МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_________ О.Г. Локтионова
«17» 03 ______ 2021 г.

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИТЕРИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Методические указания для студентов направлений
подготовки 09.03.01 и 09.04.01

Курск 2021

УДК 534.1
Составитель Ж.Т. Жусубалиев

Рецензент
Доктор технических наук, профессор *С.А. Филист*

Введение в теорию итерируемых отображений: методические указания для студентов направлений подготовки 09.03.01 и 09.04.01 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Ж.Т. Жусубалиев. – Курск, 2021. – 18 с.: ил.7. – Библиогр.: с. 18.

Приводится элементарное введение в теорию итерируемых отображений. Предназначены для студентов направлений подготовки 09.03.01, 09.04.01 очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . .2021. Формат **60 × 84 1/16**.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 50 экз. Заказ . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. Цель работы

На самом элементарном уровне изучить такие базовие понятия, как дифференциальное уравнение, множества и отображения.

2. Описание поведения технических объектов с помощью дифференциальных уравнений и итерируемых отображений

Начнем с элементарной задачи из электротехники – изучение заряда конденсатора.

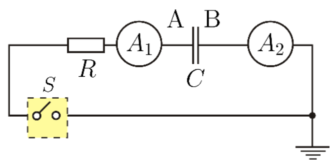


Рис. 1. E – э.д.с. источника энергии; R –сопротивление резистора; C – емкость конденсатора; S – ключ (switch)

- Как изменяется напряжение на конденсаторе $U_c(t)$ (или ток через конденсатор $i(t)$) во времени при замыкании ключа S, если перед замыканием S конденсатор был заряжен до напряжения U_{c0} или разряжен до нуля, т.е. $U_{c0} = 0.0$ В?

- Обозначим через t_0 момент замыкания ключа. Величина t_0 называется *начальным значением преременной t (времени)*. Грубо говоря, t_0 – начальный момент времени с которого мы начинаем следить за электромагнитным процессом в цепи. По условию задачи в момент времени $t = t_0$ конденсатор был заряжен до напряжения $U_{c0} = \text{const}$. Тогда можем записать $U_c(t_0) = U_{c0}$. Это равенство называется *начальным условием.*

- Из школьного курса физики известно, что ток i, протекающий через конденсатор при его заряде, прямо пропорционален скорости изменения заряда q или напряжения:
$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU_c}{dt}.$$
Можно ли говорить о токе, идущем через емкость? В конденсаторе две пластины разделены изолятором (например, воздухом), так что в действительности электрон не может пройти через емкость, т.е. попасть из A в B.

Однако если на пластину A попадает положительный заряд, то пластина B заряжается отрицательно, так что с пластины B по проводу уходит положительный заряд (ток также идет слева направо). Два амперметра A_1 и A_2, один из которых измеряет силу тока в проводе, присоединенном к пластине A, другой — в проводе, присоединенном к пластине B, дают одинаковые показания. Что именно, положительные заряды или электроны, проходят в различных частях электрической цепи, нас не интересует, также как не интересует, пройдут ли через A_2 те же самые электроны, которые ранее прошли через A_1, или другие.

Поэтому везде в дальнейшем будем говорить просто о токе, идущем через конденсатор, имея при этом в виду ток, проходящий по проводам, присоединенным к пластинам конденсатора. В электрической цепи о токе, идущем через конденсатор, можно говорить так же, как о токе через сопротивление или индуктивность. Отличие заключается в другом виде связи между током и разностью потенциалов.

- Составим для цепи на рис. 1 уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$Ri + U_c = E_0.$$

Здесь U_c – напряжение на конденсаторе; E_0 – э.д.с. источника.

- Так как $i = C\dfrac{dU_c}{dt}$, то

$$RC\frac{dU_c}{dt} + U_c = E_0. \tag{1}$$

- Разрешим уравнение (1) производной $\dfrac{dU_c}{dt}$, получим:

$$\frac{dU_c}{dt} = -\frac{1}{RC} \cdot U_c + \frac{E_0}{RC}. \tag{2}$$

- Дополним уравнение (2) начальным условием:

$$\frac{dU_c}{dt} = -\frac{1}{RC} \cdot U_c + \frac{E_0}{RC}, \quad U_c(t_0) = U_{c0}. \tag{3}$$

- Обозначим $x = U_c$, $\lambda = -\dfrac{1}{RC}$, $\gamma = \dfrac{E_0}{RC}$. Тогда

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \cdot x + \gamma, \quad x(t_0) = x_0, \quad x_0 = U_{c0}. \tag{4}$$

3. Что такое дифференциальное уравнение?

- Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0, \quad \text{например,} \quad \frac{dx(t)}{dt} - ax(t) + b \quad \text{или} \quad \frac{dx(t)}{dt} - ax(t) = 0.$$

  Здесь t – независимая переменная (в нашем случае время); $x(t)$ — неизвестная функция; $\frac{dx}{dt}$ – производная функции $x(t)$; $a = \mathrm{const}$ – действительное число (параметр).

