Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич

Должность: ректор

Дата подписания: 25.09.2022 16:54:36 Уникальный программный ключ: МИНОБРНА УКИ РОССИИ

9ba7d3e34c012eba476**Федеральное** государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Юго-Западный государственный университет» (ЮЗГУ)

Кафедра теоретической механики и мехатроники

| <b>«</b> | <b>&gt;&gt;</b> | 2013 г.      |
|----------|-----------------|--------------|
|          |                 | Л.М.Червяков |
| Пе       | рвый п          | роректор     |
| УΊ       | ВЕРЖ,           | ДАЮ          |

# КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА

Методические указания для самостоятельной работы по дисциплинам «Теоретическая механика», «Механика»

Составитель: О.В.Емельянова, О.Г. Локтионова, С.Ф.Яцун

#### Рецензент

Кандидат технических наук, доцент Б.В.Лушникоа

**Кинематический анализ плоского механизма**: Методические указания для самостоятельной работы по дисциплинам «Теоретическая механика», «Механика»/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: О.В.Емельянова, О.Г. Локтионова, С.Ф.Яцун. Курск, 2013. 21 с.: ил. 11, табл. 0. Библиогр.: с. 21.

Содержат краткие теоретические положения по разделу «Кинематика» на тему «Плоское движение твердого тела». Разобраны примеры решения задач на кинематический анализ плоского механизма и приведены задания для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов инженерно-технических специальностей всех форм обучения.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утвержденной учебно-методическим объединением (УМО).

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60х84 1\16 Усл.печ.л. .Уч.изд.л. .Тираж 50 экз.Заказ. Бесплатно. Юго-Западный государственный университет. 305040, г.Курск, ул.50 лет Октября, 94.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Основная цель данных методических указаний — изучение теоретического материала и овладение навыками решения задач на кинематический анализ плоского механизма.

Для освоения теоретического материала ознакомиться с краткими сведениями из теории рекомендуемой литературы. Ответы на вопросы помогут студентам закрепить теоретическую часть раздела.

Предлагаемая разработка предназначена для аудиторного контроля текущей успеваемости студентов, а также для обучения и самоконтроля во внеаудиторное время при подготовке к практическим занятиям и экзаменам.

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Движение твердого тела называется <u>плоским</u> (или плоскопараллельным), если все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости ( $\Pi$ ) (рис.1).

Рассмотрим сечение S тела какой-нибудь плоскостью OXY, параллельной плоскости  $\Pi$ .

При плоскопараллельном движении все точки тела, лежащие на прямой NN', перпендикулярной сечению S, т.е. плоскости П движутся тождественно.

Отсюда следует, что для изучения движения всего тела достаточно изучить движение сечения S в плоскости XOY.

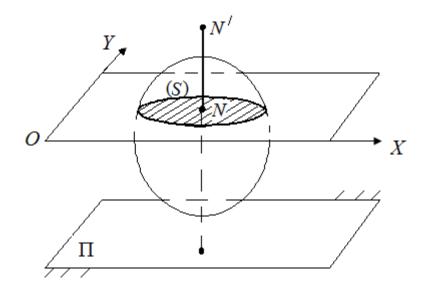


Рис.1. Определение плоского движения

Положение сечения S в плоскости XOY будет определяться положением отрезка AB (рис.2). Точка A называется *полюсом*.

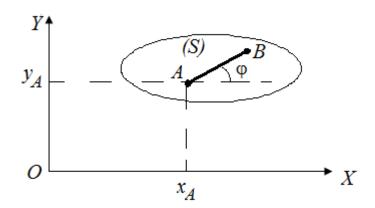


Рис.2. Сечение твердого тела

Тогда уравнение движения плоской фигуры можно записать в следующем виде:

$$x_A = f_1(t); \quad y_A = f_2(t); \quad \varphi = f_3(t).$$
 (1)

## Определение скоростей точек при плоском движении

Для определения скорости точки тела рассмотрим движение плоской фигуры (S) относительно неподвижных осей координат (рис.3).

