МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Локтионова
2016 г.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ

Методические указания по выполнению практической и
самостоятельной работ по курсу
«Управление мехатронными системами и роботами»
по направлению 15.04.06 - «Мехатроника и робототехника»

Курск 2016

УДК 681.5.01

Составитель: П.А. Безмен

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент кафедры механики, мехатроники и робототехники
Е.Н. Политов

Моделирование следящей системы: методические указания по выполнению практической и самостоятельной работ по дисциплине «Управление мехатронными системами и роботами» по направлению 15.04.06 - «Мехатроника и робототехника» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: П.А. Безмен; Курск, 2016. 12 с.: ил. 1, табл. 2.

Содержат сведения по вопросам синтеза систем автоматического управления для мехатронных систем и роботов. Приведены краткие сведения из теории, методика выполнения работы, варианты заданий, примеры.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утверждённой учебно-методическим объединением (УМО).

Предназначены для студентов направления 15.04.06 - «Мехатроника и робототехника» всех форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж 100 экз. Заказ. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Практическая работа № 2
МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ

Цель работы

Целью работы является освоение различных способов описания линейных динамических систем и методы их моделирования в пакетах MATLAB и SIMULINK.

Краткие сведения из теории

Описание систем структурной схемой и передаточной функцией

В инженерной практике используются различные способы задания динамических систем – с помощью структурных схем, передаточных функций, дифференциальных уравнений, а также с помощью частотных и временных характеристик. Проиллюстрируем их на примере следящей системы, структурная схема которой представлена на рис. 1. В ее состав входят инерционное усилительное звено с передаточной функцией k / $(T_1p + 1)$, двигатель с передаточной функцией 1 / (T_2p) и вычитающее устройство (компаратор) для сравнения входного сигнала u и выходного сигнала следящей системы y. Следящая система должна работать таким образом, чтобы угол поворота двигателя y по возможности точно равнялся значению входного сигнала u (задача слежения).

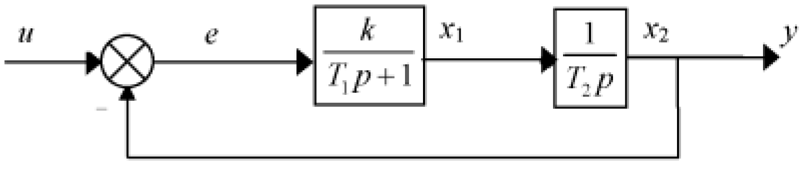

Рис. 1. Структура следящей системы

Способ задания моделей объектов с помощью схемы (типа приведенной на рис. 1) называется *структурным,* поскольку он отражает реальную структуру объекта.

По передаточным функциям отдельных блоков можно построить общую передаточную функцию следящей системы

$$Q(p) = \frac{Y(p)}{U(p)},$$

связывающую изображения по Лапласу входного и выходного сигналов.

Для этого в соответствии со структурной схемой выписывается система уравнений

$$Y(p) = \frac{1}{T_2 p} \cdot \frac{k}{(T_1 p + 1)} \cdot e(p), \tag{1}$$

$$e(p) = U(p) - Y(p),$$

которая затем преобразуется к одному уравнению, путем исключения переменной $e(p)$:

$$Y(p) = \frac{k}{T_2 p \cdot (T_1 p + 1)} \cdot (U(p) - Y(p)).$$

Далее, выражая выходной сигнал $Y(p)$ через входной $U(p)$, получаем

$$Y(p) = \frac{k}{T_2 p \cdot (T_1 p + 1) + k} \cdot U(p) = Q(p) \cdot U(p).$$

где $Q(p)$ - *передаточная функция* системы.

В нашем случае она имеет вид

$$Q(p) = \frac{k}{T_1 T_2 p^2 + T_2 p + k}$$

По сравнению со структурным описанием передаточная функция является более компактной математической моделью, в то же время она позволяет анализировать такие характеристики, как устойчивость и минимальность объекта.

Описание систем дифференциальными уравнениями

От передаточной функции легко осуществить переход к описанию системы с помощью *дифференциального уравнения.* В рассматриваемом случае для этого достаточно в уравнении

$$(T_1 T_2 p^2 + T_2 p + k)\cdot Y(p) = kU(p)$$

раскрыть скобки и заменить оператор p оператором дифференцирования d/dt

$$T_1 T_2 \ddot{y} + T_2 \dot{y} + ky = ku. \qquad (2)$$

Решая это дифференциальное уравнение, можно найти реакцию следящей системы на любое входное воздействие.

Аналитическое решение $y(t)$ дифференциального уравнения (2) является суммой решения однородного уравнения $y_{\text{одн}}(t)$ и частного решения дифференциального уравнения $y_{\text{частн}}(t)$.

