным многочленом Лагранжа, а функции (3.4) – Лагранжевыми коэффициентами.

Погрешность интерполяции (экстраполяции) в текущей точке оценивается по формуле:

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |w_n(x)|, \quad (3.5)$$

$$M_{n+1} = \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \quad (3.6)$$

где

$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n). \quad (3.7)$$

Максимальная погрешность интерполяции на всем отрезке  $[a, b]$ :

$$\max_{[a,b]} |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} |w_n(x)|. \quad (3.8)$$

### 3.1.1 Линейная интерполяция



Интерполяция по формуле (3.2) при  $n = 1$ , т. е. с помощью линейной функции (3.3) называется линейной.

Если ввести обозначения  $h = x_1 - x_0$ ,  $q = (x - x_0)/h$ , то формула линейной интерполяции может быть записана в следующем виде:

$$f(x) \approx L_1(x) = L_1(x_0 + qh) = (1 - q)f_0 + q_1f_1. \quad (3.9)$$

Величина  $q$  называется фазой интерполяции, которая изменяется в пределах от 0 до 1, когда  $x$  пробегает значение от  $x_0$  до  $x_1$ .

Геометрическая линейная интерполяция означает замену графика функции на отрезке  $[x_0, x_1]$  хордой, соединяющей точки  $(x_0, f_0)$ ,  $(x_1, f_1)$ , как показано на нижеприведенном рисунке.

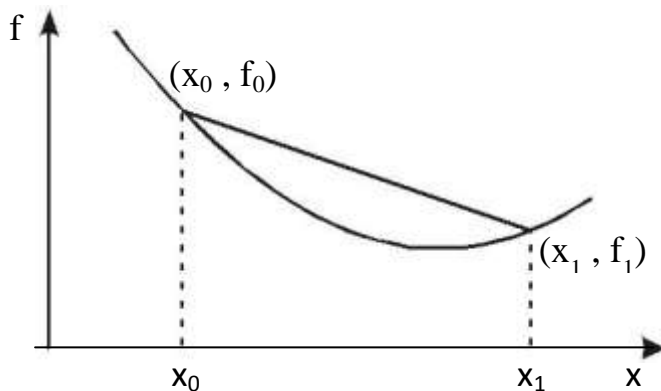


Рисунок 3.1 – Геометрическая линейная интерполяция

### 3.1.2 Сплайны

Пусть отрезок  $[a, b]$  разбит на  $N$  равных частичных отрезков  $[x_i, x_{i+1}]$ , где  $x_j = a + jh$ ,  $i = 0, 1, \dots, N - 1$ ;  $x_N = b$ ,  $h = (b - a)/N$ .

Сплайном называется функция, которая вместе с несколькими производными непрерывна на всем заданном отрезке  $[a, b]$ , а на каждом частичном отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  в отдельности является некоторым алгебраическим многочленом.

Максимальная по всем частичным отрезкам степень многочленов называется степенью сплайна, а разность между степенью сплайна и порядком наивысшей непрерывной на  $[a, b]$  производной – дефектом сплайна.

На практике наиболее широко распространение получили кубические сплайны – сплайны третьей степени, имеющие на  $[a, b]$

непрерывную, по крайней мере, первую производную. Величина  $m_i = S_3^1(x_i)$  называется наклоном сплайна в точке (узле)  $x_i$ .

$$S_3(x) = \frac{(x_{i+1} - x)^2(2(x - x_i) + h)}{h^3} \cdot f_i + \frac{(x - x_i)^2(2(x_{i+1} - x) + h)}{h^3} \cdot f_{i+1} + \frac{(x_{i+1} - x)^2(x - x_i)m_i}{h^2} + \frac{(x - x_i)^2(x - x_{i+1})^2 m_{i+1}}{h^2} \quad (3.10)$$

Нетрудно убедиться, что кубический сплайн  $S_3(x)$ , принимающий в узлах  $x_i, x_{i+1}$ , соответственно значения  $f_i, f_{i+1}$ , имеет на частичном отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  вид.

Действительно, легко видеть, что  $S_3(x_i) = f_i, S_3(x_{i+1}) = f_{i+1}$ . Кроме того, простые вычисления показывают, что  $S_3'(x_i) = m_i, S_3'(x_{i+1}) = m_{i+1}$ . Можно доказать, что любой алгебраический многочлен третьей степени, принимающий в точках  $x_i, x_{i+1}$  значения, равные соответственно  $f_i, f_{i+1}$  соответственно равную  $m_i, m_{i+1}$ , тождественно совпадает с многочленом (10).

Итак, чтобы задать кубический сплайн  $S_3(x)$  на всем отрезке  $[a, b]$ , нужно задать в  $N + 1$  узлах  $x_i$  его значения  $f_i$  и наклоны или касательные  $m_i, i = 0, 1, \dots, N$ .

Кубический сплайн, принимающий в узлах  $x_i$  те же значения, что и некоторая функция  $f$  называется интерполяционным. Он служит для аппроксимации функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$  вместе с несколькими производными.

Способы задания наклонов интерполяционного кубического сплайна.

1) Упрощенный способ.

$$m_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \cdot 2h, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.11)$$

$$m_0 = \frac{4 \cdot f_1 - f_2 - 3 \cdot f_0}{2h}, \quad m_n = \frac{3 \cdot f_n + f_{n-2} - 4 \cdot f_{n-1}}{2h}.$$

2) Если известны значения  $f_i$  производной  $f'$  в узлах  $x_i$ , то полагаем  $m_i = f'_i, i = 0, 1, \dots, N$ .

Способы 1 и 2 – локальные, так как с их помощью сплайн строится отдельно на каждом частичном отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$ .

3) Глобальный способ.

Обозначаем через  $S_3''(x_i + 0)$  значение  $S_3''(x_i)$  в узле  $x_i$  справа, найденное непосредственно из выражения (10), а через  $S_3''(x_i - 0)$  значение  $S_3''(x_i)$  в узле  $x_i$  слева, т. е. найденное из соответствующего выражения  $S_3(x)$  на частичном отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$ , которое получается из (10) заменой  $i$  на  $i - 1$ .

Имеем

$$S_3''(x_i + 0) = \frac{4 \cdot m_i}{h} - \frac{2 \cdot m_{i+1}}{h} + 6 \cdot \frac{f_{i+1} - f_i}{h^2},$$

$$S_3''(x_i - 0) = \frac{2 \cdot m_{i-1}}{h} - \frac{4 \cdot m_i}{h} - 6 \cdot \frac{f_i - f_{i-1}}{h^2}.$$

Требуем непрерывности  $S''(x)$  в узлах:

$$S_3''(x_i - 0) = S_3''(x_i + 0), \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.12)$$

приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно наклонов:

$$m_{i-1} + 4 \cdot m_i + m_{i+1} = \frac{3 \cdot (f_{i+1} - f_{i-1})}{h}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Поскольку неизвестных  $N + 1$ , то необходимо задать еще два условия, которые называются краевыми (они обычно связаны с крайними значениями  $m_0$ , и  $m_N$ ). Дадим три варианта краевых условий.

а) Если известны  $f'_0 = f'(a)$ ,  $f'_N = f'(b)$ , то задать  $m_0 = f'_0$ ,  $m_N = f'_N$ .

б) Производные  $f'_0$  и  $f'_N$  аппроксимируем формулами численного дифференцирования третьего порядка точности:

$$m_0 = \frac{1}{6h} \cdot (-11 \cdot f_0 + 18 \cdot f_1 - 9 \cdot f_2 + 2 \cdot f_3); \quad (3.13)$$

$$m_n = \frac{1}{6h} \cdot (11 \cdot f_N - 18 \cdot f_{N-1} - 9 \cdot f_{N-2} - 2 \cdot f_{N-3}).$$

в) В некоторых случаях бывают известны значения  $f''$  на концах отрезка  $[a, b]$ , т. е. величины  $f_0'' = f''(a)$ ,  $f_N'' = f''(b)$ . Тогда требование  $S_3''(a) = f_0''$ ,  $S_3''(b) = f_N''$  приводит к краевым условиям:

$$\begin{aligned} m_0 &= -\frac{m_1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{f_1 - f_0}{h} - \frac{h}{4} \cdot f_0'', \\ m_N &= -\frac{m_{N-1}}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{f_N - f_{N-1}}{h} + \frac{h}{4} \cdot f_N''. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Система (12) при всех рассматриваемых краевых условиях имеет единственное решение. Решая систему (3.12) при выбранных краевых условиях, находим наклоны  $m_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , во всех узлах. Затем по формуле (3.10) задаем сплайн на каждом частичном отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ .

Построенный данным глобальным способом сплайн  $S_3(x)$  имеет дефект не больше единицы, т. к. этот сплайн обладает на отрезке  $[a, b]$  непрерывной второй производной.

$$\max_{[x_i, x_{i+1}]} |f^{(m)}(x) - S_3^{(m)}(x)| \leq ch^{k+1-m} \max_{[a, b]} |f^{(k+1)}(x)|,$$

Интерполяционный сплайн  $S_3(x)$  с наклоном, заданным способом 2 или 3, удовлетворяет неравенству:

$$i = 0, 1, \dots, N-1; \quad m = 0, 1, \dots, k; \quad 0 \leq k \leq 3; \quad (3.15)$$

где  $c$  – независимая от  $h$ ,  $i$ ,  $f$  – постоянная.

Точность аппроксимации функции  $f$  сплайном  $S_3(x)$  управляется выбором  $N$ , т. е. шагом  $h = (b - a)/N$ .

### 3.2 Аппроксимация функций по методу наименьших квадратов

Интерполяция на практике хороша лишь для таких функций, значения которых не искажены шумом. Случайные ошибки в значениях функции сильно искажают интерполяционное многочлены высоких степеней, а при интерполяции многочленами низких степеней теряется существенная информация. Поэтому, в этом случае, целесообразно применять «сглаживающую» аппроксимацию с минимизацией

взвешенной средней квадратической ошибки аппроксимации. Это значит, что для данной функции  $f(x)$  требуется построить функцию  $F(x)$  вида

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_m(x) \quad (3.16)$$

так, чтобы минимизировать взвешенную среднюю квадратическую ошибку на интервале  $[a, b]$ :

$$\sigma^2 = \int_a^b \gamma(x)[F(x) - f(x)]^2 dx \quad (3.17)$$

где  $\gamma(x)$  – заданная весовая неотрицательная функция.

Если функции  $\varphi(x)$  действительны и попарно ортогональны с весом  $\gamma(x)$  на интервале  $[a, b]$ , то есть если

$$\int_a^b \gamma(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0; \quad \text{при } i \neq j, \quad (3.18)$$

то искомые коэффициенты определяются по формуле:

$$a_i = \frac{\int_a^b \gamma(x)f(x)\varphi_i(x)dx}{\int_a^b \gamma(x)\varphi_i^2(x)dx}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.19)$$

Аппроксимация ортогональными функциями, например, ортогональными многочленами или тригонометрическими полиномами имеет то замечательное преимущество, что улучшение аппроксимации путем добавления нового члена  $a_{n+1}\varphi_{n+1}(x)$  не меняет ранее вычисленные коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Таким образом, для аппроксимации функции  $f(x)$  необходимо задать класс приближающих функций или  $n$ -мерное пространство, где  $n$  – число заданных значений функции  $f(x)$ , и норму в этом пространстве. При приближении функций многочленами на дискретном множестве точек норма имеет вид:

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^m \gamma_k [F(x_k) - f(x_k)]^2, \quad (3.20)$$

где  $\gamma_k$  заданные положительные веса;  $m + 1$  – дискретное множество точек.

