МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
________ О.Г. Локтионова
« 25 » 12 ________ 2018г.

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Методические указания
к выполнению практических заданий
по дисциплине «Уравнения математической физики»
для направления подготовки 02.03.03

Курск 2018

УДК 517.946(075.8)

Составители: Н.А. Хохлов, Чжо Аунг Хеин

Рецензент
Доктор физико-математических наук, профессор А.П.Кузьменко

Уравнения математической физики: методические указания к выполнению практических заданий по дисциплине «Уравнения математической физики» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Н.А. Хохлов, Чжо Аунг Хеин. – Курск, 2018. – 16 с.

Излагаются методические рекомендации по выполнению практических заданий. Содержатся краткие описания применяемых при решении уравнений математической физики методов, задания и вопросы для контроля знаний.

Методические указания соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования и учебного плана направления подготовки 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем». Материал предназначен для магистров направления подготовки 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», а также будет полезен студентам всех других направлений подготовки, изучающих дисциплину «Уравнения математической физики».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 15.12.18 . Формат 60 х 84 1/16.
Усл. печ. л. 0,58. Уч.-изд. л. 0,53. Тираж 30 экз. Заказ 3033. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Цель работ: освоить методики решения уравнений математической физики.

Темы

№ п/п	Раздел (тема) дисциплины	Содержание
1	2	3
1	Классификация уравнений в частных производных.	Общая классификация уравнений в частных производных. Классификация уравнений в частных производных второго порядка. Начальные и краевые условия.
2	Уравнения параболического типа.	Классификация уравнений параболического типа. Определения. Постановка задач. Уравнения теплопроводности для стержня, пластины, трехмерной среды.
3	Уравнения гиперболического типа.	Классификация уравнений гиперболического типа. Определения. Постановка задач. Уравнения колебаний струны, мембраны, трехмерной среды.
4	Уравнения эллиптического типа.	Классификация уравнений эллиптического типа. Определения. Постановка задач. Фундаментальное решение уравнений Лапласа. Решение Дирихле для круга методом Фурье.

Тема 1
Задания по работам

Задание 1. Найти области гиперболичности, параболичности и эллиптичности уравнения. Сделать рисунок. Постоянные a, b, c задаются преподавателем.

1. $yU_{xx} + a\sqrt{x}U_{xy} + (y-b)U_{yy} + (cx^2 + \cos y)U_y - 4xyU = 0$.

2. $(x-a)U_{xx} + b\sqrt{y}U_{xy} + (cx-4)U_{yy} + (x^2 + y)U_x - 4U_y + 25xy^5 = 0$.

3. $(\sin x + a)U_{xx} + b\sqrt{xy}U_{xy} - U_{yy} + (x^2y^3 + y)U_x - cxyU_y = 0$.

Пример решения

Уравнение: $(|\bullet| - 4)U_{xx} - 2\sqrt{y}U_{xy} - U_{yy} + (1 - \log_2(x+3))U_x = 0$.

Сначала найдем область определения уравнения. Поскольку это уравнение содержит функции $\sqrt{y}$ и $\log_2(x+3)$, то должны выполняться условия $\bullet \geq 0, \quad x > -3$. Введем обозначение $\bullet_{12}^2 - \bullet_{11}\bullet_{22} = \delta$.

$$\delta = (\sqrt{y})^2 - (|\bullet| - 4)(-1) = \bullet + |\bullet| - 4.$$

При $\delta = 0$, $\bullet + |\bullet| - 4 = 0$ и, следовательно, $\bullet = 4 - |\bullet|$. При $\delta > 0$, $\bullet > 4 - |\bullet|$. Если $\delta < 0$, то $\bullet < 4 - |\bullet|$. Тогда область параболичности имеет вид

$\{(\bullet,\bullet)|\quad \bullet = 4-|\bullet|, \bullet \geq 0, \bullet > -3\}$, область гиперболичности – $\{(\bullet,\bullet)|\quad \bullet + |\bullet| - 4 > 0, \bullet \geq 0, \bullet > -3\}$ и область эллиптичности – $\{(\bullet,\bullet)|\quad \bullet + |\bullet| - 4 < 0, \bullet \geq 0, \bullet > -3\}$. Чтобы изобразить эти области на рисунке, нужно сперва построить график линии $\delta = 0$ с учетом области определения (в нашем случае это линия $\bullet = 4-|\bullet|$). Затем различной штриховкой отметить области, в которых $\delta > 0$ и $\delta < 0$.