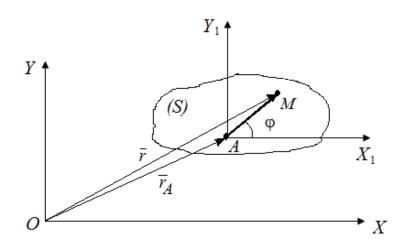


Рис.3. Скорость точки

Радиус-вектор

$$\bar{r} = \bar{r}_A + \overline{AM} \ . \tag{2}$$

Скорость точки M:

$$\bar{v}_M = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{AM}}{dt},\tag{3}$$

где  $\frac{d\overline{r}_A}{dt} = \overline{v}_A$  - скорость полюса A;

 $\frac{d\overline{AM}}{dt}$  =  $\overline{v}_{MA}$  - скорость точки M при ее вращении вокруг точки

A.

Тогда

$$\overline{\mathbf{v}}_M = \overline{\mathbf{v}}_A + \overline{\mathbf{v}}_{MA}. \tag{4}$$

При этом

$$v_{MA} = \omega \cdot MA$$
,  $v_{MA} \perp AM$ ,

где  $\omega$  - угловая скорость тела; AM - расстояние от точки до полюса.

Следовательно, **скорость любой точки тела** геометрически складывается из скорости полюса и скорости точки в ее вращении вокруг полюса.

В некоторых задачах для определения скоростей удобно воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела: проекции скоростей двух точек тела при плоском движении на ось, проходящую через эти точки, равны между собой. Действительно (рис. 4), в соответствии с (4)  $\overline{\upsilon}_B = \overline{\upsilon}_A + \overline{\upsilon}_{BA}$ , то:

$$\upsilon_{B_x} = \upsilon_{A_x} + \upsilon_{BA_x} = \upsilon_A \cdot \cos \alpha + 0 = \upsilon_B \cdot \cos \beta \tag{5}$$

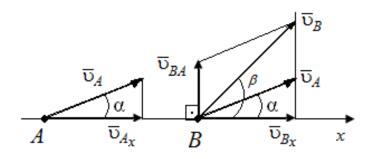


Рис. 4. Теорема о проекции скоростей двух точек тела

Наиболее просто находить скорость при помощи мгновенного центра скоростей (МЦС).

<u>МЦС</u> называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю  $\overline{\upsilon}_p$ =0. Пример его нахождения показан на рис.5: МЦС находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных к векторам скоростей в точках A и B. Тогда, если за полюс выбрать МЦС, то скорости точек будут равны:

$$\overline{\upsilon}_{A} = \overline{\upsilon}_{p} + \overline{\upsilon}_{pA} = \overline{\upsilon}_{pA};$$

$$\overline{\upsilon}_{B} = \overline{\upsilon}_{p} + \overline{\upsilon}_{pB} = \overline{\upsilon}_{pB},$$

$$\omega = \frac{\upsilon_{A}}{AP} = \frac{\upsilon_{B}}{BP}.$$
(6)

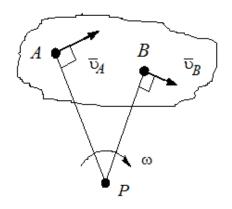


Рис.5. Пример нахождения МЦС

Для определения МЦС достаточно знать только направление скоростей двух точек тела.

Рассмотрим различные случаи определения положения МЦС (рис.6).

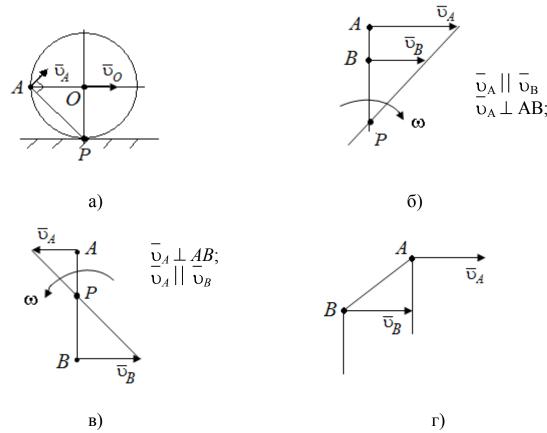


Рис.6. Частные случаи нахождения МЦС: а - качение без скольжения; б -  $\overline{\upsilon}_A \| \overline{\upsilon}_B$  и направлены в одну сторону; в -  $\overline{\upsilon}_A \| \overline{\upsilon}_B$  и направлены в противоположные стороны;  $\Gamma$  -  $\overline{\upsilon}_A \| \overline{\upsilon}_B$ ,  $\overline{\upsilon}_A = \overline{\upsilon}_B$ , МЦС находится в бесконечности.