Согласно условию ортогональности (6.18):

$$\sum_{k=0}^m \gamma_k \varphi_i(x_k) \varphi_j(x_k) = 0, \quad (i \neq j). \quad (3.21)$$

и на основании (3.19) имеем:

$$a_i = \sum_{k=0}^m \gamma_k f(x_k) \varphi_i(x_k) / \sum_{k=0}^m \gamma_k \varphi_i^2(x_k), \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad n \leq m). \quad (3.22)$$

Отметим, что можно использовать другую норму (3.20), тогда получим другое приближение, которое может значительно отличаться от предыдущего.

Приведем пример аппроксимации функций тригонометрическим многочленом:

$$F_m(x) = \alpha_0 + \sum_{p=1}^{m/2} (\alpha_p \cos px + \beta_p \sin px). \quad (3.23)$$

Коэффициенты этого многочлена при учете условия (3.20) находятся согласно формулам:

$$\alpha_0 = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^n f \cdot \left( \frac{2\pi i}{n+1} \right), \quad \alpha_p = \frac{2}{n-1} \cdot \sum_{i=0}^n f \cdot \left( \frac{2\pi i}{n+1} \right) \cos \frac{2\pi i}{n+1} p, \quad (3.24)$$

$$\beta_p = \frac{2}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^n f \cdot \left( \frac{2\pi i}{n+1} \right) \sin p \frac{2\pi i}{n+1}, \quad p = 1, 2, \dots, m,$$

где

$$x_i = \frac{2\pi i}{n+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

### 3.3 Цель работы

Получить практические навыки децимации и интерполяции сигналов

### 3.4 Порядок выполнения работы

1. Запишите математическое выражение полигармонического сигнала с трендом. Нарисуйте его спектр.
2. Вычислите частоту дискретизации сигнала, полученного в пункте 1, и с помощью программы REEВOK создайте файл данных с этим сигналом. Вычислите спектр сигнала, записанного в полученном файле данных, и сравните его с теоретическим, полученным в пункте 1.
3. Составьте схему алгоритма и программный модуль для уменьшения в два раза числа отсчетов сигнала, полученного в пункте 1, не изменяя интервал наблюдения сигнала (апертуру).
4. Запустите программный модуль, полученный в пункте 3, подав на его вход сигнал, файл данных которого был получен в пункте 2. Зарисуйте сигнал на выходе программного модуля. Получите его спектр. Сравните его со спектром исходного сигнала.
5. Составьте схему алгоритма и программный модуль для увеличения в два раза числа отсчетов сигнала, полученного в пункте 1, не изменяя интервал наблюдения сигнала.
6. Запустите программный модуль, полученный в пункте 5, подав на его вход сигнал, файл данных которого был получен в пункте 2. Зарисуйте сигнал на выходе программного модуля. Получите его спектр. Сравните его со спектром исходного сигнала.

### 3.5 Контрольные вопросы

1. Что такое «сплайн»?
2. Перечислите способы задания наклонов интерполяционного кубического сплайна.
3. Какой график имеет геометрическая линейная интерполяция?
4. Что такое «децимация»?
5. В чем заключается отличие децимации сигнала от интерполяции?
6. Какие этапы имеет децимация цифрового сигнала с целым коэффициентом?
7. Для чего необходим первый этап децимации сигнала?

8. В чем заключается стандартный алгоритм интерполяции сигнала с целым коэффициентом?
9. Как осуществляется прореживание отсчетов сигнала?
10. К чему приводит выполнение процедуры децимации сигнала?
11. Для чего применяют «сглаживающую» аппроксимацию с минимизацией взвешенной средней квадратической ошибки аппроксимации?
12. Как осуществляется интерполяция функций по методу Лагранжа?
13. Какие сплайны на практике наиболее широко распространены?
14. Что Вы понимаете под термином «степень сплайна»?
15. Какая функция наиболее удобна в обращении на практике?

### **Список литературы**

1. Интерполяция и аппроксимация кривых: методические указания к лабораторной работе / Курск. политехн. ин-т; сост. С.А. Филист. – Курск. – 1993. – 13 с.



## Практическая работа №4 «Исследование методов цифровой фильтрации квазипериодических сигналов»

### 4.1. Краткие теоретические сведения

Фильтрация представляет собой одну из самых распространенных операций обработки сигналов. Цель фильтрации состоит в подавлении помех, содержащихся в сигнале, или в выделении отдельных составляющих сигнала, соответствующего тем или иным свойствам исследуемого процесса.

В электрических и электронных измерительных устройствах уже давно находят применение различные типы RLC-фильтров. С появлением доступных и дешевых интегральных операционных усилителей получили широкое распространение активные фильтры. Прогресс в развитии цифровых интегральных схем, повсеместное применение микропроцессоров для цифровой обработки измерительной информации обусловили интерес разработчиков аппаратуры к цифровым фильтрам.

Фильтрация сигнала – это целенаправленное изменение соотношения между различными компонентами спектра сигнала. Как известно, спектр сигнала, получаемого на выходе линейной цепи,  $Y(f)$ , равен произведению входного спектра  $X(f)$  и частотной характеристики (ЧХ) цепи  $G(f)$ :

$$Y(f) = X(f) G(f). \quad (4.1)$$

На практике разложение сигнала в спектр и обратно занимает довольно большое время, поэтому рассмотрим теперь соотношения, позволяющие непосредственно находить временное описание сигнала. Как известно, спектр  $\delta$ -импульса равен единице. Если такой  $\delta$ -импульс подать на вход линейной цепи, то тогда  $X(f) = 1$  и в соответствии с формулой (4.1) получим:

$$Y(f) = G(f). \quad (4.2)$$

Таким образом, ЧХ цепи можно найти как спектр выходного сигнала цепи при подаче на ее вход  $\delta$ -импульса. Реакция цепи  $g(t)$  на  $\delta$ -импульс носит название импульсной характеристики (ИХ). В соответствии с (4.2) спектр этой функции равен ЧХ цепи. Отсюда следует, что импульсная и частотная характеристики линейной цепи связаны между собой парой преобразований Фурье:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft} df, \quad (4.3)$$

$$G(f) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft} dt. \quad (4.4)$$

В соответствии с теоремой свертки перемножение спектров соответствует свертке функций во временной области. Поэтому из равенства (4.1), определяющего спектр сигнала на выходе линейной цепи, следует, что выходной сигнал цепи может быть найден в виде свертки входного сигнала и импульсной характеристики цепи:

$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^t x(t')g(t-t')dt', \quad (4.5)$$

где \* – знак свертки.

Последнее соотношение показывает, что функция  $g(t)$  определяет веса, с которыми входят в выходной сигнал  $y(t)$  различные мгновенные значения входного сигнала  $x(t)$ . Поэтому импульсную характеристику часто называют весовой функцией (ВФ).

Итак, динамические свойства линейной цепи (в том числе и цифровых фильтров) полностью определяются одной из двух характеристик: частотной характеристикой или импульсной. Одна из них может быть найдена из другой по формулам преобразования Фурье (4.3) и (4.4).

Если ИХ фильтра будет дискретной, то такие фильтры можно построить на цифровых элементах. Дискретную ИХ нерекурсивных фильтров  $g(n)$  находят путем дискретного преобразования Фурье из дискретной ЧХ  $G(k)$ :

$$g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} G(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}. \quad (4.6)$$

ЧХ фильтра, построенного по формуле (4.6), гарантированно будет проходить через точки заданной ЧХ  $G(k)$ . Однако между этими точками

совпадение желаемой и реальной частотных характеристик не гарантируется.

На практике дискретный сигнал  $s(n)$  фильтруют путем дискретной свертки самого сигнала и ИХ фильтра  $g(n)$ :

$$s_{\text{фильтр}}(n) = s(n) * g(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)g(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(n-m)g(m). \quad (4.7)$$

Эта операция занимает минимум вычислений. Однако анализ работы фильтров гораздо удобнее производить в частотной области.

Наибольшее распространение получили фильтры с четной ИХ. Они не вносят фазового сдвига в результирующий сигнал и их можно разложить в вещественный ряд косинусоид, что значительно облегчает их расчет.

## 4.2. Объект исследования

Для расчета дискретных цифровых фильтров используется программа `filters.exe`. Для запуска программы необходима ЭВМ IBM PC со стандартной конфигурацией. В текущем каталоге должен быть расположен драйвер видеоадаптера фирмы Borland (например, EGA, VGA.BGI).

Если на компьютере установлена операционная система WINDOWS XP, то необходимо воспользоваться командами: Программы/Командная строка/`Filter.exe`.

При запуске программы в диалоговом режиме необходимо ввести следующие входные данные:

- Частота дискретизации  $F_{\text{дискр}}$  фильтруемого сигнала. От этой величины зависит полоса частот, на которой задается АЧХ фильтра. В соответствии с теоремой Котельникова ширина этой полосы от 0 до  $F_{\text{дискр}}/2$  Гц.

- Количество элементов  $N$  импульсной характеристики проектируемого фильтра. Это число должно быть нечетным и находиться в пределах от 3 до 4001 (верхняя граница зависит от количества свободной оперативной памяти). Чем выше значение  $N$ , тем выше порядок проектируемого фильтра.

- Значения АЧХ  $G(f)$  проектируемого фильтра. Шаг дискретизации  $\Delta f$  зависит от частоты дискретизации сигнала и количества элементов  $N$  и определяется программой автоматически.

Выходные данные:

- Изображение требуемой АЧХ фильтра.
- Изображение АЧХ фильтра, который был рассчитан программой.

Этот график строится по дискретному аналогу формулы (4.4). Для выявления характера кривой АЧХ вне заданных точек  $G(k)$  программа расширяет время наблюдения найденной ИХ  $g(n)$ , путем дополнения ее нулями, что согласно свойствам дискретного спектра позволяет уменьшить частоту дискретизации графика АЧХ.

- Значения элементов ИХ проектируемого фильтра.

**Пример:** требуется рассчитать ФНЧ для сигнала с частотой дискретизации 200 Гц и с частотой среза 50 Гц. Следовательно, значения ЧХ фильтра  $G(f)$  будут принимать значения 1 в полосе пропускания фильтра (т. е. когда  $0 < f < 50$  Гц), и 0 в полосе задержания фильтра (когда  $f > 50$  Гц).

Пусть число элементов ИХ фильтра  $N = 15$ . На запросы программы вводим:

$F_{\text{diskr}} = 200$  (это частота дискретизации нашего сигнала);  $N = 15$  (число элементов ИХ фильтра);

$$G[0] = 1$$

$$G[14] = 1$$

$$G[28] = 1$$

$$G[42] = 1$$

$$G[57] = 0.5$$

$$G[71] = 0$$

$$G[85] = 0$$

$$G[100] = 0 ,$$

где 0, 14, 28, 42 и т. д. – отсчеты частот  $f$ , на которых должна задаваться АЧХ фильтра (рассчитываются программой);

значения  $G[F] = 1$  характеризуют полосу пропускания фильтра, а значения  $G[F] = 0$  характеризуют полосу задержания фильтра (вводятся пользователем).