- **Определение 1** Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0, \tag{5}$$

  связывающее между собой три переменные: независимую переменную t, искомую функцию x и первую производную этой функции dx/dt.

- Дифференциальное уравнение (5) равносильно уравнению вида

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{g}(t, x),$$

  которое называется дифференциальным уравнением, разрешенным относительно первой производной

- Что такое решение дифференциального уравнения? Пусть дано дифференциальное уравнение, разрешенное относительно первой производной:

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{g}(t, x).$$

  – Его решением является такая функция $x = \varphi(t)$, которая после подстановки в уравнение $\dfrac{dx}{dt} = \mathrm{g}(t, x)$ вместе с ёё производной $\dfrac{d\varphi(t)}{dt}$ обращает его в тождество

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} \equiv \mathrm{g}(t, \varphi(t)).$$

  – Пример. Пусть дано дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x.$$

– Его решением является функция:

$$x = \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Легко проверить:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{e}^{\lambda t}\right) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}, \quad \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} \equiv \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

– Решением уравнения $\dfrac{dx}{dt} = \lambda x$ является также функция

$$x = c\mathrm{e}^{\lambda t},$$

где c —произвольная константа:

$$\frac{d}{dt}\left(c\mathrm{e}^{\lambda t}\right) = \lambda c\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad c\lambda \mathrm{e}^{\lambda t} \equiv c\lambda \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Придавая произвольной константе c разные значения, получим бесконечное число решений.

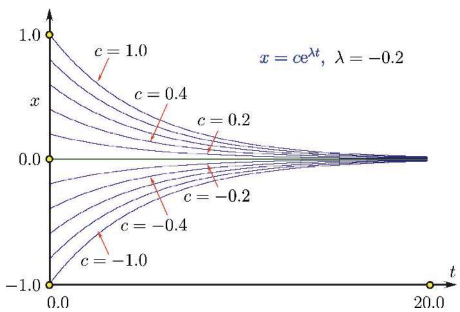


Рис. 2.

- Поле направлений.

  Поскольку первой производной dx/dt определяет направление касательной к кривой $x(t) = \varphi(t)$, то можно сказать, что правая часть $\mathrm{g}(t, x)$ уравнения определяет в каждой точке области, где задана функция $\mathrm{G}(t, x)$, некоторые направления.

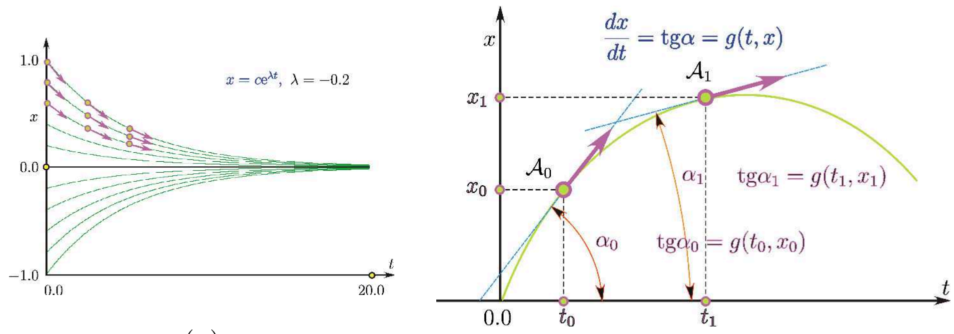
  Таким образов в этой области определяется поле направлений:

- Задача Коши

  –

  $$\frac{dx}{dt} = \mathrm{g}(t, x).$$

  Решение $x = \varphi(t)$, удовлетворяющее условию $\varphi(t_0) = x_0$ – задача Коши.



(а) (б)

Рис. 3.

– Числа t_0, x_0 называются начальными значениями, а условие $\varphi(t_0) = x_0$ – начальным условием.

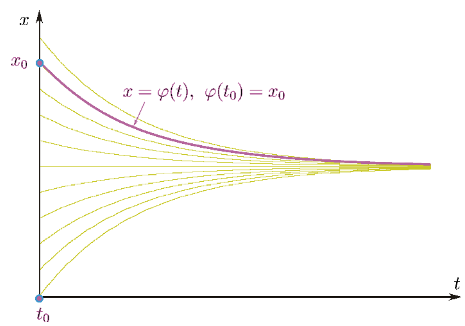


Рис. 4.

4. Решение задачи Коши

•

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \cdot x + \gamma, \quad x(t_0) = x_0, \quad x_0 = U_{c0}. \tag{6}$$

Здесь $x = U_c$, $\lambda = -\dfrac{1}{RC}$ и $\gamma = \dfrac{E_0}{RC}$.