# Определение ускорения точек при плоском движении

В соответствии с рис.3

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{r} = \overline{r}_A + \overline{AM} \\
 \overline{v}_M = \overline{v}_A + \overline{v}_{MA}
\end{array}$$

Тогда ускорение точки М

$$\bar{a}_{M} = \frac{d^{2}\bar{r}}{dt^{2}} = \frac{d^{2}\bar{r}_{A}}{dt^{2}} + \frac{d^{2}\overline{AM}}{dt^{2}};$$
(7)

где

$$\frac{d^2 \bar{r}_A}{dt^2} = \bar{a}_A; \quad \frac{d^2 \overline{AM}}{dt^2} = \bar{a}_{MA}.$$

Следовательно, можно записать

$$\overline{a}_{M} = \overline{a}_{A} + \overline{a}_{MA}; \quad \overline{a}_{MA} = \overline{a}_{MA}^{\tau} + \overline{a}_{MA}^{n}; 
a_{MA}^{\tau} = \varepsilon \cdot MA; \quad a_{MA}^{n} = \omega^{2} \cdot MA$$
(8)

**Ускорение любой точки M тела** - это геометрическая сумма ускорения полюса и ускорения точки M во вращательном движении вокруг полюса.

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

- 1. Какое движение твердого тела называется плоским? Какими уравнениями оно описывается?
  - 2. Как находится скорость любой точки плоской фигуры?
  - 3. Что такое мгновенный центр скоростей (МЦС)?
  - 4. Частные случаи нахождения МЦС.
  - 5. Как находится ускорение любой точки плоской фигуры?

## РИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Проиллюстрируем методику решения задач на следующих примерах.

# Пример 1.

Ось колеса O радиуса R движется со скоростью  $\upsilon_O$ . Определить скорости точек колеса A и B (рис. 7).

Pешение. Мгновенный центр скоростей P колеса находится в точке касания его с горизонтальной поверхностью. Поэтому угловая скорость колеса:

$$\omega = \frac{\upsilon_O}{OP} = \frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{\upsilon_B}{BP}$$
.

Скорость верхней точки колеса A:

$$v_A = \omega \cdot 2R = 2v_O$$
,

скорость точки B:

$$v_B = \omega \cdot BP = \omega R\sqrt{2} = \sqrt{2} v_O$$
.

где расстояние BP определено из прямоугольного  $\Delta ABP$  по теореме Пифагора:  $BP = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$  .

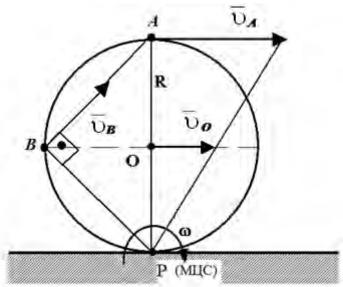


Рис.7.

Заметим, что в каждый момент плоское движение колеса можно рассматривать как только вращение вокруг точки касания либо как сумму вращательного движения вокруг полюса (МЦС) и поступательного вместе с полюсом. Скорость точки *В* можно найти также, используя теорему о проекциях скоростей:

$$\upsilon_B \cdot \cos 45^0 = \upsilon_O$$
,  $\upsilon_B = \frac{\upsilon_O}{\cos 45^0} = \upsilon_O \sqrt{2}$ .

## Пример 2.

Определить угловую скорость и угловое ускорение звена AB, линейные скорости и линейные ускорения точек B и C, если  $\omega_1$ =3 рад/с;  $\epsilon_1$ =4 рад/с<sup>2</sup>; OB=40 см; BC=12 см; R=20 см (рис.8).

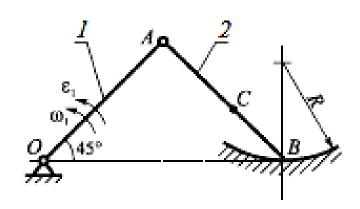


Рис.8.

#### Решение:

1. Выполняем необходимые построения для изображения векторов скоростей (рис. 9).