В результате работы программы изображаются графики заданной и реальной АЧХ (рисунок 4.1).

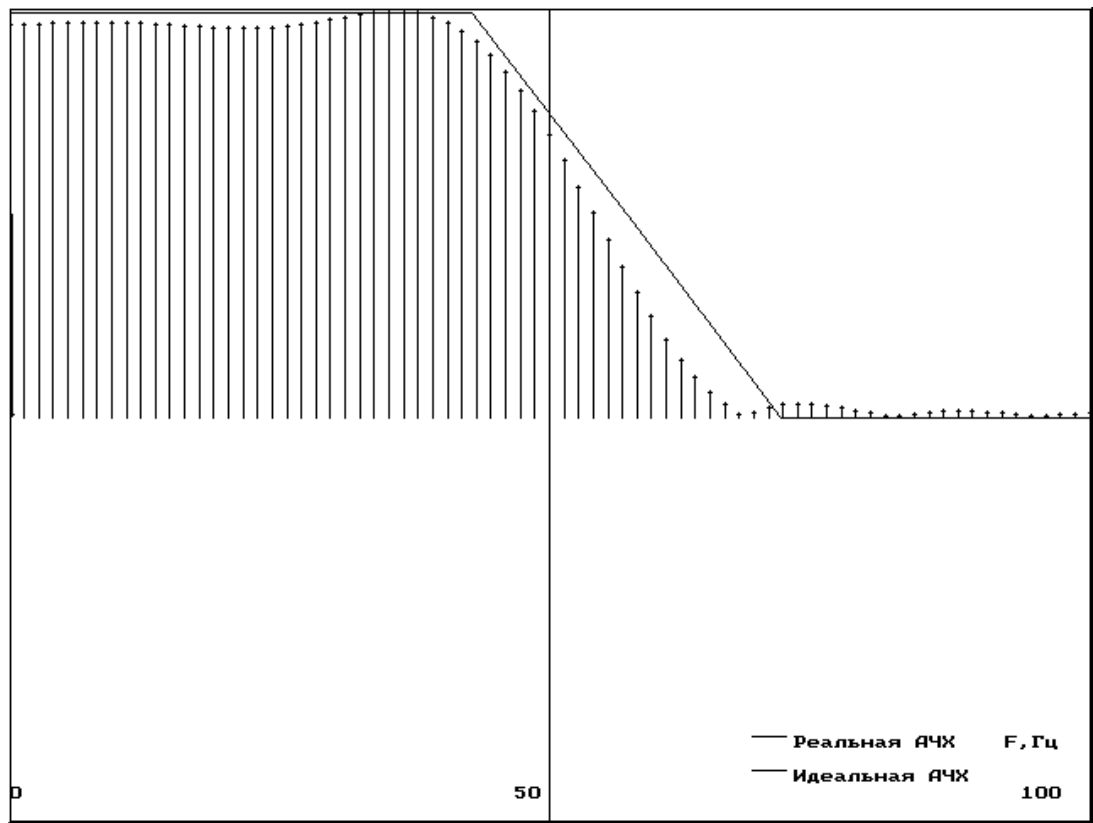


Рисунок 4.1 - Идеальная и реальная АЧХ НЧ фильтра

Далее на экран выводятся элементы ИХ фильтра, которые вычисляются программой по формуле (4.6) из заданной АЧХ  $G(k)$ . В нашем случае они равны  $[-0.07 \ -0.19 \ 0.5 \ 0.36 \ -1.3 \ -0.47 \ 4.68 \ 8 \ 4.68 \ -0.47 \ -1.3 \ 0.36 \ 0.5 \ -0.19 \ -0.07]$ .

### 4.3. Цель работы

Изучить методы синтеза цифровых фильтров и эффективность их применения.

### 4.4. Содержание работы и порядок ее выполнения

1. Получите у преподавателя задание на проектирование цифрового фильтра: АЧХ и порядок.
2. С помощью программы MODEL получите тестовый сигнал, в спектре которого присутствуют составляющие, лежащие как в полосе пропускания, так и в полосе задержания цифрового фильтра.
3. С помощью программы FILTERS.EXE получите коэффициенты цифрового фильтра.

4. Составьте схему алгоритма и программу цифровой фильтрации полученным в п. 3 цифровым фильтром тестового сигнала, созданного в п. 2.

5. Запустите полученную в п. 4 программу, подав на ее вход файл данных, полученный в п. 2. Сравните сигналы на входе и на выходе.

#### 4.5. Содержание отчета

1. АЧХ и коэффициенты разработанного цифрового фильтра.
2. Спектральный состав и графическое изображение тестового сигнала.
3. Графическое изображение тестового сигнала после фильтрации.
4. Изображения реального сигнала до и после фильтрации.
5. Анализ спектрального состава реального сигнала, помех, присутствующих в нем, их спектра.
6. Выводы по эффективности цифровой фильтрации.

#### 4.6. Вопросы для самопроверки

1. В чем состоят основные преимущества и недостатки цифровых фильтров?
2. Изобразите структурную схему цифровой обработки сигнала. Поясните этапы преобразования сигнала.
3. Какие методы математического описания и аппараты анализа дискретных сигналов и цепей Вы знаете?
4. Как выражается прямое (ДПФ) и обратное (ОДПФ) дискретные преобразования Фурье?
5. Как связаны коэффициенты ДПФ последовательности конечной длины с  $z$ -преобразованием этой последовательности?
5. Как связаны коэффициенты ДПФ последовательности конечной длины с ее непрерывным частотным спектром?
7. Как определяется линейная дискретная цепь с постоянными параметрами (ЛДЦПП)?
8. Что понимается под импульсной характеристикой  $g(n)$  ЦФ?
9. Что понимается под системной функцией  $H(z)$  цифрового фильтра? Как выражается системная функция через импульсную характеристику и элементы схемы фильтра?
10. Как определить устойчивость ЦФ по его системной функции?

11. Что понимается под частотной характеристикой ЦФ? Что отличает ее от частотной характеристики соответствующего аналогового фильтра-прототипа?

12. Как связана частотная характеристика с системной функцией цифрового фильтра?

13. Как определяется нерекурсивный цифровой фильтр? Запишите алгоритм обработки сигнала и изобразите соответствующую структурную схему фильтра.

14. В чем заключается недостаток нерекурсивных фильтров?

15. В чем состоит особенность рекурсивных ЦФ? Запишите алгоритм обработки сигнала и изобразите структурную схему фильтра.

16. Какой вид имеет структурная схема прямого рекурсивного ЦФ? Чем отличается от нее структура канонического фильтра?

17. Определение корреляционной функции. Определить циклическую корреляционную функцию следующих последовательностей с числом элементов

$$N = 8:$$

а)  $\{1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\}$ , б)  $\{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\}$ ,

в)  $\{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\}$ ,

г)  $\{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\}$ .

18. Определение корреляционной функции. Какова циклическая корреляционная функция последовательностей

а)  $\{1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\}$ , б)  $\{1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\}$ , в)  $\{1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\}$ ?

Просуммировать элементы полученных корреляционных последовательностей и объяснить результат.

19. Определение корреляционной функции. Определить циклическую корреляционную функцию последовательностей

а)  $\{1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\}$ , б)  $\{1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\}$ , в)  $\{1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\}$ , г)  $\{1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\}$ .

20. Определение корреляционной функции. Определить циклическую корреляционную функцию последовательностей

а)  $\{-3\ -2\ -1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\}$ ,

б)  $\{-4\ -3\ -2\ -1\ 1\ 2\ 3\ 4\}$ .

Просуммировать элементы полученных корреляционных последовательностей и объяснить результат.

21. Корреляционные последовательности. Определить корреляционную функцию последовательностей

а)  $\{1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\}$ ,

б)  $\{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\}$ .

Вычислить произведение  $1100101 \times 1010011$  и использовать полученный результат для вывода очень простого алгоритма определения корреляционной функции. Если алгоритм столь прост, то почему бы не существовать еще более оптимальному методу?

22. Получите последовательность, корреляционная функция которой имеет вид  $\{1, 1/6, 1/15, 1/20, 1/15, 1/6, 1, 1\}$ . Определение свертки. Выполнить свертку последовательности  $\{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$  с последовательностями вида

а)  $\{1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$ , б)  $\{1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0\}$ , в)  $\{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0\}$ , г)  $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ .

23. Определение свертки. Выполнить свертку последовательности  $\{1, (1/2), (1/4), (1/8), (1/16), (1/32), (1/64), (1/128)\}$  с последовательностями:

а)  $\{1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$ , б)  $\{2, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1\}$ .

24. Свертка с нечетной функцией. Должна быть выполнена свертка последовательности данных с нечетной последовательностью, т. е. функцией, для которой  $f(N - \tau) = -f(\tau)$ . После определения ДПХ требуются только  $N$  произведений. Показать, что изменение знаков преобразования последовательности данных на обратные перед умножением и переходом в область обратного преобразования приводит к желаемому результату.

25. Уплотнение. Последовательность данных, состоящая из 1024 элементов, должна быть уплотнена до 256 элементов ценой потери тонкой структуры исходной последовательности. Показать, что это может быть осуществлено путем определения ДПХ для  $N = 1024$  и последующего вычисления ДПХ первой четверти элементов преобразования для  $N = 256$ .

26. Скользящее среднее, а) Вычислить скользящее среднее пяти последовательных элементов биномиальной последовательности  $\{0000, 1464, 1000\}$ . •

б) Какова дисперсия полученной последовательности?

27. Циклическая функция  $\text{sinc}(x) = \sin x / x$ . Показать, что  $\text{sinc}(x) + \text{sinc}(x - N) + \text{sinc}(x - 2N) + \dots + \text{sinc}(x + N) + \text{sinc}(x + 2N) + \dots + \text{sinc}(x + 3N) + \dots = N^{-1} \sin(N\pi x) / \sin(\pi x)$ .

#### 4.7. Порядок защиты работы

Работа может быть зачтена, если студент представил отчет согласно п. 4.5, исследуемые в работе сигналы соответствуют индивидуальному варианту, электронная форма соответствует представленному тексту, и студент дал исчерпывающие ответы на 10 произвольных вопросов из п.4.6.



## Литература

1. Гольденберг Л.М. и др. Цифровая обработка сигналов: справочник / Л.М. Гольденберг, Б.Д. Матюшкин, М.Н. Поляк. – М.: Радио и связь, 1985. – 312 с.
2. Гутников В.С. Фильтрация измерительных сигналов. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1990. – 192 с.
3. Каппелини В., Константиnidис А.Дж., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применение. – М.: Энергоатомиздат, 1983.

## Практическое занятие №5 «Фурье-анализ квазипериодических сигналов»

### 1 Краткие теоретические сведения

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) широко применяется в цифровой технике для обработки сигналов. Прямое ДПФ выполняется над последовательностью дискретных комплексных величин  $\{a_k\}$  конечной длительности. В результате получается также конечной длительности дискретная последовательность комплексных величин  $\{\alpha_s\}$ , представляющих спектр указанной исходной последовательности. При обратном ДПФ по второй последовательности находится первая из них. Каждая из этих последовательностей содержит одинаковое количество  $N$  дискретных отсчетов.