• Сделаем замену

$$y = x + \frac{\gamma}{\lambda}. \tag{7}$$

Подставив (7) и разрешив относительно производной, получим

$$\frac{dy}{dt} = \lambda \cdot y, \quad y(t_0) = x_0 + \frac{\gamma}{\lambda}. \tag{8}$$

- Такие уравнения мы умеем решать:

$$y(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)} \cdot y(t_0). \tag{9}$$

Отсюда с учетом (7) искомое решение:

$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)} \cdot \left(x_0 + \frac{\gamma}{\lambda}\right) - \frac{\gamma}{\lambda}. \tag{10}$$

Или

$$U_c(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)} \cdot (U_{c0} - E_0) + E_0. \tag{11}$$

- Построим графики $U_c(t)$ и $i(t)$, учитывая, что $i(t) = C\dfrac{dUc(t)}{dt}$:

$$i(t) = -\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)} \cdot (U_{c0} - E_0)/R, \quad i(t) = \frac{E_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)} - \frac{U_{c0}}{R}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}.$$

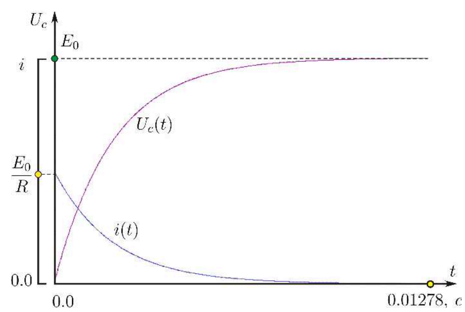


Рис. 5. $R = 2.0$ Ом; $C = 10^{-3}$ Ф; $E_0 = 5.0$ В.

- Теперь изучим заряд конденсатора с помощью другой техники. Будем измерять напряжение конденсатора через равные промежутки времени. Тогда напряжение конденсатора

$$x_{k+1} = \mathrm{e}^{\lambda h} \cdot \left(x_k + \frac{\gamma}{\lambda}\right) - \frac{\gamma}{\lambda}, \tag{12}$$

$$h = t_{k+1} - t_k = \mathrm{const}, \quad x_k = x(t_k), \quad t_k = k\cdot, \quad k = 0, 1, 2, 3...$$

- Таким образом, задача решения дифференциального уравнения сводится к итерации разностного уравнения (отображения)

$$x_{k+1} = F(x_k),$$

$$F(x) = c \cdot x + \sigma, \quad c = \mathrm{e}^{\lambda h}, \quad 0.0 < \mathrm{e}^{\lambda h} < 1.0, \quad \sigma = \frac{\gamma}{\lambda}\left(1 - \mathrm{e}^{\lambda h}\right).$$

На рис. 6 приведена результаты анализа заряда конденсатора с помощью графического итерирования отображения. Рассмотрим этот подход более подробно.

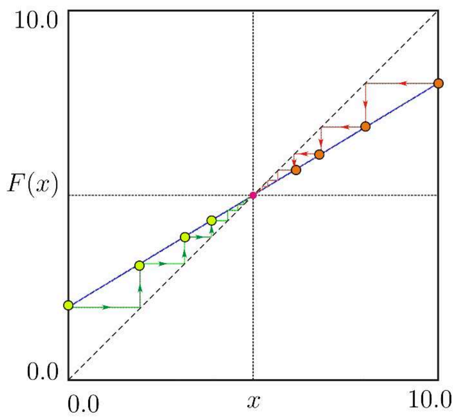


Рис. 6. $R = 2.0$ Ом; $C = 10^{-3}$ Ф; $E_0 = 5.0$ В.

5. Множество и отображение: термины, определения и обозначения

В математике встречаются самые разнообразные множества. Можно говорить о множестве граней многогранника, точек на прямой, множестве натуральных чисел и т. д. Понятие множества настолько общее, что трудно дать ему какое-либо определение, которое не сводилось бы просто к замене слова «множество» его синонимами. Роль, которую понятие множества играет в современной математике, определяется не только тем, что сама теория множеств стала в настоящее время весьма обширной и содержательной дисциплиной, но главным образом тем влиянием, которое теория множеств, возникшая в конце прошлого столетия, оказывала и оказывает на всю математику в целом. Мы здесь приведем лишь первоначальные понятия, используемые в основной части материала.

- Знак импликации $\Rightarrow$ в записи $A \Rightarrow B$ имеет простую смысловую нагрузку, что «A» влечёт «B» или «из A следует B», в то время как «$A \Leftrightarrow B$» означает эквивалентность высказываний A и B, т.е. « A тогда и только тогда, когда B».

- Квантор всеобщности $\forall$ служит заменой выражения «для любого».

- 1. Множества. Под множеством, понимают любую совокупность объектов, называемых элементами множества.

  Множества с конечным числом различных элементов могут быть описаны путём явного перечисления всех их элементов. Обычно эти элементы заключаются в фигурные скобки. Например, $\{1, 2, 4, 8\}$ — множество степеней двойки, заключённых между 1 и 10.

- 2. Как правило, множество обозначается прописной (большой) буквой какого-либо алфавита, а его элементы – строчными (малыми) буквами того же или другого алфавита.

- 3. Для некоторых особо важных множеств приняты стандартные обозначения, которых стоит придерживаться.