Шатун AB совершает плоское движение, причем скорость точки A шатуна равна:

$$v_A = \omega_1 \cdot OA = 3.28,28 = 84,84 \text{ cm/c},$$

где расстояние OA найдем из прямоугольного треугольника OAB по теореме Пифагора  $OA^2 + AB^2 = OB^2$ . Так как OA = AB, то

$$OA = \sqrt{\frac{40^2}{2}} = \sqrt{800} = 28,28 \,\text{cm}.$$

Так как точка A принадлежит также кривошипу OA, вращающемуся вокруг неподвижной оси O, то вектор скорости  $\bar{\upsilon}_A \bot OA$  и направлен в сторону угловой скорости  $\omega_1$ .

Скорость точки B шатуна неизвестна, но вектор ее скорости  $\bar{\upsilon}_B$  направлен по касательной к криволинейной траектории, радиуса R:  $\bar{\upsilon}_B \bot R$ .

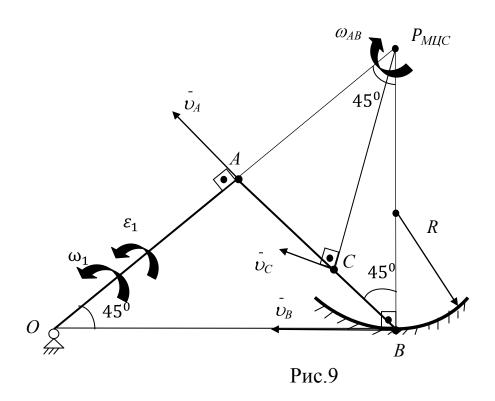
На пересечении перпендикуляров к скоростям  $\upsilon_A$  и  $\upsilon_B$  находим мгновенный центр скоростей P шатуна AB. В данный момент мысленно можно рассматривать треугольник PAB как плоскую фигуру, вращающуюся вокруг P с угловой скоростью  $\omega_{AB}$ :

$$\omega_{AB} = \frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{\omega_1 \cdot OA}{AP} = \omega_1 = 3$$
 рад/с.

Нетрудно показать, что  $\Delta OAB \sim \Delta PAB$ , поэтому OA=AP; PB=OB.

Линейная скорость точки B:

$$v_B = \omega_{AB} \cdot PB = 3.40 = 120 \text{ cm/c}.$$



Чтобы определить направление вектора скорости точки C, проводим отрезок, соединяющий эту точку с МЦС. Соответствующий вектор скоростей направляется перпендикулярно этому отрезку в сторону поворота тела по отношению к точке P.

Линейная скорость точки C:

$$v_C = \omega_{AB} \cdot PC = 3.32,64 = 97,9 \text{ cm/c}$$

где длина PC определена по теореме косинусов из  $\Delta PCB$ :

$$PC^2 = BC^2 + BP^2 - 2BC \cdot BP \cdot \cos 45^0 = 1065,18 \text{ cm}.$$
  
 $PC = \sqrt{1065.18} = 32.64 \text{ cm}.$ 

2. Определяем угловое ускорение шатуна AB и линейные ускорения точек B и C (рис.10).

При расчете ускорений в качестве полюса следует взять точку A, для которой известна траектория. Из схемы механизма видно, что точка A движется по окружности, радиуса OA.

Ускорение точки B:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau, \tag{9}$$

Значения составляющих ускорения  $\bar{a}_A^n$ ,  $\bar{a}_A^\tau$ ,  $\bar{a}_{BA}^n$ ,  $\bar{a}_{BA}^\tau$  находим по формулам:

$$a_A^n = \omega_1^2 \cdot OA = 254.52 \frac{\text{cM}}{\text{c}^2}.$$

$$a_A^{\tau} = \varepsilon_1 \cdot OA = 113.12 \frac{cM}{c^2}.$$

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 254.52 \frac{cM}{c^2}.$$

$$a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_{AB} \cdot AB. \tag{10}$$

Вектор  $\bar{a}_A^{\tau}$  направляется перпендикулярно отрезку OA в сторону углового ускорения кривошипа OA, вектор  $\bar{a}_A^n$  – от точки A к точке O, вектор  $\bar{a}_{BA}^n$  – от точки B к точке A, как показано на рисунке 10.