Для получения $y_{\text{одн}}(t)$ составляем характеристическое уравнение $T_1 T_2 p^2 + T_2 p + k = 0$. и находим его корни p_1 и p_2. Если они вещественные и различные, то решение однородного уравнения ищется в виде

$$y_{одн}(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t},$$

где C_1 и C_2 - коэффициенты, зависящие от начальных условий и определяемые в дальнейшем. Если корни одинаковые (кратные) $p_1 = p_2$, то решение имеет вид

$$y_{одн}(t) = (C_1 + C_2 t) e^{p_1 t}$$

Паре комплексных корней $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ соответствует решение

$$y_{одн}(t) = e^{\alpha t}(C_1 \sin\beta t + C_2 \cos\beta t).$$

Во всех случаях система оказывается устойчивой, если корни лежат в левой полуплоскости (при этом решение однородного уравнения с течением времени стремится к нулю).

Частное решение дифференциального уравнения определяется видом правой части дифференциального уравнения (2). Если, например, там стоит экспоненциальная функция $u = e^{-t}$, то и частное решение нужно искать в виде экспоненты $y_{\text{частн}} = Ce^{-t}$. Если $u = 1(t)$, его следует искать в виде константы $y_{\text{частн}} = C$. Для определения C надо подставить частное решение в дифференциальное уравнение. Учитывая, что производная от константы равна нулю, находим, что в последнем случае $C = 1$.

Значения постоянных C_1, C_2 определяются путем подстановки в полученное решение начальных условий. Например, в случае нулевых начальных условий и решения вида

$$y(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + 1$$

постоянные C_1 и C_2 находятся из системы уравнений

$$C_1 + C_2 + 1 = 0;$$
$$p_1 C_1 + p_2 C_2 = 0.$$

Наряду с заданием объекта одним дифференциальным уравнением типа (2) часто используют описание с помощью системы дифференциальных уравнений первого порядка. Оно известно как *матричное описание* или *описание в пространстве состояний.*

Для получения описания следящей системы в пространстве состояний выберем в качестве переменных состояния x_1 и x_2 выходные сигналы звеньев первого порядка на структурной схеме рис. 1.

Составим для каждого из них дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{T_1} x_1 - \frac{k}{T_1} x_2 + \frac{k}{T_1} u,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{T_2} x_1 .$$

Кроме того, запишем алгебраическое уравнение для выходного сигнала $y = x_2$. В матричном виде это описание имеет вид

$$\dot{\mathrm{X}} = \mathrm{AX} + \mathrm{b}u,$$
$$y = \mathrm{cX},$$

где

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$
$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1/T_1 & -k/T_1 \\ 1/T_2 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\mathrm{b} = \begin{bmatrix} k/T_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Анализируя это описание, можно оценить устойчивость, управляемость, наблюдаемость и другие характеристики системы.

Взаимосвязь описаний

Все рассматриваемые виды описаний тесно взаимосвязаны, поэтому, зная одно из них, можно получить остальные. Например, связь между матрицами A, b, c описания в пространстве состояний и передаточной функцией системы $Q(p)$ задается уравнением

$$Q(p) = \mathrm{c}(\mathrm{p}E - \mathrm{A})^{-1} \cdot \mathrm{b}, \qquad (3)$$

где p - оператор Лапласа, E - единичная матрица.

Любое из рассмотренных описаний системы позволяет рассчитывать ее реакцию на типовые входные сигналы. Чаще всего систему характеризуют реакцией на дельта-функцию $u = \delta(t)$ и на единичную функцию (функцию единичного скачка) $u = 1(t)$. Эти реакции известны как *импульсная весовая характеристика* системы $y = q(t)$ и *переходная характеристика* $y = p(t)$. Их изображения по Лапласу связаны с передаточной функцией формулами

$$q(t) \Leftrightarrow Q(p); \quad p(t) \Leftrightarrow Q(p)/p, \tag{4}$$

которые удобно использовать для нахождения весовой и переходной характеристик.

Другой подход к описанию системы связан с использованием частотных характеристик. Они получаются рассмотрением функции комплексной переменной, получаемой из формулы (3) заменой $p = j\omega$:

$$Q(j\omega) = \mathrm{c}(j\omega\mathrm{E} - \mathrm{A})^{-1}\,\mathrm{b}.$$

Моделирование в пакете MATLAB *и* SIMULINK

Пакет MATLAB поддерживает все виды описаний динамических систем, включая структурные схемы, передаточные функции и матричное описание в пространстве состояний. Для работы со структурными схемами в пакете MATLAB имеется приложение SIMULINK. Его можно вызвать, набирая в командном окне MATLAB команду **simulink.**

Численное моделирование следящей системы в MATLAB выполняется с помощью команд **impulse, step, lsim.** Предварительно надо ввести числитель num и знаменатель den передаточной функции либо матрицы A, B, C, D описания в пространстве состояний и сформировать структуру sys=tf(num,den) либо sys=ss(A,B,C,D). После этого весовая функция и переходная функция находятся командами impulse(sys), step(sys), а реакции на произвольные входные сигналы, такие как $u = e^{-t}$, рассчитываются с помощью команды **lsim.**

Реализация различных соединений блоков может быть осуществлена программно с помощью команд **parallel, series,**

feedback, append и некоторых других. Для этой цели можно использовать также команды **+, - , *.**

В MATLAB можно получать не только численное, но и символьное решение дифференциальных уравнений. Это делается с помощью команды **dsolve** тулбокса SYMBOLIC. Входными аргументами команды служат дифференциальное уравнение и начальные условия.