  - Буквой $\mathbb{N}$ обозначают множество положительных целых чисел (натуральные числа).
  - $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел.
  - $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел.
  - $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел.

- При заданном множестве A обозначение

  $$a \in A$$

  указывает на то, что a есть элемент множества A. В противном случае пишут

  $$a \notin A$$

- Говорят, что A есть подмножество множества B и записывают

  $$A \subset B$$

  («A содержится в B»), когда имеет место импликация

  $$\forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in B.$$

- Два множества A и B совпадают (или равны), если у них одни и те же элементы. Символически это записывается так:

  $$A = B \Leftrightarrow A \subset B,\ B \subset A$$

  ($\Leftrightarrow$ – «тогда и только тогда, когда» или «влечёт в обе стороны»).

- 2. Иногда мы не знаем заранее, содержит ли некое множество (например, множество корней данного уравнения) хотя бы один элемент. Поэтому вводят понятие пустого множества, т. е. множества, не содержащего ни одного элемента. Его обозначают символом $\varnothing$. Итак, пустое множество $\varnothing$, совсем не содержащее элементов, по определению входит в число подмножеств любого множества.

  Пример: Если $A \subset B$, но $A \neq \varnothing$ и $A \neq B$, то A есть собственное подмножество в B.

- Для выделения подмножества $A \subset B$ часто используют какое-либо свойство, присущее только элементам из A.

  Примеры:

  – $\{n \in \mathbb{Z} | n = 2m \quad \text{для} \quad \text{некоторого} \quad m \in \mathbb{Z}\}$ – это есть множество всех чётных целых чисел.

  – $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} | n > 0\}$ – множество натуральных чисел.

- Под суммой или объединением двух множеств A и B понимают множество

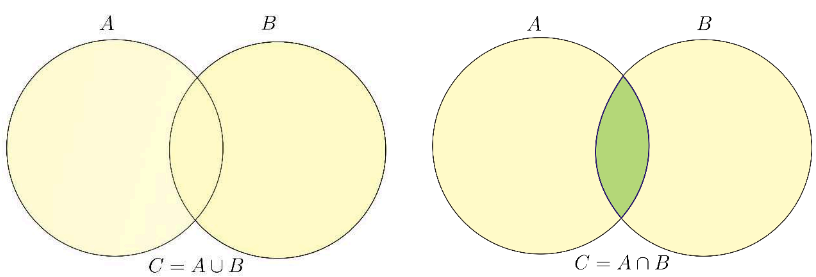
  $$C = A \cup B = \{|x \in A, \quad \text{или} \quad x \in B\},$$

  состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из миожеств A и B.

- Под пересечением двух множеств A и B понимают множество

  $$C = A \cap B = \{|x \in A, \quad x \in B\},$$

  состоящее из всех элементов, принадлежащих как A, так и B.



(а) (б)

Рис. 7.

- Пересечение $A \cap B$ может быть пустым множеством:

  $$A \cap B = \varnothing.$$

  Тогда говорят, что A и B есть непересекающиеся множества.

- Операции пересечения и объединения удовлетворяют тождествам

  $$C \cap (A \cap B) = (C \cap A) \cup (C \cap B),$$

  и

  $$C \cup (A \cup B) = (C \cup A) \cap (C \cup B),$$

  проверку которых мы оставляем в качестве упражнения.

- Разностью $A \setminus B$ множеств A и B называется совокупность тех элементов из A, которые не содержатся в B. При этом, вообще говоря, не предполагается, что $B \subset A$. Вместо $A \setminus B$ пишут также $A - B$. Если B – подмножество в A, то запись $A \setminus B$ обозначает ещё дополнение к B в A. Положив $C = A \setminus B$, будем иметь $C \cap B = \varnothing$, $C \cup B = A$. Обратите м внимание на соответствие между операциями пересечения, объединения, дополнения и логическими связками «и», «или», «нет»

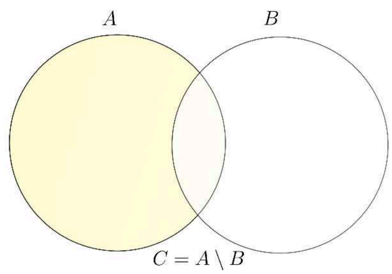


Рис. 8.

- Пусть далее X, Y – произвольные множества. Пару элементов (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, взятых в данном порядке, будем называть упорядоченной парой, считая при этом, что $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.
  - Декартовым произведением двух множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар (x, y):

    $$X \times Y = \{(x, y)|x \in X,\ y \in Y\}.$$

  - Пусть, например, $\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел. Тогда декартов квадрат $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ есть просто множество всех декартовых координат точек на плоскости относительно заданных координатных осей.
  - Аналогичным образом можно было бы ввести декартово произведение $X_1 \times X_2 \times X_3$ трёх множеств, четырёх и т.д.
    При $X_1 = X_2 = ... = X_n$, пишут сокращённо

    $$X^n = X \times ....X \times X$$

    и говорят о n-й декартовой степени множества X. Элементами X_n являются последовательности (или строки) $(x_1, x_2, ..., x_n)$ длины n.