Преобразование Фурье можно рассматривать как линейное преобразование с ядром

$$H(f, t) = \exp(-i2\pi ft). \quad (2.1)$$

Если спектр сигнала  $a(t)$  лежит в интервале  $[-F, F]$ , то такой сигнал согласно теореме Шеннона-Котельникова может быть восстановлен по своим дискретным отсчетам  $a(k/2F)$ , согласно интерполяционной формуле

$$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a\left(\frac{k}{2F}\right) \operatorname{sinc}\left[2\pi F\left(t - \frac{k}{2F}\right)\right], \quad (2.2)$$

где  $k$ -номер отсчета,  $1/(2F)$  – найквистовская частота дискретизации. Преобразование Фурье сигнала (2.2) имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} a(t) \exp(-i2\pi ft) dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a\left(\frac{k}{2F}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \operatorname{sinc}\left(2\pi F\left(t - \frac{k}{2F}\right)\right) \right] \exp(-i2\pi ft) dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2F} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a\left(\frac{k}{2F}\right) \exp\left(-i2\pi f \frac{k}{2F}\right). \quad (2.3)$$

Рассмотрим периодический сигнал с периодом  $T$ :

$$a_{nep}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(t + nT). \quad (2.4)$$

Пусть  $\alpha_{nep}\left(\frac{s}{T}\right)$  – отсчеты спектра сигнала  $a_{nep}(t)$ , взятого на отрезке  $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ .

Если  $T$  достаточно велико, а сигнал  $a(t)$  достаточно быстро спадает до нуля на интервале  $T$ , так что его искажениями в сумме (2.4) за счет наложения периодов можно пренебречь, то

$$\alpha_{nep}\left(\frac{s}{T}\right) \approx \alpha\left(\frac{s}{T}\right),$$

отсюда

$$\alpha_{nep}\left(\frac{s}{T}\right) \approx \frac{1}{2F} \sum_k a\left(\frac{k}{2F}\right) \exp\left(-i2\pi \frac{ks}{2TF}\right), \quad (2.5)$$

причем суммирование по  $k$  проводится в пределах  $|k| < TF$ .

Значения  $T$  и  $F$  можно всегда выбрать так, чтобы величина  $2TF$  была целой. Обозначим ее  $N$ . Обозначим также

$$\alpha_s = \sqrt{\frac{2F}{T}} \alpha\left(\frac{S}{T}\right) \exp\left(-i2\pi \frac{k_0 S}{N}\right), \quad (2.6)$$

$$a_k = a\left(\frac{k - k_0}{2F}\right). \quad (2.7)$$

Здесь  $k_0$  выбрано так, чтобы суммирование в (2.5) могло производиться по  $k$  от 0 до  $N - 1$ . Тогда, подставляя (2.7) в (2.5), а (2.5) в (2.6), получим

$$\alpha_S = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp\left(-i2\pi \frac{kS}{N}\right). \quad (2.8)$$

Это соотношение называется ДПФ.

ДПФ обратимо:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{S=0}^{N-1} \alpha_S \exp\left(i2\pi \frac{kS}{N}\right). \quad (2.9)$$

Ядро ДПФ – матрица

$$F_N = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-i2\pi \frac{kS}{N}\right) \right\}. \quad (2.10)$$

является дискретным представлением непрерывного преобразования Фурье ( $k$  – номер столбца,  $S$  – номер строки).

Коэффициенты  $\{\alpha_S\}$  ДПФ последовательности  $\{a_k\}$  приближенно равны отсчетам спектра сигнала  $a(t)$ , периодически продолженного с периодом  $T$ , взятым с шагом  $1/T$ . Такова связь ДПФ с непрерывным преобразованием Фурье. Из предположения ограниченной протяженности сигнала вытекает, что для его спектра справедлива теорема отсчетов и что, следовательно, он может быть восстановлен по величине  $\{\alpha_S\}$  – коэффициентам ДПФ отсчетов сигнала.

Вместо представлений ДПФ в виде сумм удобнее пользоваться матричными обозначениями. В этих обозначениях одномерное ДПФ можно записать так:

$$\alpha = F_N a, \quad (2.11)$$

где  $a$  – матрица-столбец, составленная из отсчетов преобразуемой последовательности  $\{a_k\}$ ;

$\alpha$  – матрица-столбец, составленная из коэффициентов ДПФ  $\{\alpha_S\}$ ;

$F_N$  – квадратная матрица ДПФ порядка  $N$ .

Матрица ДПФ относятся к классу так называемых унитарных матриц, для которых обратная матрица получается их транспонированием и заменой элементов на комплексно-сопряженные.

Общая формула для элемента матрицы, расположенного в  $k$ -м столбце и в  $s$ -й строки, выглядит так

$$F(s, k) = \exp(-i2\pi(s-1)(k-1)/N),$$

где  $1 \leq s \leq N, 1 \leq k \leq N$ ,

что соответствует формуле (2.10). Нормирование по  $N$  можно проводить после перемножения вектора  $a$  на столбец матрицы  $F$ , то есть нормирующий коэффициент может быть учтен в формуле (2.11), а не в (2.10).

## 2. Объект исследования

Объектом исследования в данной лабораторной работе являются дискретные отсчеты электрокардиосигналов, записанные в файлах, полученных в результате выполнения лабораторной работы №1.

## 3. Цель работы

Изучить методы получения дискретного спектра биомедицинских сигналов

## 4. Содержание работы и порядок ее выполнения

1. Задавшись соответствующим базисом (по умолчанию базисом Фурье) запишите матрицу спектрального преобразования для этого базиса.

2. Зарисуйте схему алгоритма и создайте программный модуль для выбранного спектрального преобразования.

3. Подайте на вход созданного в п. 3 программного модуля сигнал, файл данных которого получен в результате выполнения лабораторной работы №1. Распечатайте сигнал на выходе программного модуля. Сравните полученный спектр с теоретической картиной спектра.

4. Получить обратное ДПФ найденного сигнала. Используя один из методов интерполяции постройте график найденной функции. Сравните полученный график с графиком исходного сигнала.

## 5. Содержание отчета

1. Распечатка графика исходного сигнала.
2. Распечатка графика ДПФ (спектральной плотности).
3. Распечатка графика обратного ДПФ.
3. Схемы алгоритмов и листинги созданных программ
4. Электронная форма на дискете 3.5”.

## 5. Выводы.

## 6. Контрольные вопросы

1. Как изменятся формулы (2.10) и (2.11), если в качестве ядра преобразования в формуле (2.1) использовать  $\exp(i2\pi ft)$ ? Как при этом изменится спектр  $a(t)$ ?

2. Составьте матрицу-ядро обратного ДПФ.

3. Какова связь угловой частоты с круговой? Какие преимущества дает использование круговой частоты в формулах (2.10) и (2.11)?

4. Что произойдет, если мы увеличим размерность матрицы отсчетов? Уменьшим размер?

5. Почему при разложении действительных функций времени  $S(t)$  можно использовать систему комплексных базисных функций  $\{\exp(i2\pi ftk)\}$ ?

6. При каких условиях можно пользоваться формулой прямого ДПФ?

7. Что происходит со спектром при сжатии (растяжении) сигнала?

8. Как осуществляется дискретизация непрерывного сигнала по времени? Чем определить интервал дискретизации?

9. В каких случаях целесообразно использовать ДПФ, и для каких целей?

10. С чем связано требование ограниченности спектра сигнала, представляемого дискретным рядом Фурье? Что будет, если это требование не выполнено?

11. Что будет, если спектр сигнала оказался шире, чем предполагалось при представлении его дискретным рядом Фурье?

12. Коэффициенты разложения функций  $s(t)$  и  $f(t)$  по базису  $\{\exp(i\omega t)\}$  равны, соответственно,  $\{1, 0, 1, 2, 1\}$  и  $\{4, 0, 1\}$ . Определите коэффициенты разложения произведения этих функций в том же базисе.

13. Как изменится преобразование Фурье  $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-i\omega t} dt$  при умножении  $s(t)$  на  $\cos\omega_0 t$ ?

14. Чем отличается комплексный спектр Фурье от вещественного?

15. Как изменится преобразование Фурье  $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-i\omega t} dt$  при умножении  $s(t)$  на  $s(t - t_3)$ , где  $t_3$  – некоторая константа?

16. Произвольная функция  $s(t)$  задана на интервале  $(0; 3\pi/2)$ . Как запишется тригонометрический базис для этой функции?

17. Как изменится преобразование Фурье  $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-i\omega t} dt$ , если аргумент  $t$  заменить на  $t - t_3$ , где  $t_3$  – некоторая константа?

18. Чем отличается спектр функции, полученный при ее разложении в комплексный ряд, от спектра функции, полученного при ее разложении в ряд по множеству Фурье?

19. Доказать, что энергетический спектр белого шума  $s(\omega) = N_0/2$ .

20. Известно, что множество Фурье ортогонально на любом интервале, длина которого  $2\pi$ . Как разложить функцию по этому базису на этом интервале, если ее период составляет  $\sqrt{2}\pi$ ?

21. Произвольная функция  $s(t)$  задана на интервале  $(-1,1)$ . Как запишется тригонометрический базис для этой функции?

22. Известно, что множество Фурье ортогонально на любом интервале, длина которого  $2\pi$ . Как разложить функцию по этому базису на этом интервале, если ее период составляет  $(6/2,2)\pi$ ?

23. Почему для разложения действительной функции  $s(t)$  можно использовать систему комплексных базисных функций  $\{e^{i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t}\}$ ?

24. Пусть мы раскладываем в ряд Фурье функцию вида

$$y(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -\tau_u \leq x \leq \tau_u; \\ 0 & \text{при } -T/2 \leq x < -\tau/2 \text{ и } \tau_u < x \leq T/2. \end{cases}$$

25. Как изменится спектр этой функции при уменьшении  $\tau$ ?

26. Пусть мы определяем преобразование Фурье функции вида

$$y(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -\tau_u \leq x \leq \tau_u; \\ 0 & \text{при любых других } x. \end{cases}$$

27. Как изменится спектр этой функции при увеличении  $\tau$ ?

## 7. Порядок защиты работы

Работа может быть зачтена, если студент представил отчет согласно п. 2.5, исследуемые в работе сигналы соответствуют индивидуальному варианту, электронная форма соответствует представленному тексту, и студент дал исчерпывающие ответы на 10 произвольных вопросов из п. 2.6.

## Литература

1. Марпл.-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
2. Методические указания к курсу лабораторных работ «Исследование линейных дискретных преобразований» / Курск. гос. техн. ун-т; сост. С.А. Филист, Курск. КПИ. – 1993. – 13 с.



## Практическое занятие №6 «Вейвлет-анализ квазипериодических сигналов»

**Цель:** получение и закрепление навыков работы в среде Matlab с пакетом расширения Wavelet Toolbox. Исследование вейвлет-спектра типовых сигналов (стационарных и нестационарных).

### Теоретическое введение:

В основе Фурье-анализа лежит утверждение, что любую  $2\pi$ -периодическую функцию можно разложить на составляющие, т.е. может быть получена суперпозицией целочисленных растяжений базисной функции  $e^{ix}$ .