Вектор  $\bar{a}_{BA}^{\tau}$  направлен перпендикулярно отрезку AB в сторону углового ускорения  $\varepsilon_{AB}$ . Так как направление углового ускорения  $\varepsilon_{AB}$  неизвестно, выбираем самостоятельно направление вектора  $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ , так, что  $\bar{a}_{BA}^{\tau} \bot \bar{a}_{BA}^{n}$ .

Так как точка B движется по криволинейной траектории, радиуса R, то полное ускорение точки B определим по формуле:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau \,. \tag{11}$$

Значения составляющих ускорения  $\bar{a}^n_B$  и  $\bar{a}^\tau_B$  находим по формулам:

$$a_B^n = \frac{\upsilon_B^2}{R_{AB}} = 720 \frac{cM}{c^2}.$$

Вектор  $\bar{a}_B^n$  направлен к центру криволинейной траектории, радиуса R, а вектор  $\bar{a}_B^{\tau}$  – перпендикулярен вектору  $\bar{a}_B^n$  .

Поскольку движение кривошипа OA ускоренное (направления  $\omega_1$  и  $\varepsilon_1$  совпадают), то вращение шатуна AB также ускоренное. Для нахождения углового ускорения  $\varepsilon_{AB}$  спроецируем векторное равенство (9) с учетом (11) на оси декартовой системы координат, получаем:

$$Ox: -a_B^{\tau} = (-a_A^n - a_A^{\tau} - a_{BA}^n + a_{BA}^{\tau}) \cdot \cos 45$$
 (12)

Oy: 
$$a_B^n = (-a_A^n + a_A^\tau + a_{BA}^n + a_{BA}^\tau) \cdot \sin 45$$
 (13)

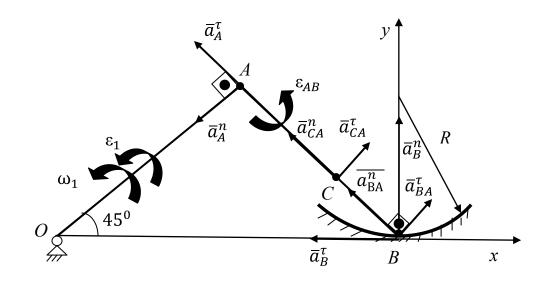


Рис.10

Из уравнения (13) определяем  $a_{BA}^{\tau} = 141.4 \frac{\text{см}}{\text{c}^2}$ . Из уравнения (10) определяем  $\varepsilon_{AB}$ :

$$\varepsilon_{AB} = \frac{|a_{BA}^{\tau}|}{AB} = 5 \frac{\text{рад}}{c^2}.$$

Из уравнения (12) определяем  $a_B^{\tau}$ :

$$a_B^{\tau} = 340 \frac{\text{CM}}{\text{c}^2}$$
.

Таким образом:

$$a_B = \sqrt{(a_{BO}^n)^2 + (a_{BO}^\tau)^2} = 384.7 \frac{\text{cm}}{\text{c}^2}.$$

Расчет ускорения точки C выполняем по аналогичному с точкой B алгоритму. В качестве полюса используем, по-прежнему, точку A. Тогда:

$$\overline{a_C} = \overline{a_A^n} + \overline{a_A^\tau} + \overline{a_{CA}^n} + \overline{a_{CA}^\tau}.$$

$$a_{CA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 146.5 \frac{\text{CM}}{c^2}.$$

$$a_{CA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 81.4 \frac{\text{CM}}{c^2},$$
(14)

где AC=AB-CB=28,28-12=16,28 см.

Векторы  $\bar{a}_{CA}^n$  и  $\bar{a}_{CA}^{ au}$  направляем по тому же правилу, как и векторы  $\bar{a}_{BA}^n$  и  $\bar{a}_{BA}^{ au}$ .