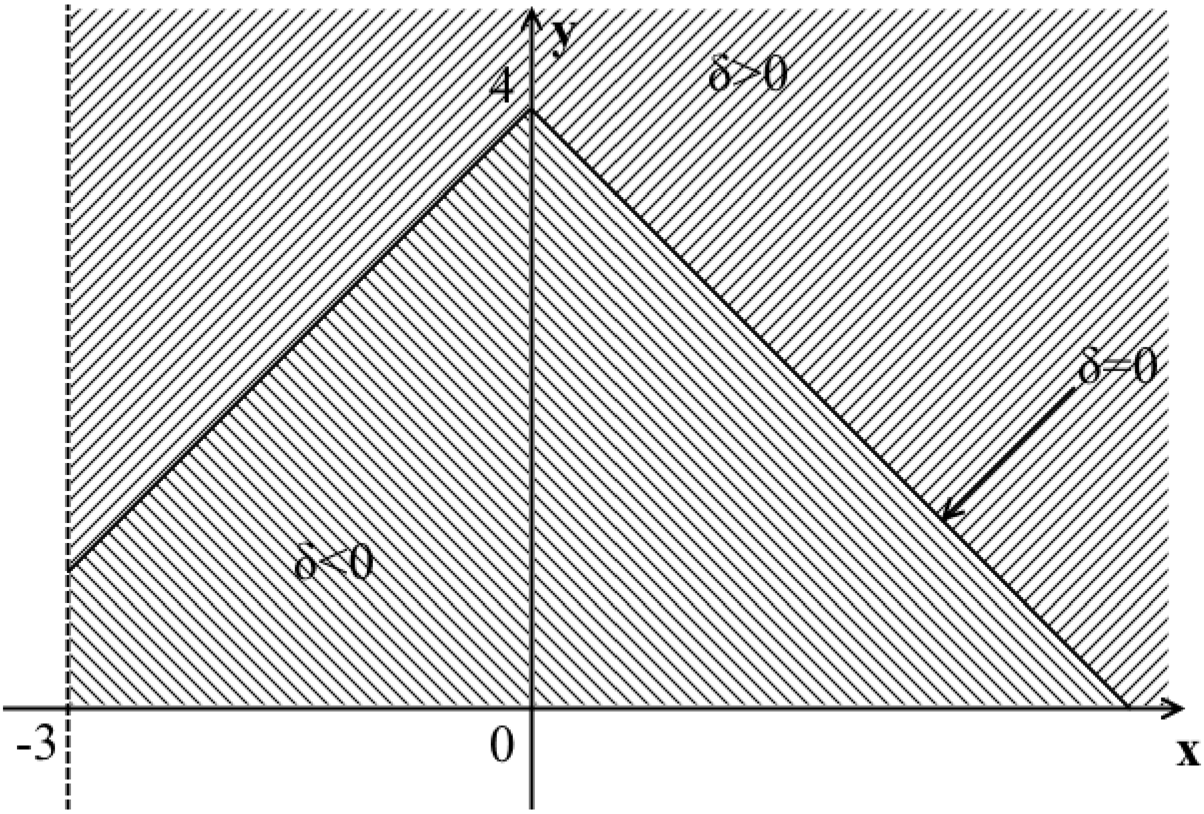

Рисунок 1 – Области гиперболичности, параболичности и эллиптичности уравнения

Тема 2
Параболическая задача (в круговой области)

Задание. Найти решение первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности. Постоянные *a, b,* с задаются преподавателем.

$$u_t = a\Delta u,\ 0 \leq r \leq b,\ t > 0 \tag{1}$$

$$u(r,0) = c - r^2, \tag{2}$$

$$u(b,t) = 0. \tag{3}$$

Пример решения для *a=7, b=4, c=16*. Очевидна осевая симметрия решения. Т.е.

$$u = u(r,t),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Оператор Лапласа Δu запишем в полярных координат предполагая отсутствие зависимости функции u от φ, т.е. считая $u_\varphi \equiv 0$.