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (1.1),$$

где  $c_n$  – коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (1.2).$$

Процесс разложения функции проиллюстрирован на рисунке 1

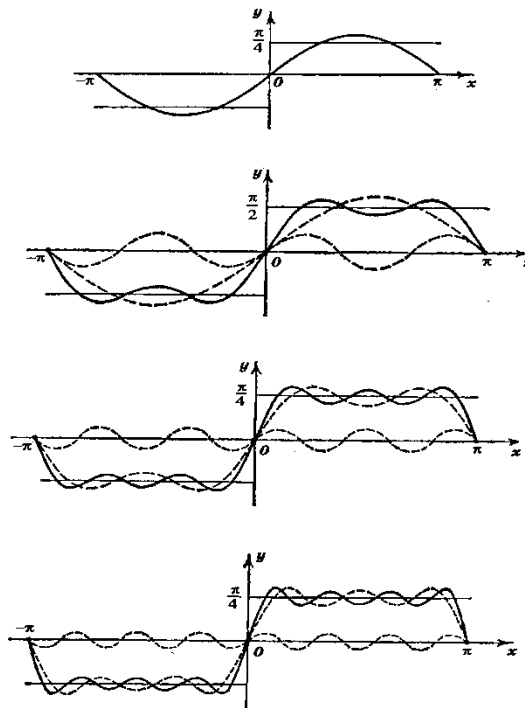


Рисунок 1

Преобразование Фурье дает спектральную информацию о сигнале и описывает его поведение в частотной области.

При переходе в частотную область полностью теряется информация о времени, что делает непригодным метод спектрального анализа при обработке нестационарных сигналов, в которых определяющее значение имеет момент времени, в который произошло то или иное событие.

В отличие от кратковременного преобразования Фурье, которое обеспечивает равномерную сетку в частотно-временной области, вейвлет-преобразование имеет неравномерное разрешение, что позволяет исследовать сигнал как локально, так и полностью.

Т.к. частота обратно пропорциональна периоду, то требуется более узкое окно для локализации высокочастотной составляющей сигнала и более широкое для низкочастотной составляющей. Кратковременное преобразование Фурье допустимо применять для сигнала со сравнительно узкой полосой частот. Для широкополосного сигнала хотелось бы иметь окно, способное изменять свою ширину при изменении частоты.

Введем функцию  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ , удовлетворяющую условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\varphi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

и назовем ее «базисным вейвлетом».

Относительно каждого базисного вейвлета интегральное вейвлет-преобразование определяется как

$$(W_\varphi f)(b, a) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \text{ где } a, b \in \mathbb{R}; \quad a \neq 0$$

Обозначим

$$\varphi_{b;a}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Интегральное преобразование примет вид

$$(W_\varphi f)(b, a) = \langle f, \varphi_{b;a} \rangle$$

Если центр и радиус функции-окна  $\varphi$ , соответственно, равны  $t^*$  и  $\Delta_\varphi$ , то  $\varphi_{b;a}(t)$  есть функция-окно с центром  $b+at^*$  и радиусом  $a\Delta_\varphi$ . Следовательно, интегральное вейвлет-преобразование локализует аналоговый сигнал во временном окне

$$\left[ b + at^* - a\Delta_\varphi, b + at^* + a\Delta_\varphi \right].$$

Рассмотрим

$$\frac{1}{2\pi} \hat{\varphi}_{b;a}(\omega) = \frac{|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \frac{a|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} e^{-i\omega t} \hat{\varphi}(a\omega)$$

Пусть центр и радиус функции-окна  $\hat{\varphi}$  равны, соответственно,  $\omega^*$  и  $\Delta_{\hat{\varphi}}$ .

Тогда, сместим центр окна на  $\omega^*$  в 0 и обозначим

$$\eta(\omega) = \hat{\varphi}(\omega + \omega^*)$$

Применяя равенство Парсеваля

$$(W_{\varphi}f)(b,a) = \frac{a|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ib\omega} \overline{\eta\left(a\left(\omega - \frac{\omega^*}{a}\right)\right)} d\omega$$

Очевидно, что окно

$$\eta\left(a\left(\omega - \frac{\omega^*}{a}\right)\right) = \eta(a\omega - \omega^*) = \hat{\varphi}(a\omega)$$

имеет радиус  $\frac{1}{a} \Delta_{\hat{\varphi}}$ .

Интегральное вейвлет-преобразование также локализует сигнал по частоте с окном

$$\left[ \frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a} \Delta_{\hat{\varphi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a} \Delta_{\hat{\varphi}} \right]$$

Аналогично преобразованию Габора введем частотно-временное окно для интегрального вейвлет-преобразования:

$$\left[ b + at^* - a\Delta_{\varphi}, b + at^* + a\Delta_{\varphi} \right] \times \left[ \frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a} \Delta_{\hat{\varphi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a} \Delta_{\hat{\varphi}} \right]$$

Видно, что окно автоматически сужается при высокочастотных явлениях (малых масштабах) и расширяется при низкочастотных (больших масштабах).

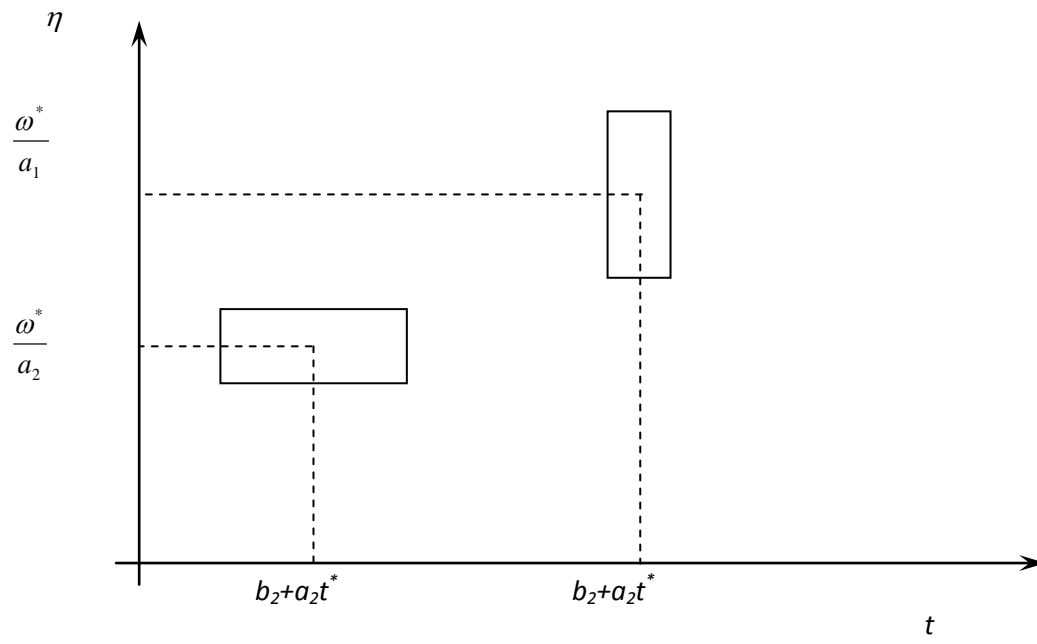


Рисунок 2

## Порядок выполнения работы:

1. Сгенерировать стационарные, нестационарные сигналы и сигналы с шумом;

*Пример*

$$t=0:0.1:6*\pi;$$

*Стационарные сигналы*

$$y=\sin(t);$$
$$z=\sin(t)+\sin(2*t);$$

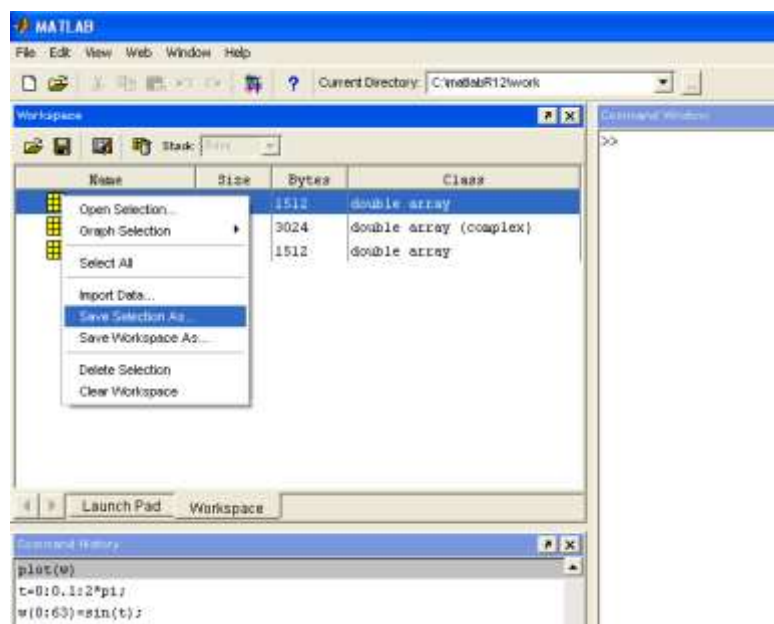
*Сигнал с шумом*

$$N=\text{rand}(1,189);$$
$$w=\sin(t);$$
$$w=w+N;$$

*Нестационарный сигнал*

$$t=0:0.1:2*\pi;$$
$$w(1:63)=\sin(t);$$
$$w(64:126)=\cos(t);$$
$$w(127:190)=\cos(2*t);$$

Далее их нужно сохранить (каждый сигнал в отдельном файле), для этого в окне рабочей области выделяется нужная переменная и в контекстном меню выбирается пункт *Save Selection As....*



2. Проанализировать сигналы с использованием преобразования Фурье, объяснить результаты;

Для построения Фурье-спектра используется функция  $\text{Fft}(\text{имя сигнала}, \text{число точек ДПФ})$

*Пример*

$$Y=\text{fft}(\text{Sig}, 512)$$

$A=abs(Y);$   
 $plot(A(1:length(A)/2));$

3. Рассмотреть кратковременное преобразование Фурье для анализируемого сигнала, объяснить результаты;