Например, для решения дифференциального уравнения

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = 2$$

с нулевыми начальными условиями следует набрать код:

```
>> y=dsolve('D2y+3*Dy+2*y=2', 'Dy(0)=0','y(0)=0') ;
```

MATLAB выдаст ответ

```
y =1+exp(-2*t)-2*exp(-t),
```

т.е.

$$y=1+e^{-2t}-2e^{-t}.$$

Методика выполнения работы

В работе исследуется динамика следящей системы, заданной структурной схемой (рис. 1) при значениях параметров k, T_1, T_2, приведенных в таблице вариантов заданий. Отчет по работе должен содержать:

1. Исходную схему моделирования с заданными численными значениями параметров и передаточную функцию $Q(p)$, полученную из уравнения (1).
2. Дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее следящую систему, его аналитическое решение и график выходного сигнала $y(t)$ при входном сигнале $u = e^{-t}$ и нулевых начальных условиях.

3. Описание следящей системы в пространстве состояний, передаточную функцию системы, полученную по формуле (3). Формулы и графики весовой и переходной характеристик.

4. Схемы моделирования следящей системы применительно к SIMULINK, содержащие осциллографы и генераторы входных сигналов (для генерирования сигнала $u = e^{-t}$ использовать интегратор с обратной связью). Программы численного и символьного моделирования в MATLAB.

Порядок выполнения работы

1. С помощью пакета SIMULINK построить схему моделирования в соответствии с рис. 1. Получить графики выходных сигналов (весовой функции, переходной функции и реакции на $u = e^{-t}$). Проверить их соответствие расчетным.

2. Параллельно со схемой моделирования следящей системы набрать модель передаточной функции $Q(p)$ следящей системы и сравнить их выходные сигналы.

3. Выполнить моделирование в пакете MATLAB, используя разные описания системы. Сравнить результаты моделирования в MATLAB и SIMULINK.

4. Построить графики фазовых траекторий в плоскости (x_1, x_2) (в SIMULINK для этого потребуется блок **XY-graph).** Построить частотные характеристики следящей системы, используя команды **bode, nyquist, ltiview.**

Контрольные вопросы

1. Описать общую процедуру перехода от произвольной структурной схемы к системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

2. Найти реакцию своего варианта следящей системы на входной сигнал $u = t$ и построить график выходного сигнала.

3. Найти передаточную функцию следящей системы, если устройство сравнения реализовано в соответствии с одной из следующих формул:

$$e = u - \dot{y}, \qquad e = u - ky, \qquad \dot{e} + e = \dot{u} + u - y.$$

4. Как повлияет изменение знака обратной связи в следящей системе на ее устойчивость и вид переходной характеристики?

5. Найти передаточную функцию следящей системы, если передаточная функция двигателя равна

$$а)\quad \frac{1}{T_1 p+1},\quad б)\quad \frac{1}{T_1 p-1},\quad в)\quad \frac{p}{T_2 p+1}.$$

6. Сравнить графики весовой и переходной функций разомкнутой и замкнутой системы для своего варианта заданий.

Варианты заданий

Таблица 1

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
k	4	16	21	7	3	15	12	5	10	16
T_1	0,2	0,1	0,1	0,125	0,25	0,125	0,2	0,4	0,8	1,2
T_2	5	20	5	4	8	4	8	2	2,5	5

Таблица 2

№	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
k	6	8	10	12	14	16	20	18	16	12
T_1	0,75	1,25	1,5	2	2,5	2	1,5	0,8	0,4	0,8
T_2	4	4	2	3	2	5	10	5	8	5

Литература

1. Мироновский, Л.А. Моделирование линейных систем: Методические указания к выполнению лабораторных работ / С.-Пб.: ГУАП, 2007.
2. Эльсгольц Л.Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Учебник для вузов / С.-Пб.: Изд-во «Лань», 2002.
3. Есипов А.А., Сазонов Л.И., Юдович В.И. Практикум по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Вузовская книга, 2001.
4. Романко В. К. Разностные уравнения: Учебное пособие / -М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.
5. Мироновский Л.А. Моделирование разностных уравнений: Учебное пособие / С.-Пб.: ГУАП, 2004.
6. Мироновский Л.А., Петрова К.Ю. Введение в MATLAB: Учебное пособие / С.-Пб.: ГУАП, 2006.