Проецируем выражение (14) на оси координат, получаем:

$$Ox: \ a_{Cx} = (-a_A^n - a_A^\tau - a_{CA}^n + a_{CA}^\tau) \cdot \cos 45 = -306 \frac{\text{cm}}{\text{c}^2}.$$

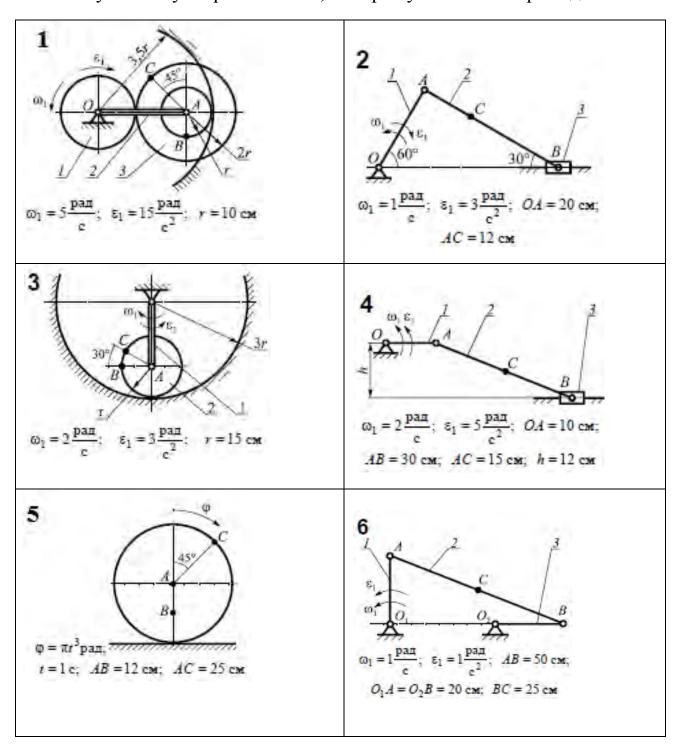
Oy: 
$$a_{Cy} = (-a_A^n + a_A^{\tau} + a_{CA}^n + a_{CA}^{\tau}) \cdot \sin 45 = 67.2 \frac{\text{cm}}{\text{c}^2}$$
.

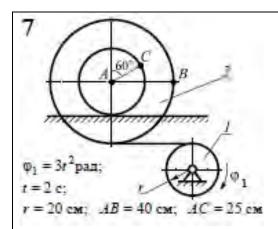
Таким образом:

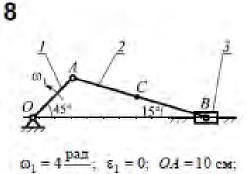
$$a_C = \sqrt{(a_{Cx})^2 + (a_{Cy})^2} = 312 \frac{\text{CM}}{\text{c}^2}.$$

## ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

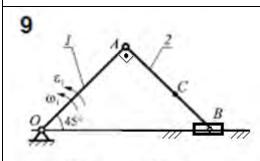
Для изображенного на рисунке положения плоского механизма определить линейные скорости и ускорения точек B и C, а также угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат.



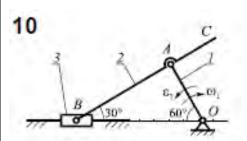




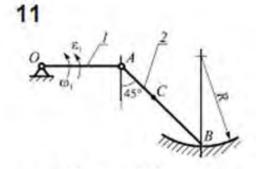
$$\omega_1 = 4 \frac{\text{pan}}{c}; \ \varepsilon_1 = 0; \ \textit{OA} = 10 \text{ cm}; \ \textit{AC} = \textit{BC}$$



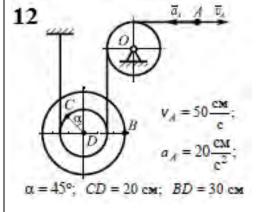
$$\omega_1 = 3 \frac{\text{pan}}{\text{c}}; \ \epsilon_1 = 4 \frac{\text{pan}}{\text{c}^2}; \ OA = 20 \text{ cm}; \ BC = 8 \text{ cm};$$

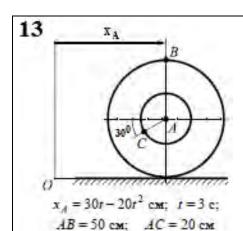


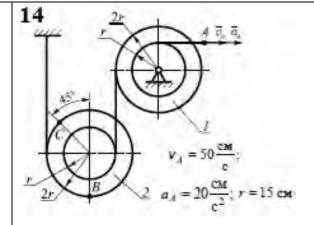
$$\omega_1 = 1 \frac{\text{pag}}{\text{c}}; \ \epsilon_1 = 4 \frac{\text{pag}}{\text{c}^2}; \ AB = 30 \text{ cm}; \ BC = 45 \text{ cm}$$