Для построения спектрограммы используется функция  
`Specgram(имя сигнала)`

Пример

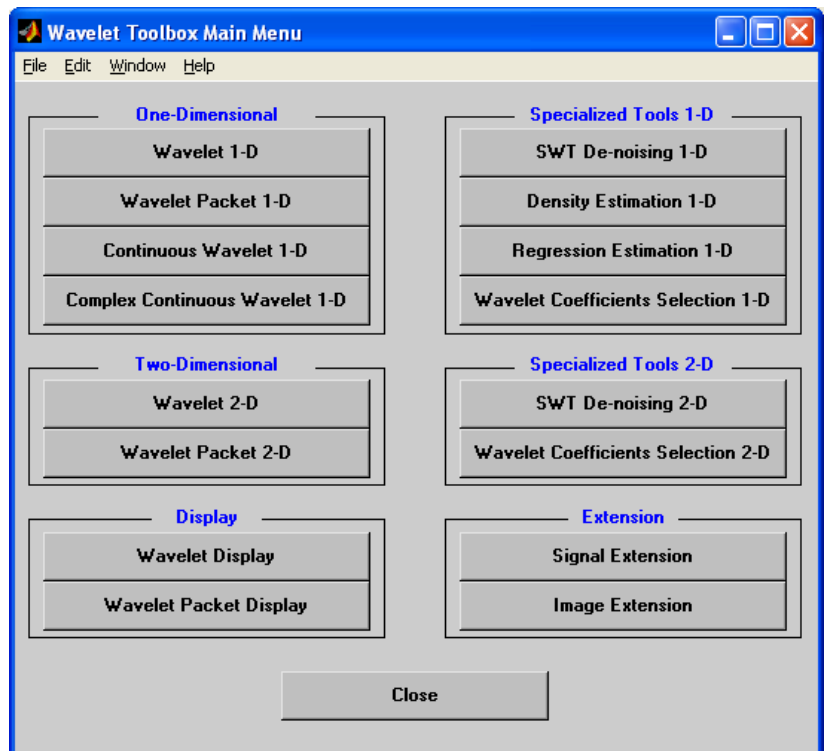
`Specgram(Sig)`

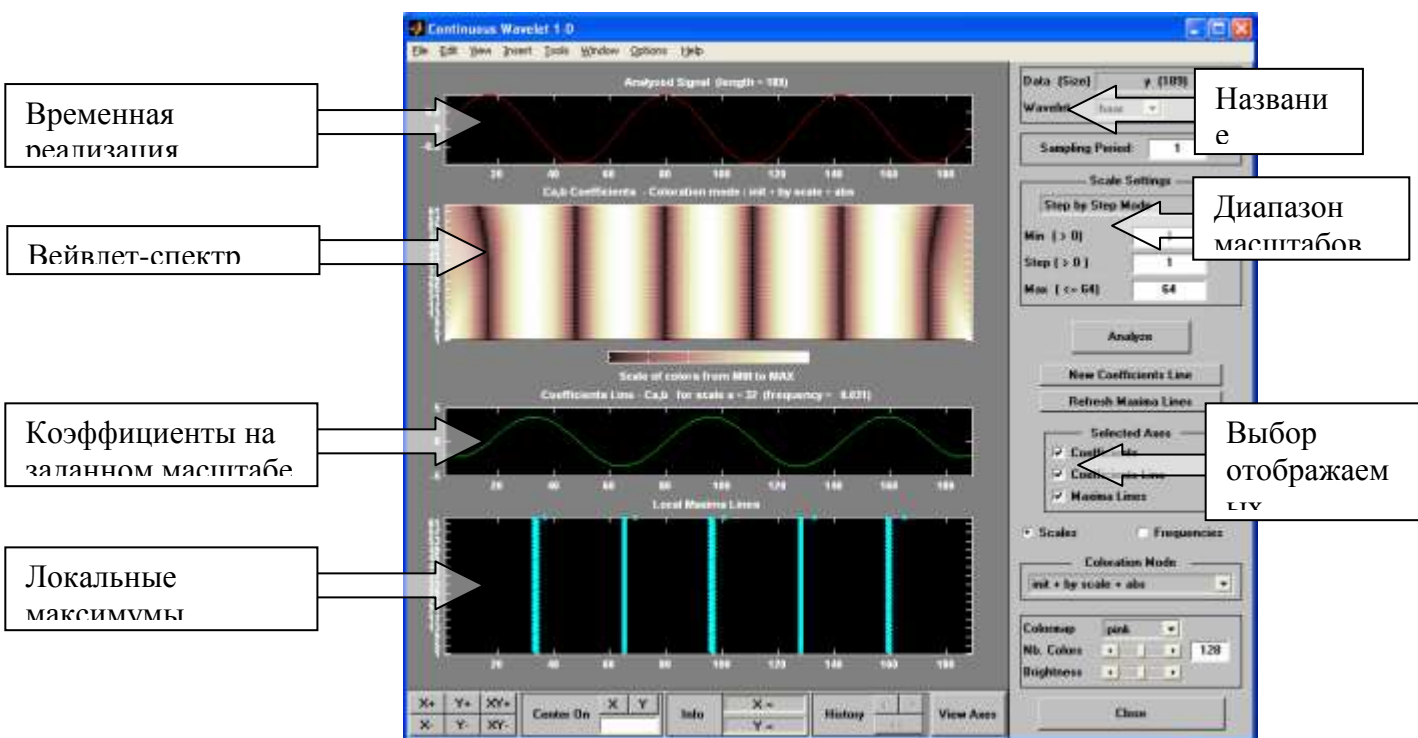
4. Проанализировать полученные сигналы с использованием различных вейвлетов (не менее 3), объяснить результаты, определить «оптимальный» (дающий наибольшую информацию) вейвлет для сигнала;

Для построения вейвлет-спектра можно использовать графический интерфейс, вызов которого осуществляется командой `wavemenu`.

Непрерывное  
одномерное вейвлет-  
преобразование

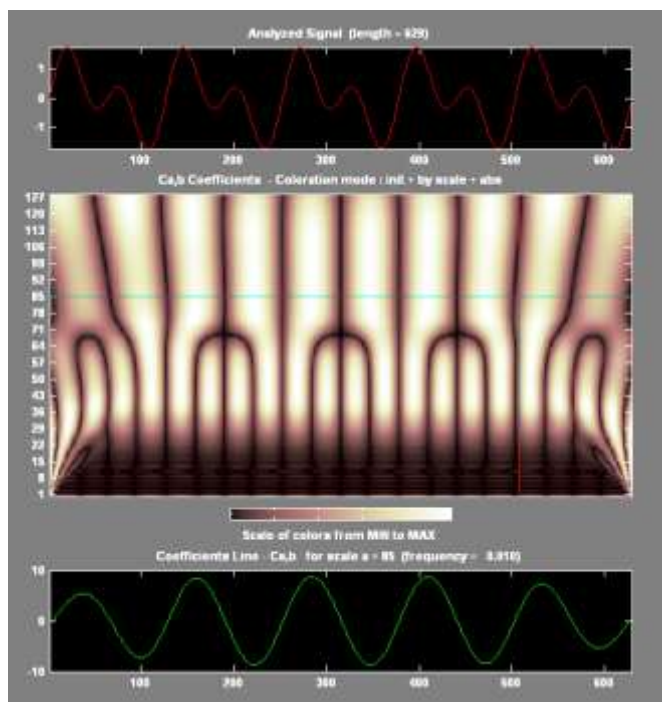
Просмотр вейвлетов и  
их свойств





Для загрузки сигнала используется пункт меню File/Load Signal

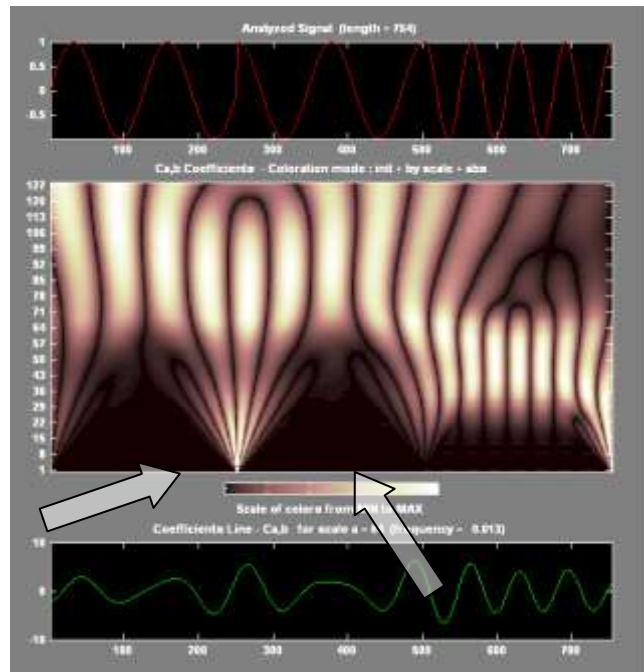
Ниже приведен пример анализа сигнала  $z = \sin(t) + \sin(2*t)$ . Видно, что сигнал содержит две частоты, разделенных на масштабе  $\sim 70$ . Вейвлет-коэффициенты меняются периодически, что доказывает периодичность сигнала.



При анализе нестационарного сигнала вейвлет-спектр показывает изменение частоты в момент времени 500, а также изменение,



произошедшее в момент времени  $\sim 250$ , причем можно сделать вывод, что частота сигнала в данном случае осталась неизменной.

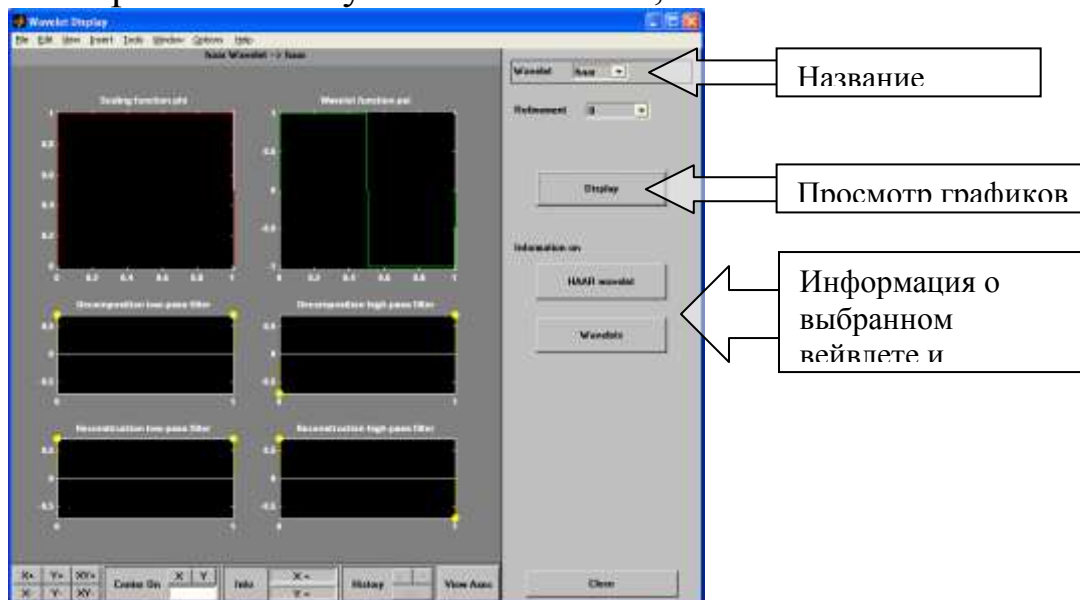


5. Сравнить и объяснить результаты Фурье- и вейвлет-анализов.

### Требования к отчету.

Отчет должен содержать:

1. Временную реализацию исследуемых сигналов;  
Для построения графиков используется функция `plot(имя переменной)`
2. Фурье-спектры сигналов;
3. Спектрограммы сигналов;
4. Формы используемых вейвлетов;



5. Вейвлет-спектры сигналов;
6. Результаты анализа и сравнения.

### Варианты заданий

Для всех вариантов

- $t_1, t_2, t_3, t_4$  выбираются таким образом, чтобы получаемые сигналы содержали не менее 2-х периодов,
- для генерации сигнала с шумом использовать стационарный сигнал и шум с равномерной плотностью распределения.