6. Отображение

- Понятие отображения или функции играет центральную роль. При заданных множествах X и Y отображение f с областью определения X и областью значений Y сопоставляет каждому элементу $x \in X$ элемент $f(x) \in Y$. В случае $Y = X$ говорят ещё о преобразовании f множества X в себя. Символически отображение записывается в виде

$$f : X \to Y.$$

- В анализе понятие функции вводится следующим образом. Пусть X – некоторое множество на числовой прямой. Говорят, что на этом множестве определена функция f, если каждому числу $x \in X$ поставлено в соответствие определенное число $y = f(x)$. При этом X называется областью определения данной функции, а Y – совокупность всех значений, принимаемых этой функцией, – ее областью значений.

- Образом при отображении f называется множество всех элементов вида $f(x)$:

$$\mathrm{Im} = \{f(x)|x \in X\} = f(X) \subset Y$$

(Im – от *image* (англ.)).

- Множество

$$f^{-1}(y) = \{x \in X|f(x) = y\}$$

называется прообразом элемента $y \in Y$. Для $Y_0 \subset Y$ положим

$$f^{-1}(Y_0) = \{x \in X|f(x) \subset Y_0\} = \bigcup_{y \in Y_0} f^{-1}(y)$$

Если $y \in Y \setminus \mathrm{Im} f$, то, очевидно, $f^{-1}(y) = \varnothing$.

- Равенство $f = \mathrm{g}$ двух отображений означает по определению, что их соответствующие области совпадают:

$$f : X \to Y \quad \mathrm{g} : Y \to X,$$

причём $\forall x \in X \;\; f(x) = \mathrm{g}(x)$.

- Сопоставление «аргументу» x, т.е. элементу $x \in X$, значения $f(x) \in Y$ принято обозначать при помощи ограниченной стрелки:

$$x \mapsto f(x).$$

Будем использовать обычные математические обозначения: $\mathbb{R}$ — вещественная прямая (множество вещественных чисел); $\mathbb{N}$ — множество неотрицательных целых чисел (включая нуль); запись $F : x \mapsto F(x)$ означает, что образом x после применения функции F будет $F(x)$.

Рассмотрим отображение $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вида

$$x \mapsto F(x), \tag{13}$$

где $F(x)$ — гладкая или кусочно-гладкая непрерывныя функция. Часто отображение (13) записывают в виде разностного уравнения

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{14}$$

где $k \in \mathbb{N}$ — дискретное время.

- (а) *Орбитой* дискретной системы (14) называется конечная или бесконечная последовательность точек

$$\begin{gathered} x_0, \quad x_1 = F(x_0), \quad x_2 = F(x_1) = F^2(x_0), ..., \quad x_k = F^k(x_0), \\ F^k(x_0) = \underbrace{F(F(\dots F(x_0)\dots))}_{k \text{ раз}}, \quad k \to \infty, \end{gathered} \tag{15}$$

  где x_0 — начальная точка.

- (б) Часто последовательность чисел $\{x\}$ называют *итерациями* начальной точки x_0. Как мы видим из (17), результат одной итерации является начальным значением для следующей, как показано на рис. 9.

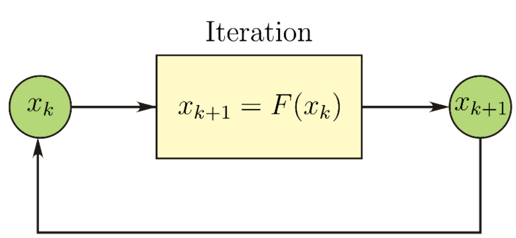


Рис. 9. Итерация отображения

- (в) В случае одномерных отображений удобно итерировать уравнение (14) (рассчитывать орбиту) графически.

  Проиллюстрируем на примере логистического отображения

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \lambda x(1-x).$$

  Здесь λ – параметр.