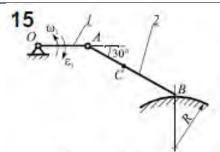


$$\omega_1 = 2 \frac{\text{pag}}{\text{c}}; \ \epsilon_1 = 2 \frac{\text{pag}}{\text{c}^2}; \ \textit{OA} = 25 \text{ cm}; \ \textit{AB} = 35 \text{ cm}; \ \textit{BC} = 20 \text{ cm}; \ \textit{R} = 30 \text{ cm}$$

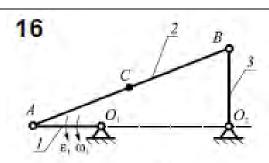




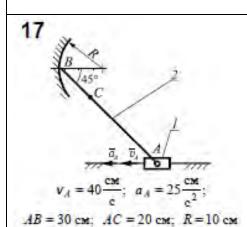


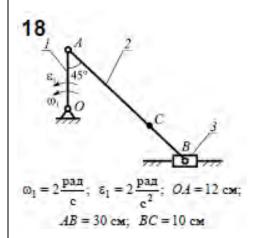


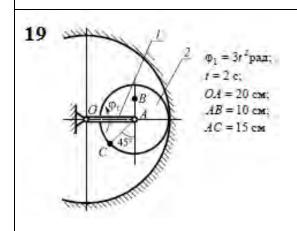
$$\omega_1 = 3 \frac{\text{pag}}{\text{c}}; \ \epsilon_1 = 6 \frac{\text{pag}}{\text{c}^2}; \ \textit{OA} = 15 \text{ cm}; \\ \textit{AB} = 25 \text{ cm}; \ \textit{BC} = 15 \text{ cm}; \ \textit{R} = 20 \text{ cm}$$

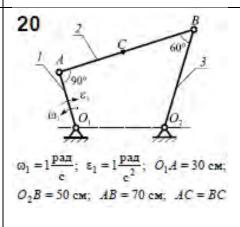


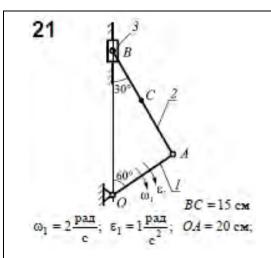
$$\omega_1 = 3 \frac{\text{pag}}{c}; \ \epsilon_1 = 7 \frac{\text{pag}}{c^2}; \ O_1 A = 15 \text{ cm}; \ O_2 B = 20 \text{ cm}; \ O_2 A = 40 \text{ cm}; \ AC = BC$$