#### Вариант №1

$$Y=3\sin(t)$$

$$w(t_1..t_2)=\sin(t); w(t_2..t_3)=\sin(5t); w(t_3..t_4)=\sin(10t);$$

#### Вариант №2

$$Y=\sin(5t)$$

$$w(t_1..t_2)=\sin(t); w(t_2..t_3)=\sin(10t); w(t_3..t_4)=\sin(5t);$$

#### Вариант №3

$$Y=\sin(10t)$$

$$w(t_1..t_2)=\sin(t); w(t_2..t_3)=\text{tg}(5t); w(t_3..t_4)=\sin(10t);$$

#### Вариант №4

$$Y=\sin(t)+\sin(5t)$$

$$w(t_1..t_2)=50\sin(t); w(t_2..t_3)=\text{tg}(5t); w(t_3..t_4)=50\sin(5t);$$

#### Вариант №5

$$Y=\sin(t)+\sin(10t)$$

$$w(t_1..t_2)=\text{square}(t); w(t_2..t_3)=\text{square}(10t); w(t_3..t_4)=\text{square}(5t);$$

#### Вариант №6

$$Y=\sin(10t)+\sin(2t)$$

$$w(t_1..t_2)=\text{sawtooth}(t); w(t_2..t_3)=\text{sawtooth}(10t); w(t_3..t_4)=\text{sawtooth}(5t);$$

#### Вариант №7

$$Y=\sin(t)+\sin(10t)+\sin(15t)$$

$$w(t_1..t_2)=\text{sawtooth}(t,0.5); w(t_2..t_3)=\text{sawtooth}(10t,0.5); w(t_3..t_4)=\text{sawtooth}(5t,0.5);$$

#### Вариант №8

$$Y=\sin(t)+\sin(15t)$$

$$w(t_1..t_2)=\text{sinc}(t); w(t_2..t_3)=\text{sinc}(10t); w(t_3..t_4)=\text{sinc}(5t);$$

#### Вариант №9

$$Y=\sin(t)+\cos(10t)$$

$$w(t_1..t_2)=\sin(t)+\cos(5t); w(t_2..t_3)=\sin(t)+\cos(10t); w(t_3..t_4)=\sin(t)+\cos(15t);$$

#### Вариант №10

$$Y=\sin(t)+\cos(20t)$$

$$w(t_1..t_2)=\sin(15t)+\cos(5t);$$
$$w(t_2..t_3)=\sin(10t)+\cos(10t);w(t_3..t_4)=\sin(5t)+\cos(15t);$$

### **Рекомендуемая литература**

- Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук, 1996, Том 166. №11. с.1145-1170
- Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование // Успехи физических наук, 2001, №5. Том 171.
- Чуи Ч. Введение в вейвлеты: Пер. с англ. – М.: Мир, 2001

## Практическое занятие №7 «Исследование методов контурного анализа изображений»

**Цель работы:** изучить аналитические модели представления контуров плоских изображений.

### Основные теоретические сведения.

Важную роль в контурном анализе играют бинарные по яркости многоточечные (распределенные) изображения.

0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0	0

Рисунок 1.1- Пример представления бинарного изображения на квадратной сетчатке

Обозначим через  $s(x, y)$  исходное, а через  $\omega(m_1, m_2)$  – оцифрованное бинарное изображение (рисунок 1.1), причем яркости  $I(x, y)$  точки  $(x, y)$  и  $I(m_1, m_2)$  клетки  $(m_1, m_2)$  будут равны

$$I(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } (x, y) \in s, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$
$$I(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } (x, y) \in \omega, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Размер клетки (пиксела) сетчатки обычно выбирается из условия возможности восстановления по оцифрованному  $\omega(m_1, m_2)$  исходного изображения  $s(x, y)$ . Ошибки дискретизации вызываются наличием граничных пикселей, в пределах которых содержатся участки как фона, так и изображения объекта. После оцифровки каждый пиксел однозначно относится либо к фону, либо к изображению. Поэтому формы изображений  $s(x, y)$  и  $\omega(m_1, m_2)$  не совпадают. Величина ошибки

дискретизации зависит не только от размеров  $\delta x \delta y$  пиксела, но и от вида критерия принятия решения о принадлежности каждого из пикселов фону или изображению. Критерий должен определять, какую часть клетки должно занимать изображение объекта, чтобы в ячейку ОЗУ сцен, соответствующую этому пикселу, была бы занесена единица. Для определенности примем следующее правило: если площадь изображения не менее половины площади  $\delta x \delta y$  пиксела, то в соответствующую ячейку ОЗУ заносится единица.

Граничные клетки отличаются от внутренних клеток изображения наличием в качестве соседней одной или нескольких фоновых клеток. При этом в качестве соседних к рассмотрению берутся только горизонтальные и вертикальные соседние клетки, либо только диагональные. Границу бинарного изображения будем задавать точками в центрах граничных клеток (рисунок 1.2).

Если сместить сетчатку на величину половины длины стороны квадрата вправо и вверх, то граничные точки изображения окажутся в узлах сетчатки. В результате восприятие контура упрощается. В дальнейшем будем использовать оба таких представления контура оцифрованного бинарного изображения.

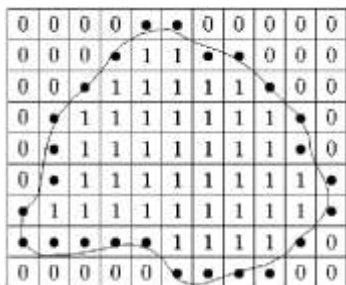


Рисунок 1.2 - Задание точками граничных клеток бинарного изображения при учете соседства только по вертикали и горизонтали

### ***1.1.1. Кодирование контуров бинарных изображений***

Кодирование контура – это этап получения дискретного сигнала, описывающего границы оцифрованного бинарного изображения. Всякая область  $D$  плоскости комплексного переменного содержит внутренние точки и точки контура (граничные точки). Первые из них обладают тем свойством, что не только они сами, но и их некоторая окрестность целиком принадлежит области  $D$ . Точки контура не являются внутренними, но в сколь угодно малой окрестности таких точек находятся внутренние точки области  $D$  и точки, не принадлежащие области  $D$ , – внешние (фоновые) точки. Область  $D$  обладает свойством

связности, состоящим в том, что любые ее точки соединяются линией, целиком находящейся внутри  $D$ .

**Линия контура**  $\Gamma$  называется **выпуклой**, если прямолинейный отрезок, соединяющий две ее любые точки, целиком состоит из внутренних точек области  $D$ . Участок контура будет вогнутым, если такой отрезок будет включать внешние (фоновые) точки.

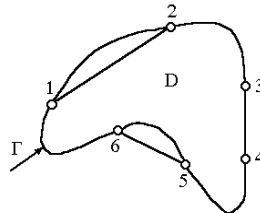


Рисунок 1.3 - Фрагменты контура  $\Gamma$ : 1, 2 –выпуклый; 3, 4 – неопределенный; 5, 6 - вогнут

**Область**  $D$  называется **ограниченной**, если все ее точки находятся на конечном расстоянии от начала отсчета. Число связных частей, на которые разбивается контур ограниченной области  $D$ , называется **порядком связности** этой области. В пределах основного контура  $\Gamma$  могут находиться другие изображения  $s_j(x, y)$ ,  $j=1,2,\dots$ , со своими замкнутыми контурами  $\Gamma_{(1)}, \Gamma_{(2)}, \dots$ . Такое изображение  $s(x, y)$  является многосвязным. Если  $s(x, y)$  – бинарное изображение, то находящиеся внутри него изображения образуют полости, в том числе и точечные.

Характерными фрагментами бинарного оцифрованного изображения являются лучи и разрезы толщиной в один пиксел (рисунок 1.4).

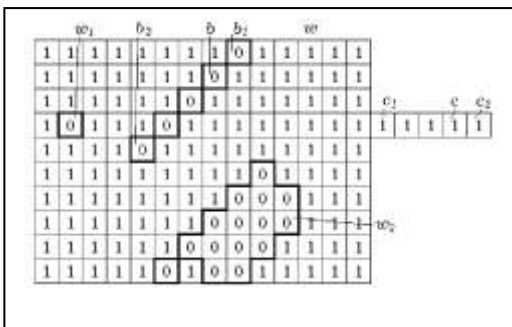


Рисунок 1.4 - Трехсвязное оцифрованное изображение  $\omega$  с точечной полостью  $\omega_1$ , многоточечной полостью  $\omega_2$ , разрезом  $b$  и лучем  $c_1$ . Точки  $b_1$  и  $c_1$  - основания,  $b_2$  и  $c_2$  – вершины

Для каждого контура задается начальная точка  $a_0$ , отправляясь от которой обходится весь контур. Условимся такой обход производить по часовой стрелке. Точки лучей и разрезов при этом будут обходиться

дважды. Фундаментальными свойствами контуров реальных изображений являются замкнутость и непрерывность их линий.

Внутренний элемент (пиксел) бинарного оцифрованного изображения  $w(m_1, m_2)$  обладает свойством четырехсвязности, т.е. смежные с ним элементы – верхний, нижний, левый и правый, тоже принадлежат  $w(m_1, m_2)$  (рисунок 1.5, а). Для граничных элементов изображения  $w(m_1, m_2)$ , образующих контур  $\Gamma$ , правило четырехсвязности не выполняется (рисунок 1.5, б).

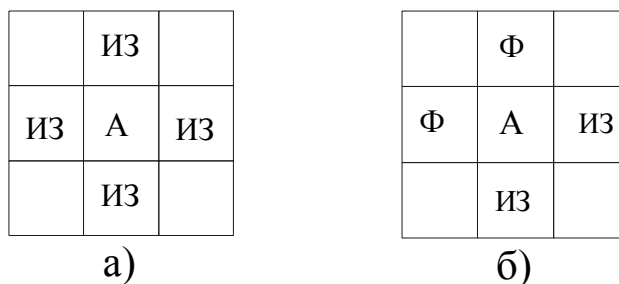


Рисунок 1.5 - Условие четырехсвязности для элемента  $A$  оцифрованного изображения: а)  $A$  – внутренний элемент; б)  $A$  – элемент контура;  $\Phi$  – элемент фона; ИЗ – элемент изображения

Для обработки контура аналитическим путем или на ЭВМ надо произвести его кодирование, т.е. поставить в соответствие каждому контурному элементу определенное число. Последовательность таких чисел называется кодом контура. Используем следующую терминологию при задании и кодировании контуров на квадратной сетчатке.

Элементарный вектор (ЭВ)  $\gamma(n)$  – вектор, соединяющий центры или узлы соседних контурных ячеек сетчатки, проведенный в направлении обхода;  $n$  – номер этого ЭВ, отсчитываемый от точки  $a_0$  обнаружения контура,  $n = 0, 1, \dots, k - 1$ ,  $k$  – количество ЭВ в контуре данного изображения (рисунок 1.6). Такие ЭВ будем называть стандартными в отличие от ЭВ, длина и аргумент которых задаются произвольными числами. Стандартные ЭВ формируются естественным образом по введенному в ОЗУИ изображению. Получившийся в результате этого код в виде последовательности ЭВ, соединяющих соседние контурные клетки, называется цепным. Произвольный контур  $\Gamma$ , состоящий из ЭВ  $\gamma(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, k - 1$ , запишем в виде

$$\Gamma = \{\gamma(n)\}_{0, k-1} = \{\gamma(0), \gamma(1), \dots, \gamma(k-1)\}. \quad (1.1)$$

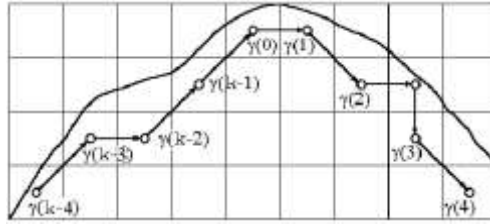


Рисунок 1.6 - Задание контура элементарными векторами

Контурные будем обозначать прописными буквами греческого алфавита  $\Gamma, N, P, \dots$ , а их ЭВ - соответствующими строчными буквами  $\nu(n), \gamma(n), \rho(n), \dots$ . ЭВ являются первыми разностями функций, задающих линию контура. В том случае, когда это не приводит к неоднозначному пониманию, код контура, заданный с помощью ЭВ, перед обозначением контура будем ставить букву  $\Delta$ , например,  $\Delta \Gamma$ .