Имеем

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r - x \cdot \frac{x}{r}}{r^2} = \frac{y^2}{r^3}, \ \ \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{x^2}{r^3}.$$

Тогда

$$u_x = u_r \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} u_r, \ u_y = \frac{y}{r} u_r,$$

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r} u_r\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) u_r + \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial x}(u_r) = \frac{y^2}{r^3} u_r + \frac{x^2}{r^2} u_{rr},$$

$$u_{yy} = \frac{x^2}{r^3} u_r + \frac{y^2}{r^2} u_{rr},$$

и

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{r} u_r + u_{rr}.$$

В результате уравнение (1) принимает вид

$$u_t = 7\left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r\right), \ 0 \le r < 4, \ t > 0. \qquad (4)$$

Решение задачи (1-3) ищем в виде

$$u(r,t) = R(r) \cdot T(t). \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (4) и разделяя переменные, получим

$$\frac{T'}{7T} = \frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} = -\lambda \quad (\lambda \ge 0),$$

откуда

$$T' + 7\lambda T = 0 \tag{6}$$

и

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda R = 0. \tag{7}$$

Определимся с граничными условиями для функции $R(r)$. Из (18), в частности, следует, что

$$R(4) = 0. \tag{8}$$

Учтём, далее, что уравнение (21), - второго порядка. Поэтому, в качестве второго дополнительного условия потребуем ограниченность функции R в окрестности точки $r = 0$, т.е.

$$\left|R(\pm 0)\right| < \infty. \tag{9}$$

Умножив (7) на r^2, получим уравнение уравнения Бесселя ($z^2 R''(z) + zR'(z) + (z^2 - \nu^2)R(z) = 0$):

$$r^2 R'' + rR' + \lambda r^2 R = 0, \tag{10}$$

В данном случае значение $\nu = 0$, поэтому его общее решение, с учётом замены $z = r\sqrt{\lambda}$, согласно (26), имеет вид

$$R(r) = C_1 I_0(r\sqrt{\lambda}) + C_2 N_0(r\sqrt{\lambda}).$$

Однако, в силу неограниченности функции Неймана и требования (9), имеем

$$R(r) = C_1 I_0(r\sqrt{\lambda}).$$

Далее, из граничного условия (22) следует, что

$$R(4) = C_1 I_0(4\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Пусть μ_n - положительные корни уравнения $I_0(\mu) = 0$. Тогда набор

$$\lambda_n = \frac{{\mu_n}^2}{16}, \; n \in N$$

представляет собой систему собственных значений, а набор функций

$$R_n(r) = I_0\left(\frac{\mu_n}{4} r\right),$$

- систему собственных функций исходной краевой задачи.

Перейдем теперь к уравнению (20). Имеем

$$T_n' + 7\lambda_n T_n = 0,$$

Откуда $T_n = A_n e^{-7\lambda_n t}$.

