

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна  
Должность: проректор по учебной работе  
Дата подписания: 31.05.2022 11:12:31  
Уникальный программный ключ:  
0b817ca911e6668abb15a50426d59e5f1c1eabb75e943d14e851fda56d069

## МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники



### «МЕХАНИКА РОБОТОВ»

Методические указания по выполнению практических  
и самостоятельных работ по дисциплине «Механика роботов»

Курск 2017

УДК 621.(076.1)

Составители: Лушников Б.В., Емельянова О.В.

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *Е.Н. Политов*

**Механика роботов:** методические указания по выполнению практических и самостоятельных работ по дисциплине «Механика роботов», / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Яцун С.Ф.; Юго-Зап. гос. ун-т. Курск, 2017. 30 с.

В методическом указании изложены варианты заданий для практических работ, а также вопросы для самостоятельной подготовки и самоконтроля.

Предназначены для студентов направлений направления подготовки «Мехатроника и робототехника» всех форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать *26.12.16*. Формат 60x84 1/16

Усл.печ.л. 1,74. Уч.-изд.л. 0,6 Тираж 20 экз. Заказ .Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

## Содержание

<b>Основные задачи механики роботов .....</b>	<b>4</b>
<b>Основные понятия и определения механики манипуляторов ..</b>	<b>4</b>
<b>Метод матриц в кинематике манипуляторов .....</b>	<b>4</b>
<b>Расширенные матрицы перехода.....</b>	<b>8</b>
<b>Специальные системы координат .....</b>	<b>9</b>
<b>Расширенная матрица перехода для кинематической пары... </b>	<b>10</b>
<b>Прямая задача о положениях.....</b>	<b>14</b>
<b>Обратная задача о положениях. ....</b>	<b>16</b>
<b>Аналитическое решение обратной задачи о положениях для пространственных манипуляторов в матричном виде. ....</b>	<b>19</b>
<b>Численное решение обратной задачи о положениях.....</b>	<b>20</b>
<b>Задания .....</b>	<b>22</b>
<b>Библиографический список .....</b>	<b>30</b>

## Основные задачи механики роботов

При выполнении практических работ необходимо решить задачи кинематики и динамики четырехзвенного пространственного манипулятора с поступательными и вращательными кинематическими парами, которые приходится решать на различных этапах проектирования и при управлении роботами.

## Основные понятия и определения механики манипуляторов

Манипулятором называется техническое устройство, предназначенное для воспроизведения некоторых рабочих функций рук человека. Манипулятором называют также исполнительный механизм промышленного робота, оснащенного приводами и рабочим органом, с помощью которого осуществляется выполнение рабочих функций.

С точки зрения механики манипулятор представляет собой систему твердых и упругих тел, соединенных между собой различными видами связей. С точки зрения теории механизмов манипулятор является пространственным механизмом с несколькими степенями свободы.

В манипуляторе, так же как и в любом механизме, различают входные и выходные звенья. Выходное звено, как правило, в манипуляторе одно – схват, или рабочий орган.

## Метод матриц в кинематике манипуляторов

Матрицы поворота и их свойства.

Пусть твердое тело повернулось на угол  $\varphi$  вокруг оси  $e$ , проходящей через начало координат, причем, если смотреть с вершины оси, поворот совершается против часовой стрелки (рис.1). Если  $\vec{r}(0)$  – радиус-вектор некоторой точки тела до поворота, а  $\vec{r}(\varphi)$  – радиус-вектор той же точки тела после поворота, то, представляя радиус-векторы как столбцовые матрицы, связь между ними можно записать в виде

$$\vec{r}(\varphi) = M(e, \varphi) \vec{r}(0),$$

где  $M(e, \varphi)$  – матрица поворота радиус-вектора вокруг оси  $e$  на угол  $\varphi$ .