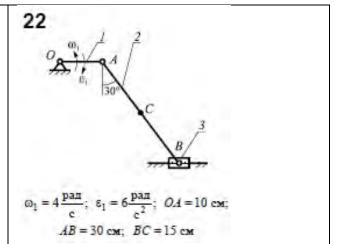


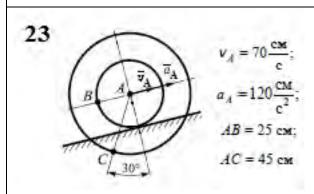


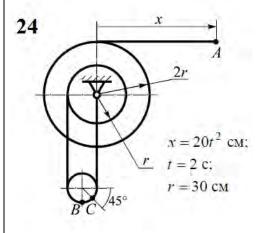


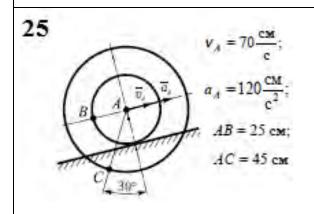


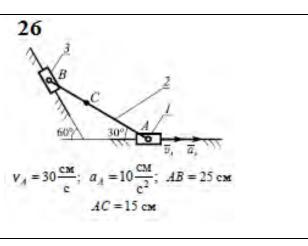


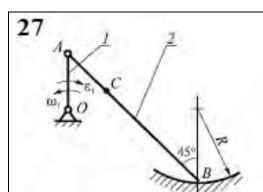




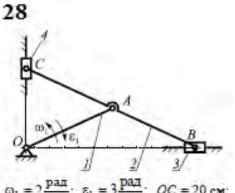






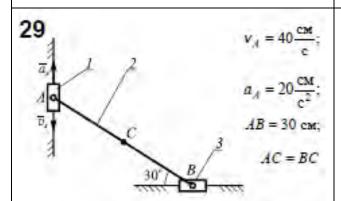


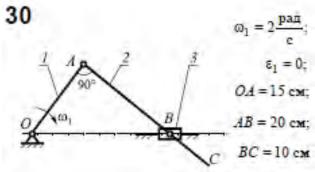
$$\omega_1 = 2 \frac{\text{pag}}{\text{c}}; \ \epsilon_1 = 5 \frac{\text{pag}}{\text{c}^2}; \ AB = 35 \text{ cm};$$
  $OA = AC = 10 \text{ cm}; \ R = 20 \text{ cm}$ 

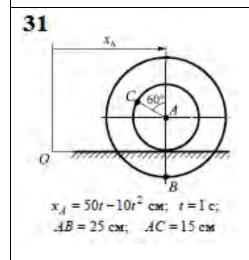


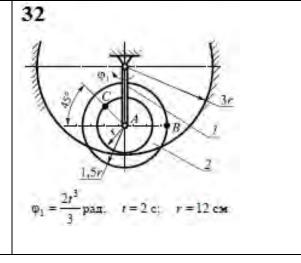
$$\omega_1 = 2 \frac{\text{pag}}{\text{c}}; \ \epsilon_1 = 3 \frac{\text{pag}}{\text{c}^2}; \ OC = 20 \text{ cm};$$

$$OA = AB = AC = 25 \text{ cm}$$









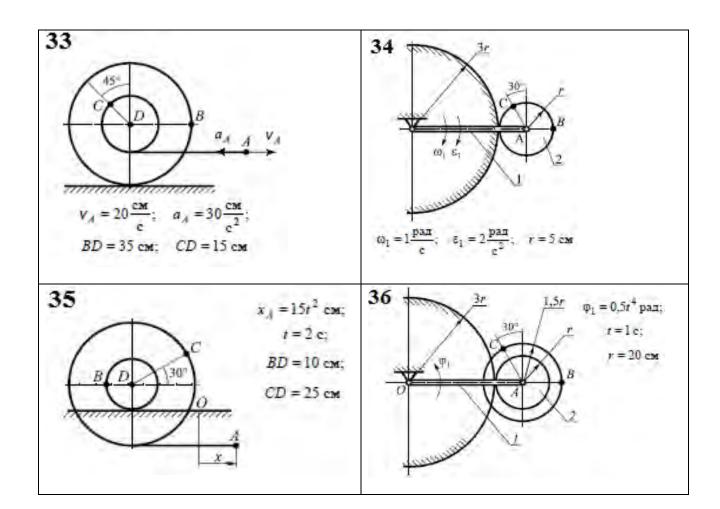


Рис.11

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики [Текст]: учебник для вузов/ Яблонский А.А., Никифорова В.А. Т.1,2 –М.: Высшая школа, 1982
- 2. Диевский, В.А. Теоретическая механика: Учебное пособие. [Текст]/ Диевский В.А. СПб.: Издательство "Лань", 2005. -320 с.
- 3. Добронравов, В.В. Курс теоретической механики [Текст]: учебник для вузов/ Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л. М.: Высшая школа, 1985. 493с.
- 4. Курс теоретической механики [Текст]: учебник для вузов/ Дронг В.И., Дубинин В.В., Ильин М.М. и др. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 736с.
- 5. Лекции по теоретической механике [Текст]/ Яцун С.Ф., Мищенко В.Я., Локтионова О.Г., Сафаров Д.И. Баку:Унсиййэт, 2000. 109с.
- 6. Сборник коротких задач по теоретической механике [Текст]: учебное пособие для ВТУЗов / под ред. О.Э. Кепе М.: Высшая школа, 1989. 368с.
- 7. Яцун, С.Ф. Кинематика, динамика и прочность машин, приборов и аппаратуры : учебное пособие [Текст]: С.Ф. Яцун, В.Я. Мищенко, Е.Н.Политов М : Альфа-М : ИНФРА-М, 2012.-208с.