Тогда, в соответствии с общей схемой метода Фурье, решение краевой задачи (16), (17), (18) ищем в виде ряда

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\frac{-7{\mu_n}^2}{16} t} \cdot I_0\left(\frac{\mu_n}{4} r\right).$$

Для определения коэффициентов A_n воспользуемся начальным условием. Имеем

$$u(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_0\left(\frac{\mu_n}{4} r\right) = 16 - r^2$$

Умножим теперь обе части последнего соотношения на $rI_0\left(\frac{\mu_n}{4} r\right)$ и почленно проинтегрируем на $[0;4]$. Имеем

$$A_n \cdot \left\| I_0\left(\frac{\mu_n}{4} r\right) \right\|^2 = \int_0^4 r(16 - r^2) I_0\left(\frac{\mu_n}{4} r\right) dr. \qquad (11)$$

Используя соотношение (11), получим

$$\left\| I_0\left(\frac{\mu_n}{4} r\right) \right\|^2 = 8 {I_0'}^2(\mu_n). \qquad (12)$$

Попытаемся теперь вычислить или, по крайней мере, упростить интеграл, расположенный в правой части соотношения (30), приведя его к конечному виду.

Прежде всего учтём, что из уравнения (10) при $\nu = 0$, в частности, следует

$$zI_0''(z) + I_0'(z) = -zI_0(z)$$

Отсюда

$$z\left(I_0'(z)\right)' = -zI_0(z). \tag{13}$$

Тогда после выполнения замены в рассматриваемом интеграле $r\sqrt{\lambda_n} = z$ (или $r = \frac{z}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{4}{\mu_n} z$), последовательного использования соотношения (32) и интегрирования по частям, получим

$$I = \int_0^4 r(16 - r^2) I_0\left(\frac{\mu_n}{4} r\right) dr = \frac{16}{\mu_n^2} \int_0^{\mu_n} z\left(1 - \frac{1}{\mu_n^2} z^2\right) I_0(z) dz \overset{(32)}{=}$$

$$= \frac{1024}{\mu_n^4} \int_0^{\mu_n} \left(zI_0'(z)\right)' dz = -\frac{1024}{\mu_n^4} zI_0'(z)\Big|_0^{\mu_n} = -\frac{1024}{\mu_n^3} I_0'(\mu_n). \tag{14}$$

Таким образом, из (30) с учётом (31), (33) имеем

$$A_n = -\frac{128}{\mu_n^3 \cdot I_0'(\mu_n)}.$$

Если же теперь дополнительно использовать свойство

$$I_\nu'(z) = \frac{\nu}{z} I_\nu(z) - I_{\nu+1}(z)$$

при $\nu = 0$, окончательно получим

$$A_n = \frac{128}{\mu_n^3 \cdot I_1(\mu_n)}.$$

Таким образом, решение данной краевой задачи имеет вид

$$u(r,t) = 128 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^3 \cdot I_1(\mu_n)} e^{-\frac{7\mu_n^2 t}{16}} \cdot I_0\left(\frac{\mu_n}{4} r\right),$$

где μ_n - корни уравнения $I_0(z) = 0$.

Тема 3

Задания по работам

1. По условию задачи (задаются преподавателем) составить уравнение в частных производных [1,2,3].
2. Классифицировать уравнение в частных производных 2-го порядка.
3. Решить уравнение в частных производных 2-го порядка.

Составить отчет по работе, содержащий
- задание и цель работы,
- решение,
- выводы.

Теория

Уравнение составляется в соответствии с установленным законом или моделью рассматриваемого явления. Например, малые поперечные колебания однородной струны длиной l (расположенной вдоль оси x) описываются уравнением [3]

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < l. \tag{1}$$

Здесь t – время, l – длина струны, постоянная $a^2 = \frac{T}{\rho}$, определяется отношением натяжения T к линейной плотности струны ρ. Величина $u(x,t)$ определяет отклонение точки струны от положения равновесия. Положение равновесия означает, что струна полностью лежит на оси x. Для решения этого уравнения необходимо также знать начальные условия, например

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\quad 0<x<l. \tag{2}$$

Также для решения требуются граничные условия

$$u(0,t)=0,\ \ u(l,t)=0. \tag{3}$$

Условия (3) называются однородными. Уравнение (1) является уравнением с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными гиперболического типа, неоднородным. Рассмотрим пример решения такого уравнения в частном случае:

$$u_{tt}=u_{xx}+3\sin(2\pi x/l). \tag{4}$$

$$u(x,0)=\sin(3\pi x/l),\ u_t(x,0)=0{,}5\sin(2\pi x/l),\quad 0<x<l. \tag{5}$$

$$u(0,t)=0,\ \ u(l,t)=0. \tag{6}$$

Ищем решение этой задачи в виде разложения в ряд Фурье:

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}u_i(t)\sin\left(\frac{\pi i}{l}x\right). \tag{7}$$

Начальные условия (6) и неоднородное слагаемое (4) уже имеют такой вид, граничные условия удовлетворяются представлением (7). Подстановка в (4) дает

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi i}{l}x\right)\left(-\frac{d^2u_i(t)}{dt^2}-\left(\frac{\pi i}{l}\right)^2u_i(t)+3\delta_{2i}\right)=0, \tag{8}$$

где δ_{ji} - символ Кронекера. Независимость членов ряда Фурье означает, что:

$$\frac{d^2u_i(t)}{dt^2}+\left(\frac{\pi i}{l}\right)^2u_i(t)=3\delta_{2i}. \tag{9}$$

Таким образом, мы получили обыкновенное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка однородное для $i\neq 2$ и неоднородное для $i=2$. Из начальных условий

$$u(x,0)=\sum_{i=1}^{\infty}u_i(0)\sin\left(\frac{\pi i}{l}x\right)=\sin(3\pi x/l), \tag{10}$$

$$u_t(x,0)=\sum_{i=1}^{\infty}\left.\frac{du_i(t)}{dt}\right|_{t=0}\sin\left(\frac{\pi i}{l}x\right)=0{,}5\sin(2\pi x/l). \tag{11}$$

Из этих условий следует, что

$$u_i(0)=\delta_{3i}\quad\text{и}\quad\left.\frac{du_i(t)}{dt}\right|_{t=0}=0{,}5\delta_{2i}. \tag{12}$$

Из (9) и (12) следует, что $u_i(t)\equiv 0$, при $i\neq 2$ и $i\neq 3$. При $i=2$

$$\frac{d^2u_2(t)}{dt^2}+\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 u_2(t)=3 \qquad (13)$$

с начальными условиями:

$$u_2(0)=0 \quad \text{и} \quad \left.\frac{du_2(t)}{dt}\right|_{t=0}=0,5\,. \qquad (14)$$

Общее решение (13) имеет вид суммы общего решения соответствующего однородного уравнения ($u_{2.}(t)$) и частного решения неоднородного уравнения ($u_{2.}(t)$):

$$u_2(t)=u_{2.}(t)+u_{2.}(t)=\left[A\sin\left(\frac{2\pi}{l}t\right)+B\cos\left(\frac{2\pi}{l}t\right)\right]+3\cdot\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2. \qquad (15)$$

Начальные условия (14) позволяют определить постоянные A и B:

$$u_2(0)=\left[A\sin\left(\frac{2\pi}{l}\cdot 0\right)+B\cos\left(\frac{2\pi}{l}\cdot 0\right)\right]+3\cdot\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2=B+3\cdot\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2=0,$$

$$\left.\frac{du_2(t)}{dt}\right|_{t=0}=\frac{2\pi}{l}\left[A\cos\left(\frac{2\pi}{l}\cdot 0\right)-B\sin\left(\frac{2\pi}{l}\cdot 0\right)\right]=-\frac{2\pi}{l}A=0,5\,.$$

Тогда $B=-\frac{3l^2}{4\pi^2}$, $A=-\frac{l}{4\pi}$ и

$$u_2(t)=-\frac{l}{4\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{l}t\right)-\frac{3l^2}{4\pi^2}\cos\left(\frac{2\pi}{l}t\right)+3\cdot\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2. \qquad (16)$$