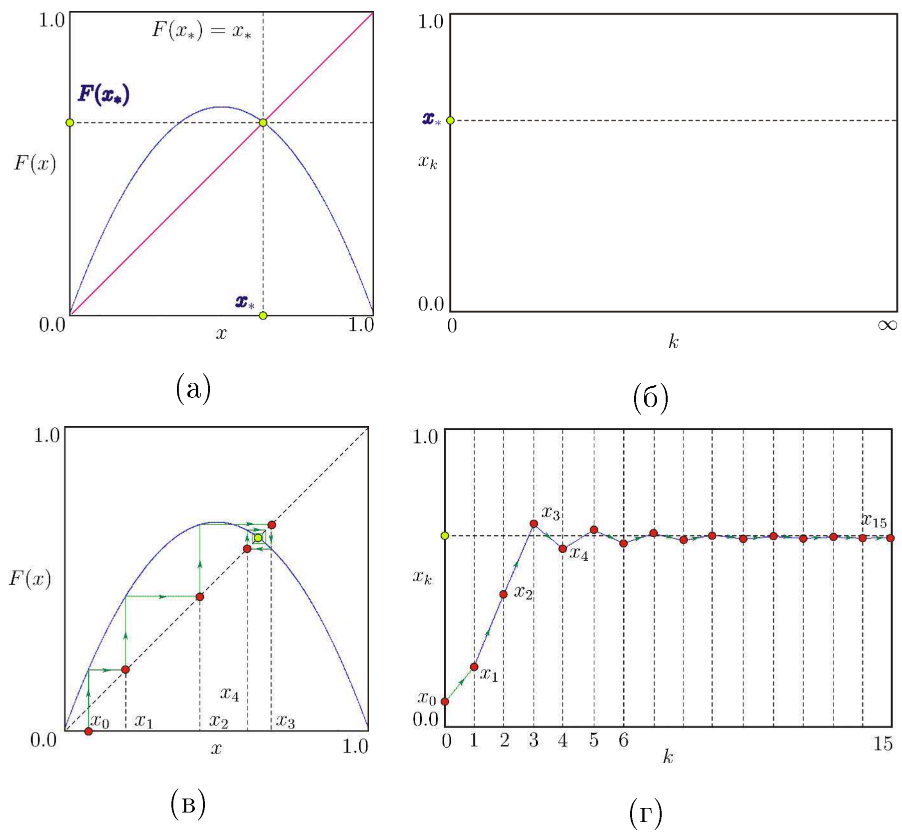


Рис. 10. Процедура графического итерирования отображения. (а) График функции $F(x)$. (б) Плоскость (k, x_k) для временной диаграммы. (в) «Cobweb» диаграмма. (г) Временная диаграмма

  – Построим график функции $F(x)$ для заданного значения параметра λ и прямую $y = x$ (биссектрису) (рис. 10(а)).

  – Выполним одну итерацию из выбранной начальной точки x_0

$$x_1 = F(x_0)$$

  и проведем вертикаль из точки с абсциссой x_0 до пересечения с кривой $F(x)$. Точка пересечения вертикали с кривой $F(x)$ имеет координаты $(x_0, F(x_0))$ (рис. 10(в)). Это означает, что ордината графика функции $F(x)$ дасть значение x_1. Графически можно было измерить