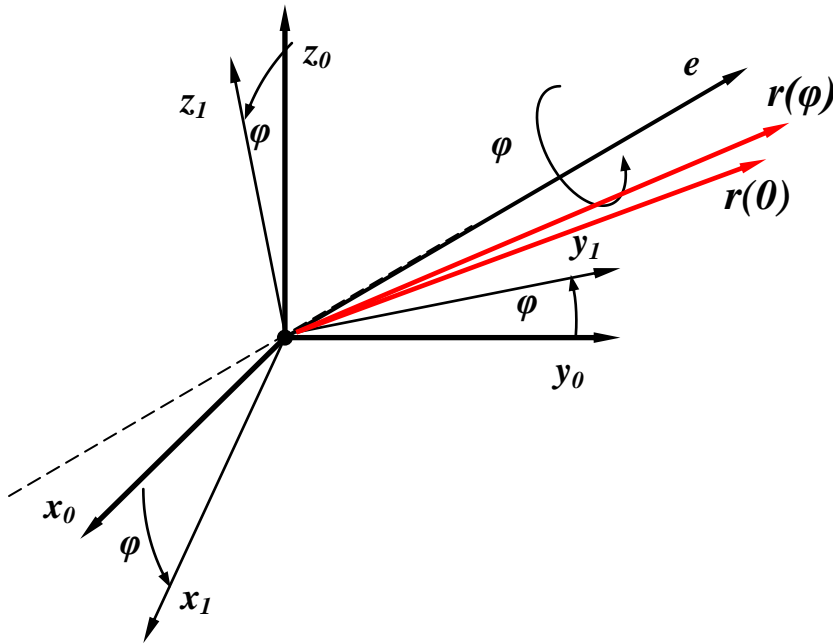


Рис.1

Матрица поворота имеет размер  $3 \times 3$ , а ее элементы представляют собой значения косинусов углов, которые образуют оси координат новой системы с осями координат старой:

$$M(e, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\vec{i}_n, \vec{i}_0) & \cos(\vec{j}_n, \vec{i}_0) & \cos(\vec{k}_n, \vec{i}_0) \\ \cos(\vec{i}_n, \vec{j}_0) & \cos(\vec{j}_n, \vec{j}_0) & \cos(\vec{k}_n, \vec{j}_0) \\ \cos(\vec{i}_n, \vec{k}_0) & \cos(\vec{j}_n, \vec{k}_0) & \cos(\vec{k}_n, \vec{k}_0) \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0$  – единичные векторы осей  $Ox_0, Oy_0, Oz_0$  первоначальной системы соответственно,  $\vec{i}_n, \vec{j}_n, \vec{k}_n$  – осей  $Ox_1, Oy_1, Oz_1$  системы, полученной при повороте.

В частности, матрицы поворотов вокруг координатных осей имеют вид:

-для поворота вокруг оси абсцисс

$$M(\vec{i}, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ (рис.2),}$$

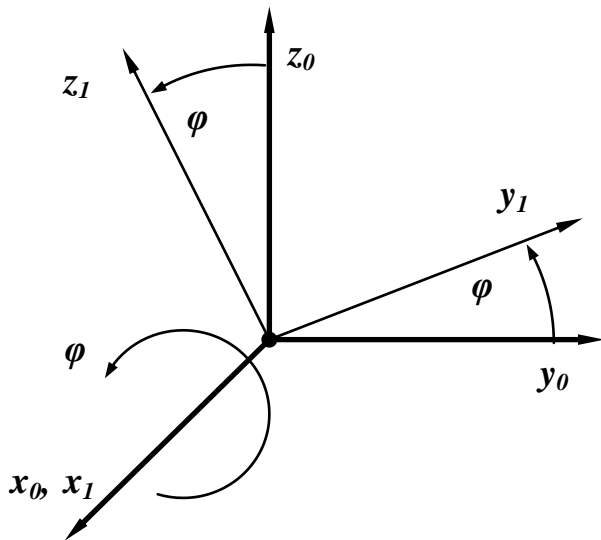


Рис.2

-для поворота вокруг оси ординат

$$M(\vec{j}, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ (рис.3),}$$

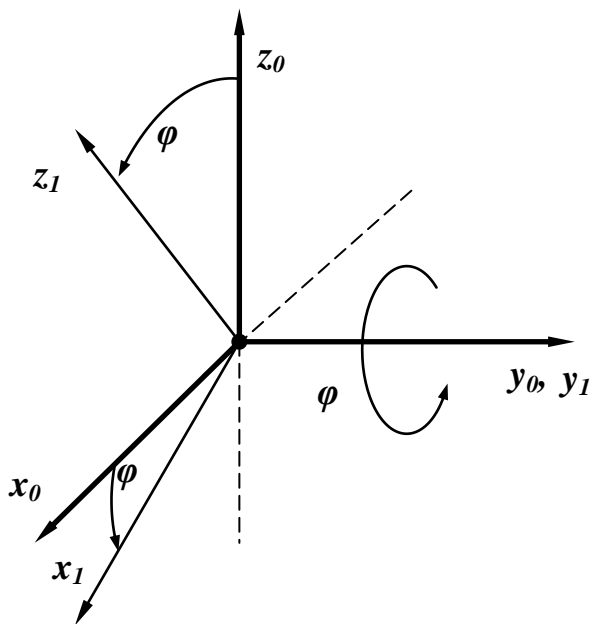


Рис.3

-для поворота вокруг оси аппликат

$$M(\vec{k}, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (рис.4).}$$

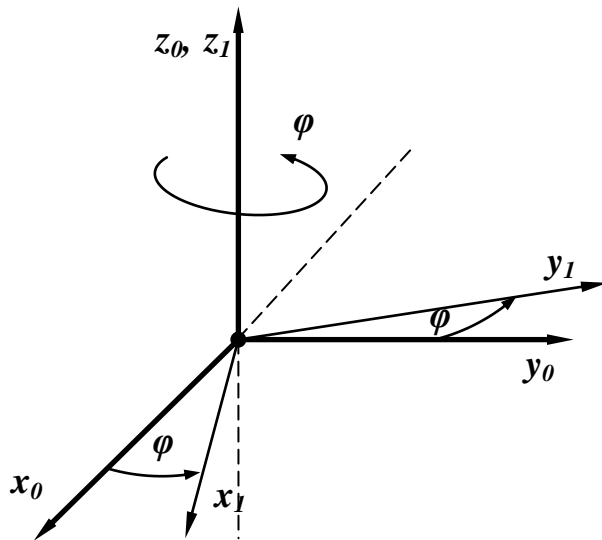


Рис.4

Основные свойства матриц поворота:

1. Матрица, обратная матрице поворота, - тоже матрица поворота вокруг той же оси на тот же угол, но в отрицательном направлении; она получается из матрицы поворота посредством транспонирования.
2. Определитель матрицы поворота равен единице.
3. Произведение матриц поворота есть матрица поворота.
4. Каждый столбец матрицы поворота – это соответствующий орт повернутой системы координат, жестко связанной с вращающимся телом, в проекциях на оси повернутой системы.
5. Каждая строка матрицы поворота – это соответствующий орт неповернутой системы координат в проекциях на оси повернутой системы.
6. Производная от матрицы поворота по углу поворота равна

$$\frac{dM(e, \varphi)}{dt} = \tilde{A}(e)M(e, \varphi) = M(e, \varphi)\tilde{A}(e),$$

где  $\Gamma(e)$  – вспомогательная матрица, зависящая только от положения оси вращения. При дифференцировании матриц поворота вокруг координатных осей вспомогательные матрицы имеют вид:

$$\tilde{A}(\vec{i}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}(\vec{j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}(\vec{k}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Расширенные матрицы перехода

Пусть имеется последовательность систем координат с номерами 0, 1, ..., k-1, k, ..., m. Радиус-вектор некоторой точки будем снабжать нижним индексом – номером системы координат, в которой он задан своими проекциями. Связь между радиус-векторами  $\vec{r}_{k-1}$  и  $\vec{r}_k$ , указывающими на одну и ту же точку, но выходящими из начал двух разных систем координат, определяется соотношением вида

$$\vec{r}_{k-1} = \vec{h}_{k-1,k} + M_{k-1,k} \vec{r}_k,$$

где  $\vec{h}_{k-1,k}$  – вектор смещения начала координат системы k относительно начала координат системы k-1, заданной в системе k-1;  $M_{k-1,k}$  – матрица поворота системы k-1 до совмещения ее осей с осями системы k.

Введем блочные матрицы  $4 \times 4$ , которые будут содержать и матрицу поворота  $M$ , и вектор поступательного перемещения центра координат  $\vec{h}$  следующего вида:

$$B_{k-1,k} = \begin{bmatrix} M_{k-1,k} & \vdots & \vec{h}_{k-1,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix},$$

или

$$B_{k-1,k} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & h_1 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & h_2 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $B$  называется расширенной матрицей перехода, преобразующей координаты точки при переходе их от записи в системе k к записи в системе k-1. Она включает в себя не только поворот, но и сдвиг одной системы относительно другой.