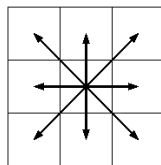
На квадратной сетчатке возможны восемь различных стандартных ЭВ, соединяющих соседние пиксели (рисунок 1.7, а). Рассмотрим некоторые способы кодирования контуров.

1. Кодирование по трем признакам: длине текущего ЭВ, направлении поворота при переходе к следующему ЭВ и углу между соседними ЭВ.

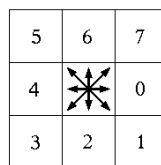
2. Кодирование текущего ЭВ трехразрядным двоичным кодом (числа от 0 до 7) (рисунок 1.7, б). Данный код был предложен Фрименом и получил широкое распространение в задачах обработки изображений.

3. Кодирование текущего ЭВ двумя его проекциями на оси координат с началом отсчета, совмещенным с началом ЭВ – двумерный код (рисунок 1.8).

4. Полигональное представление контура получается при его аппроксимации линейными сегментами (рисунок 1.9). Кодирование состоит в фиксации координат концов этих сегментов. Данный способ благодаря компактности получаемых описаний получил широкое распространение. При этом возникает проблема сегментации, сходная с проблемой дискретизации сигналов. В реальных случаях она обычно связана с потерей информации о форме изображений.



а)



б)

Рисунок 1.7- К определению элементарных векторов контуров:

- а) виды возможных элементарных контуров на квадратной сетчатке,
- б) нумерация элементарных векторов по Фримену




-1,1	0,1	1,1
-1,0		1,0
-1,-1	0,-1	1,-1

Рисунок 1.8 - Координаты элементарного вектора при двумерном кодировании

5. Задание ЭВ контура восьмью комплексными числами  $\{1, 1 - i, -i, -1 - i, -1, -1 + i, i, 1 + i\}$ .

Комплекснозначный код контура  $\Delta_d = \{\gamma(n)\}_{0, k-1}$  введем как обобщение цепного кода Фримена  $\Delta_\Phi$  на плоскость дискретного комплексного переменного с квадратной сеткой. Вместо номеров, кодирующих текущие ЭВ  $\gamma(n)$  контура, каждому ЭВ ставится в соответствие координата его конечной точки в системе отсчета, совмещенной с началом вектора (рисунок 1.10). Эти ЭВ являются стандартными. Модули их вещественной и мнимой частей равны либо единице, либо нулю.

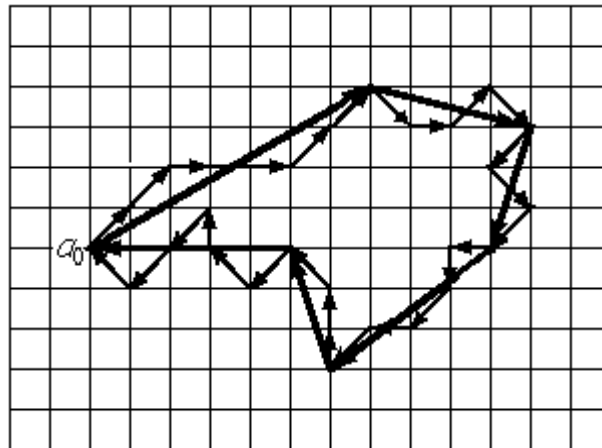


Рисунок 1.9 - Полигональное представление контура как аппроксимация контура линейными сегментами


$-1+i$	$i$	$1+i$
$-1$		$1$
$-1-i$	$-i$	$1-i$

Рисунок 1.10 - Координаты элементарного вектора при комплекснозначном кодировании

Формирование стандартных ЭВ характерно для начального этапа обработки. На этом этапе каждая ячейка ОЗУИ ассоциируется с пикселом квадратной сетчатки и чтобы не пропустить ни одного относящегося к контуру пиксела, элементы кода  $\Delta\Gamma$  должны быть стандартными. Дальнейшая обработка может быть оторвана от сетчатки ОЗУИ, на которой возможны лишь восемь различных значений ЭВ. Более общий характер имеет полигональное представление контура в виде ориентированного  $k$ -угольника. Выражение для элемента кода  $\Delta\Gamma$  в полигональном представлении имеет вид

$$\gamma(n) = \gamma_1(n) + i\gamma_2(n) = |\gamma(n)| \exp\{i\varphi(n)\}, \quad (1.3)$$

где  $\gamma_1(n) = \text{Re}\gamma(n)$ ;  $\gamma_2(n) = \text{Im}\gamma(n)$ ;  $|\gamma(n)|$  и  $\varphi(n)$  – модуль и аргумент ЭВ.

6.  $P$ -представление контура основано на проведении в области изображения ряда равноотстоящих сечений параллельно координатной оси и определении координат точек пересечения с контуром. Контур задается вектором, компонентами которого являются координаты граничных точек изображения в каждом сечении. Данное представление полезно при выводе изображения на индикатор, при определении факта пересечения изображений, вычисления некоторых геометрических характеристик.

7. Представление линии контура полярным кодом. На изображении  $\omega(m_1, m_2)$  выбирается полюс – начало отсчета (т. О) естественной (собственной) системы координат, т.е. системы отсчета, связанной с этим изображением. Центры всех граничных точек изображения соединяются с т. О. В результате получается последовательность радиус-векторов  $\beta(n)$ , однозначно задающих контур изображения (рисунок 1.11). Часто полюс совмещается с центром тяжести изображения.

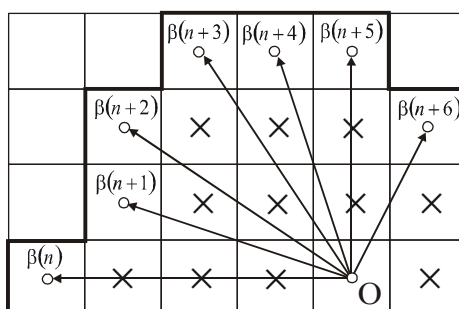


Рисунок 1.11 - Пример задания фрагмента контура полярным кодом:

$$B = \{ \dots; -4; -3 + i; -3 + 2i; -2 + 4i; -1 + 4i; 4i; 1 + 2i; \dots \}$$

8. Представление линии контура в виде функции комплексного переменного. Контур как непрерывная замкнутая кривая в комплексной плоскости задается ее координатой  $z(l)$ , зависящей от текущей длины  $l$ .

Приведенные способы кодирования контуров изображений являются только незначительной частью известных и применяемых различными специалистами при обработке изображений. В связи с этим ниже с позиции теории сигналов, рассматриваемых как элементы линейных пространств, производится выбор способа кодирования контура в качестве базового для решения задач контурного анализа.

Перечислим наиболее важные свойства комплекснозначных кодов.

1. Коды  $\Delta\Gamma$  и  $\beta$  инвариантны к переносу изображений;
2. При смещении на  $d$  элементов начальной точки  $a_0$  происходит сдвиг номера ЭВ на величину  $d$ , т.е.

$$\gamma'(n + d) = \gamma(n), \quad (1.4)$$

где  $\gamma^{(d)}(n)$  - ЭВ кода, полученного в результате сдвига начальной точки.

При изменении начала отсчета элементы нового суммарного кода  $\beta'(n)$  выражаются через элементы исходного  $\beta(n)$  следующим образом:

$$\beta'(n) = \beta(n) + \beta_0, \quad (1.5)$$

где  $\beta_0$  - комплексное число, определяющее положение начальной точки контура относительно начала новой системы координат. Так как при этом разностный код не изменился, то элементы нового суммарного кода задаются рекуррентным соотношением  $\beta'(n) = \beta'(n-1) + \gamma(n)$ . Суммарный код является частным случаем полярного кода при совмещении полюса с начальной точкой  $a_0$ .

3. При многократном обходе контура элементы его кода задают периодическую последовательность с периодом  $k$ , т.е.

$$\gamma(n) = \gamma(n \pm \alpha k); \quad \beta(n) = \beta(n \pm \alpha k); \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6.)$$

4. Сумма элементов кода  $\Delta\Gamma$  замкнутого контура равна нулю т.е.

$$\sum_{n=0}^{k-1} \gamma(n) = 0. \quad (1.7)$$

Важнейшим достоинством принятого подхода к описанию контуров последовательностью комплексных чисел, задающих их ЭВ, является возможность преобразования этих контуров аналитическим путем. Код Фримена таким свойством не обладает, так как его элементы задают лишь аргументы стандартных ЭВ. Рассмотрим связь между цепными кодами преобразованного и исходного контуров.

При умножении контура  $\Gamma$  на комплексный множитель  $\mu = |\mu| \exp\{i\Delta\phi\}$  происходит растяжение этого контура в  $|\mu|$  раз и поворот на угол  $\Delta\phi$ :

$$\Gamma_{\mu} = \mu\Gamma = \{|\mu| \exp\{i\Delta\phi\} \gamma(n)\}_{0,k-1}. \quad (1.8)$$

Используя выражение (1.4), можно установить связь между кодами контуров со сдвинутыми на  $d$  ЭВ начальными точками, т.е. между кодами  $\{\gamma^{(d)}(n)\}$  и  $\{\gamma(n)\}$ :

$$\Gamma^{(d)} = \{\gamma^{(d)}(n)\}_{0,k-1} = \{\gamma(n+d)\}_{0,k-1}. \quad (1.9)$$

Из последних двух выражений следует, что между кодами исходного  $\Gamma$  и преобразованного путем поворота, растяжения и сдвига начальной точки  $\Gamma_{\mu}^{(d)}$  контуров существует связь вида

$$\Gamma_{\mu}^{(d)} = \{|\mu| \exp\{i\Delta\phi\} \gamma(n+d)\}_{0,k-1}. \quad (1.10)$$

### ***Задание***

- 1) Аналитически задать исходный контур в комплекснозначном разностном коде.
- 2) Создать бинарное изображение исходного контура.
- 3) Написать программу преобразования одного вида контура в другой (разностный комплекснозначный, суммарный комплекснозначный, полярный комплекснозначный код и код Фримена).
- 4) Написать программу, выполняющую линейные преобразования контуров изображений.

5) Написать программу синтеза элементарных контуров размерности  $k$ .

### ***Контрольные вопросы***

1. Что такое контур изображения? Модели кодирования контуров изображений.

2. Что из себя представляет комплекснозначный код?

3. Проверьте замкнутость контура  $\Gamma = \{3+2i; 1-i; 1+i; 3-2i; -4\}$ /

4. Контур задан кодом Фримена  $\Gamma = \{0; 0; 1; 1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 7; 7\}$ . Построить изображение этого контура и определить его комплекснозначный код.

5. В чем заключается процедура масштабирования контура? Найти комплекснозначный код полигонального контура  $\Gamma = \{8, 3+3i, -3-3i, -8, -6-2i, -6+2i\}$  после растяжения его элементарных векторов в 2 раза.