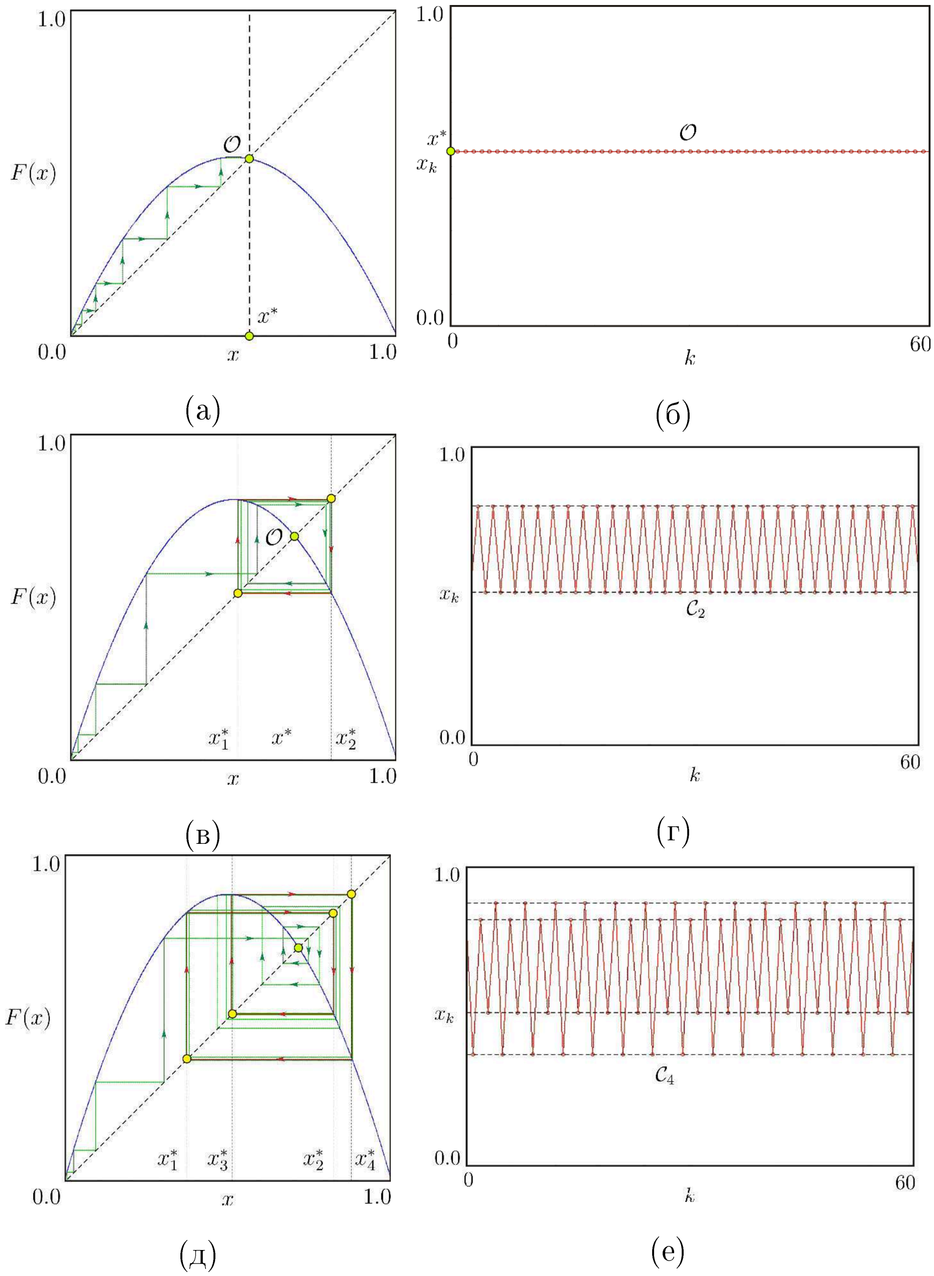


Рис. 11. (а),(б) «Cobweb» и временные диаграммы для устойчивой неподвижной точки. (в), (г) Цикл периода 2. (д), (е) 4-цикл

расстояние от x_0 до $F(x_0)$, например, линейкой и перенести на ось абсцисс как новую точку для следующей итерации. Однако с помощью биссектрисы $y = x$ можно сделать это гораздо проще.

– Из точки $(x_0, F(x_0))$ проведем горизонталь до пересечения с биссектрисой $y = x$. Точка пересечения горизонтали с биссектрисой имеет координаты $(F(x_0), F(x_0))$, абсцисса которой есть x_1.

– Далее, взяв абсциссу точки $(F(x_0), F(x_0))$ за начальную и повторив все те же операции, получим точки $x_2 = F^2(x_0)$, $x_3 = F^3(x_0)$

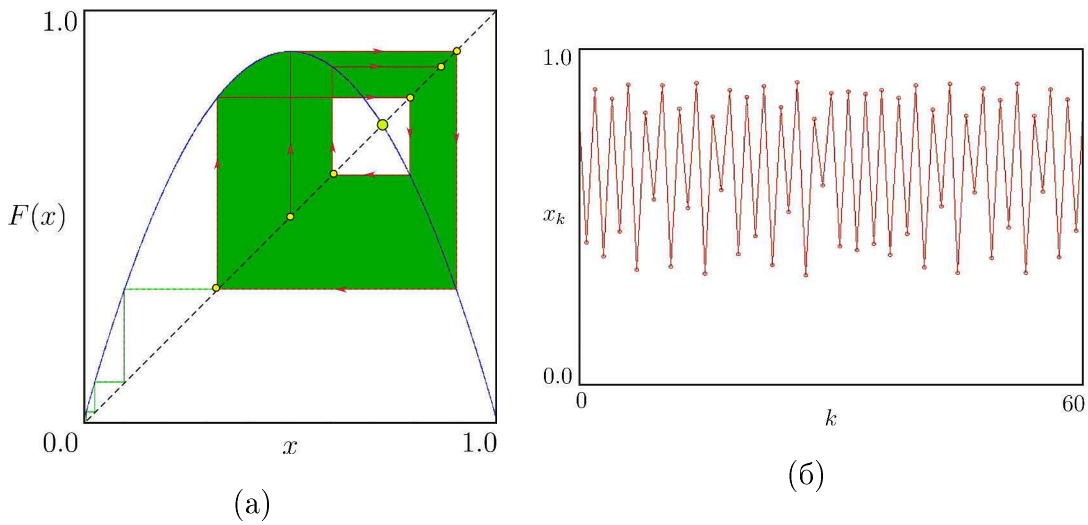


Рис. 12. (а),(б) Хаотический аттрактор

и т.д $x_k = F^k(x_0)$, $k \to \infty$. Построенная таким образом диаграмма представляет ломаную (см. рис. 10(в),(г)). Эта процедура называется «плетением паутины» («cobweb»).

На рис. 11, 12 приведены «cobweb» и временные диаграммы для различных значений параматра λ по истечении достаточно большого времени k.

На рис. 11(а),(б) показан случай, когда орбита сходится к некоторому предельному значению x^* и, как это видно из рис. 11(а), это значение отвечает абсциссе x^* точки $\mathcal{O}$ пересечения графика функции $F(x)$ с биссектрисей $y = x$.

При другом значении параметра λ, орбита уже не сходится к неподвижной точке $\mathcal{O}$, но сходится к периодическому циклу значений x_1^* и x_2^* , которые выделены желтыми кружочками на рис. 11(с) и к x_i^*, $i = \overline{1,4}$ на рис. 11(е).

Переход из начальной точки к предельному x^* или периодическому циклу значений x_1^*, x_2^* или x_i^*, $i = \overline{1,4}$ называется переходным процессом.