При $i=3$ мы получаем однородное уравнение:

$$\frac{d^2u_3(t)}{dt^2}+\left(\frac{3\pi}{l}\right)^2 u_3(t)=0 \qquad (17)$$

с начальными условиями:

$$u_3(0)=1 \quad \text{и} \quad \left.\frac{du_3(t)}{dt}\right|_{t=0}=0\,. \qquad (18)$$

Общее решение (17)

$$u_3(t)=D\sin\left(\frac{3\pi}{l}t\right)+F\cos\left(\frac{3\pi}{l}t\right). \qquad (19)$$

Начальные условия (14) позволяют определить постоянные *D* и *F*:

$$u_3(0)=D\sin\left(\frac{3\pi}{l}\cdot 0\right)+F\cos\left(\frac{3\pi}{l}\cdot 0\right)=F=1,$$

$$\left.\frac{du_2(t)}{dt}\right|_{t=0}=\frac{3\pi}{l}\left[D\cos\left(\frac{3\pi}{l}\cdot 0\right)-F\sin\left(\frac{3\pi}{l}\cdot 0\right)\right]=-\frac{3\pi}{l}D=0\,.$$

Тогда $F=1$, $D=0$ и

$$u_3(t)=\cos\left(\frac{3\pi}{l}t\right). \tag{20}$$

Решение задачи (1 –3)

$$u(x,t)=u_2(t)\sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right)+u_3(t)\sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right). \tag{21}$$

Тема 4

Задание. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге

$$\Delta u=0,\ 0\le r<a,\ u\big|_{r=a}=-b\varphi^2+c2\pi\varphi\ . \tag{22}$$

Постоянные *a, b,* с задаются преподавателем.

Пример решения для *a*=3, *b*=-1, *c*=2. Из постановки задачи вытекает целесообразность использования полярных координат. Поэтому, для начала, представим уравнение Лапласа в полярных координатах. Имеем

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ tg\varphi=\frac{y}{x}.$$

Тогда, непосредственно дифференцируя первое соотношение и второе, - как неявно заданную функцию, получим

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{y}{r^2},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{x}{r^2}.$$

Далее, находим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{y^2}{r^2},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y}=-\frac{xy}{r^3},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{x^2}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=-\frac{2xy}{r^4},\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=-\frac{x^2-y^2}{r^4},\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{2xy}{r^4}.$$

Тогда $u_x=u_r\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x}+u_\varphi\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$,

$$u_{xx}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},$$

или, подставляя полученные выше выражения

$$u_{xx}=\frac{x^2}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}-\frac{2xy}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}+\frac{y^2}{r^4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{y^2}{r^3}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{2xy}{r^4}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi}. \qquad (23)$$

Действуя совершенно аналогичным образом, получим

$$u_{yy}=\frac{y^2}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{2xy}{r^3}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}+\frac{x^2}{r^4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{x^2}{r^3}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{2xy}{r^4}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi}. \qquad (24)$$

Тогда, уравнение (22) принимает вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (25)$$

Решение ищем в виде

$$u(r,\varphi)=R(r)\bullet\ (\varphi), \qquad (26)$$

Подставив (26) в (25), после разделения переменных получим

$$-\frac{r\frac{\partial}{\partial r}(rR')}{R}=\frac{\bullet\ ''}{\bullet}=-\lambda.$$

Отсюда

$$\begin{cases} r\cdot\dfrac{\partial}{\partial r}(rR')-\lambda R=0 \\ \bullet\ ''+\lambda\bullet\ =0 \end{cases}. \qquad (27)$$

$\lambda\geq 0$, т.к. $\bullet\ (\varphi)$, - 2π-периодическая функция. Общее решение второго уравнения

$$\bullet\ (\varphi)=C_1\cos\sqrt{\lambda}\varphi+C_2\sin\sqrt{\lambda}\varphi,$$

и из требования $\bullet\ (\varphi+2\pi)=\bullet\ (\varphi)$, произвольности постоянных C_1, C_2 имеем

$$\begin{cases} \cos\sqrt{\lambda}(\varphi+2\pi)=\cos\sqrt{\lambda}\varphi \\ \sin\sqrt{\lambda}(\varphi+2\pi)=\sin\sqrt{\lambda}\varphi \end{cases}.$$