На рис. 12 показан случай, когда орбита ведет себя беспорядочно и непредсказуема. Такое поведение называется хаотической динамикой, а случаи, приведенные на рис. 11, называется регулярной динамикой.

Переход от регулярной динамики к хаотической и будет составлять предмет нашего изучения.

Возвращаясь к рис. 11(б),(г), (е), дадим несколько важных и ключевых определений.

- Точка x_0 называется неподвижной, если

$$F(x_0) - x_0 = 0. \tag{16}$$

Орбита неподвижной точки – это одна точка $\mathcal{O} = \{x^*\}$, удовлетворяющая уравнению (16). На рис. 11(а),(б) неподвижная точка – это точка $\mathcal{O}$ пересечения графика функции $F(x)$ с бисектриссой $y = x$, для которой

$$F(x^*) - x^* = 0.$$

Для логистического отображения уравнение (16) имеет вид

$$\lambda x(1-x) - x = 0 \Leftrightarrow x(\lambda - 1 - \lambda x) = 0.$$

Отсюда корни этого уравнения дают две неподвижные точка: $x_1^* = 0$ и $x_2^* = 1 - \dfrac{1}{\lambda}$.

- Точка x периодическая с периодом m, если она переходит в себя после применения к ней отображения F в m-раз

$$F^m(x) - x = 0, \quad F^m(x) = \underbrace{F(F(\dots F(x)\dots))}_{m \text{ раз}}, \quad F^k(x) \neq x, \quad k < m. \tag{17}$$

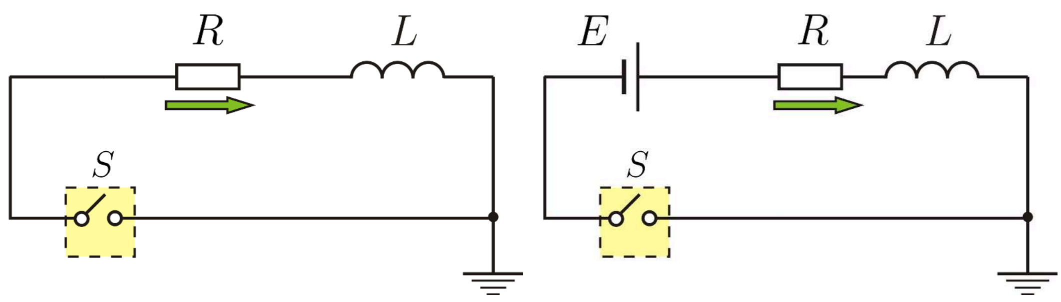
Периодической орбитой или *циклом* периода m называется конечное множество точек

$$\mathcal{C}_m(x_0) = \{x_0, \quad F(x_0), \quad F^2(x_0), ..., F^{m-1}(x_0), \quad F^m(x_0) = x_0\}. \tag{18}$$

Каждая точка этого множества является неподвижной точкой функции F^m, т.е. удовлетворяет уравнению (17).

Так, например, орбита периодической точки с периодом $m = 2$ (см. рис. 11(в)) состоит из 2-х различных точек $\mathcal{C}_2 = \{x_1^*, x_2^*\}$, $x_1^* \neq x_2^*$. Каждая периодическая точка есть неподвижная точка отображения F^2, удовлетворяющая

$$F^2(x_1^*) - x_1^* = 0, \quad F^2(x_2^*) - x_2^* = 0, \quad F^2(x) = F(F(x)).$$



(а) (б)

Рис. 13. (а) Цепь, состоящая из сопротивления R и индуктивности L. (б) RL цепь с источником э.д.с E

7. Задание к лабораторной работе

1. Рассмотрите цепь, состоящую из сопротивления R и индуктивности L (рис. 13 (а)). Найдите ток $I(t)$ цепи и постройте графики $I(t)$ и $L\dfrac{dI}{dt}$.

2. Рассмотрите схему (рис. 13 (б)), состоящую из источника с э.д.с, равной E, сопротивления R и индуктивности L. Найдите ток $I(t)$ цепи и постройте графики $I(t)$ и $L\dfrac{dI}{dt}$.

3. Выполните анализ, как меняются $I(t)$, $L\dfrac{dI}{dt}$ и к каким значениям они стремятся с течением времени. Сформулируйте выводы.

4. Чему равняется постоянная времени контура и от чего зависит?

5. Для RL цепи с источником э.д.с постройте отображение и выполните расчет cobweb диаграммы. Сформулируйте выводы.

Библиографический список

1. *Kuznetsov Yu. A.* Elements of Applied Bifurcation Theory.— New York: Springer–Verlag, 2004.

2. *Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E.* Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. — Singapore: World Scientific, 2003.

3. *Жусубалиев Ж. Т.* Хаотическая динамика в импульсных системах: учебное пособие/ Ж. Т. Жусубалиев, В. Г. Рубанов, В. С. Титов, О. О. Яночкина. – Курск; Белгород: Изд-во БГТУ, 2018. - 143 с.