Сворачивая выражения в каждом из соотношений в произведение, имеем

$$\begin{cases} \sin\pi\sqrt{\lambda}\cdot\sin(\pi+\varphi)\sqrt{\lambda}=0 \\ \sin\pi\sqrt{\lambda}\cdot\cos(\pi+\varphi)\sqrt{\lambda}=0 \end{cases}.$$

Отсюда

$$\sin\pi\sqrt{\lambda}=0,\;\; \pi\sqrt{\lambda}=\pi n,\;\; \lambda_n=n^2,\;\; n\in N\cup\{0\}.$$

Тогда

$$\bullet_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi, \tag{28}$$

Где n – целое положительное число.

Рассмотрим первое из уравнений (27). Имеем

$$r^2R_n''+rR_n'-n^2R_n=0. \tag{30}$$

Данное уравнение является уравнением Эйлера. Решаем его подстановкой $R(r)=r^\alpha$, где α - постоянная: $\alpha(\alpha-1)r^\alpha+\alpha r^\alpha-n^2r^\alpha=0$

или

$$\alpha^2-n^2=0.$$

Отсюда $\alpha=\pm n$. Таким образом, общее решение уравнения имеет вид

$$R=C_1r^n+C_2r^{-n}$$

Но, в силу ограниченности и непрерывности решения в круге $r\le 3$, имеем $C_2=0$. Таким образом,

$$R_n=r^n$$

$$u_n(r,\varphi)=r^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)$$

и

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}r^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi).$$

Далее, из граничного условия (22) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}3^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)=-\varphi^2+2\pi\varphi.$$

При $n=0$, $B_0=0$. Умножая, теперь, последовательно обе части на $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$ и интегрируя получим

$$A_n\cdot 3^n\int_0^{2\pi}\cos^2 n\varphi d\varphi=-\int_0^{2\pi}(\varphi^2-2\pi\varphi)\cos n\varphi d\varphi,$$

$$B_n\cdot 3^n\int_0^{2\pi}\sin^2 n\varphi d\varphi=-\int_0^{2\pi}(\varphi^2-2\pi\varphi)\sin n\varphi d\varphi.$$

Определяем,

$$A_0=\frac{20\pi^3}{3},\quad A_n=-\frac{4}{n^2\cdot 3^n},\quad B_n=-\frac{4}{n^3\cdot 3^n},\quad n\in N.$$

Окончательно решение задачи имеет вид

$$u(r,\varphi)=\frac{20\pi^3}{3}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n^2 3^n}\left(\cos n\varphi-\frac{1}{n}\sin n\varphi\right).$$

Контрольные вопросы

Дайте определения:

1. уравнения с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными.
2. линейного относительно старших производных уравнения с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными.
3. квазилинейного относительно старших производных уравнения с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными.
4. линейного уравнения с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными.
5. линейного однородного уравнения с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Дзержинский Р. И., Логинов В.А Уравнения математической физики: курс лекций [Электронный ресурс]: учебник/ Р.И. Дзержинский,

В.А. Логинов – Министерство транспорта Российской Федерации, Московская государствен-ная академия водного транспорта. – М.: Альтаир: МГАВТ, 2015. - 67 с. Ре-жим доступа - http://biblioclub.ru/
2. Прокудин Д. А., Глухарева Т. В., Казаченко И. В. Уравнения математической физики: учебное пособие/ Д. А. Прокудин, Т. В. Глухарева, И. В. Каза-ченко – Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2014 - 163 с. Режим доступа - http://biblioclub.ru/
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Физматлит, 2007. – 400 с. ISBN 5-9221-0310-5
4. Сабитов, К.Б. Уравнения математической физики : учебник / К.Б. Сабитов – М.: Физматлит, 2013. - 352 с. Режим доступа - http://biblioclub.ru/