Для возможности такого преобразования введем расширенный вектор  $R_k$  в виде матрицы-столбца размером  $4 \times 1$ , полученный из матрицы-столбца  $\vec{r}_k$  размером  $3 \times 1$  приписыванием еще одного единичного элемента

$$R_k = \begin{bmatrix} \vec{r}_k \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Если система k получается из системы k-1 путем поступательного перемещения (сдвига) системы k-1 вдоль одной из своих осей на расстояние s, то матрицы сдвига относительно каждой из координатных осей будут иметь вид:

$$B_{\vec{i}}(\vec{i}, s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{\vec{j}}(\vec{j}, s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{\vec{k}}(\vec{k}, s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



При повороте  $k$ -1 системы координат вокруг одной из своих осей на угол  $\varphi$  матрицы вращения вокруг соответствующих осей будут иметь вид

$$B_{ad}(\vec{i}, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{ad}(\vec{j}, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_{ad}(\vec{k}, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### Специальные системы координат

Осью вращательной пары  $(i, i+1)$ , составленной из звеньев  $i$  и  $i+1$ , является ось цилиндрического шарнира, жестко связанная со звеном  $i$ , вокруг которой вращается звено  $i+1$ . Осью поступательной пары  $(i, i+1)$  является любая прямая, параллельная вектору скорости поступательного движения звена  $i+1$  относительно звена  $i$ .

Пусть все звенья манипулятора пронумерованы от стойки (звено 0) до схвата (звено  $n$ ). С каждым звеном будем жестко связывать систему координат специальным образом (системы координат Денавита-Хартенберга). Ось  $z_i$  идет по оси кинематической пары  $(i, i+1)$ . Начало координат системы  $i$ , жестко связанной со звеном  $i$ , лежит на общем перпендикуляре к осям  $z_{i-1}$  и  $z_i$ , либо в точке их пересечения, либо в любой точке оси кинематической пары, если ось  $z_i$  совпадает с осью  $z_{i-1}$  или параллельна ей. Ось  $x_i$  идет по общему перпендикуляру, проведенному к осям  $z_{i-1}$  и  $z_i$ , и направлена от точки пересечения этого перпендикуляра с осью  $z_{i-1}$  к точке его пересечения с осью  $z_i$ . Ось  $x_i$  также может быть направлена в любую сторону по нормали к плоскости, содержащей оси  $z_{i-1}$  и  $z_i$  (если они пересекаются), или произвольным способом, если  $z_{i-1}$  и  $z_i$  идут по одной прямой. Ось  $y_i$  выбирается по правилу правой тройки векторов.

Начало координат системы 0, жестко связанной со стойкой, может лежать в любой точке соответствующей оси, ось  $x_0$  направляется произвольным образом. Для выбора системы  $n$ , поскольку отсутствует  $(n+1)$  звено, предлагается вообразить любого типа пару  $(n, n+1)$  и после этого выбрать систему по общему правилу. Начало выбранной таким образом системы называется центром схвата.

### Расширенная матрица перехода для кинематической пары.

Специальный выбор систем координат звеньев манипулятора позволяет с помощью лишь четырех параметров (а не шести, как в общем случае) описать переход из одной системы в другую.

Систему  $i-1$  можно преобразовать в систему  $i$  с помощью четырех преобразований, выполняемых в следующем порядке:

- 1) Поворот системы  $i-1$  вокруг оси  $z_{i-1}$  на угол  $\theta_i$  до тех пор, пока ось  $x_{i-1}$  не станет параллельной оси  $x_i$ .
- 2) Сдвиг повернутой системы вдоль оси  $z_{i-1}$  на величину  $s_i$  до тех пор, пока оси  $x_{i-1}$  и  $x_i$  не окажутся на одной прямой.
- 3) Сдвиг вдоль оси  $x_i$  на величину  $a_i$  до тех пор, пока не совпадут начала координат.
- 4) Поворот вокруг оси  $x_i$  на угол  $\alpha_i$  до совмещения оси  $z_{i-1}$  с осью  $z_i$ .

Каждому из этих элементарных движений соответствует одна из В-матриц: матрица вращения либо матрица сдвига. Результирующая матрица перехода, связывающая системы  $i-1$  и  $i$ , является произведением матриц:

$$A_{i-1,i} = B_{\vec{a}\vec{o}}(\vec{k}, \theta_i) B_{\vec{n}\vec{a}}(\vec{k}, s_i) B_{\vec{n}\vec{a}}(\vec{i}, a_i) B_{\vec{a}\vec{o}}(\vec{i}, \alpha_i).$$

С учетом выражений для матриц после их перемножения получаем расширенную матрицу перехода для кинематической пары:

$$A_{i-1,i} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

С помощью матрицы перехода радиус-векторы одной и той же точки в системах координат могут быть связаны соотношением

$$R_{i-1} = A_{i-1,i} R_i,$$

где  $R_i = [x_i, y_i, z_i, 1]^T$  – матрица-столбец, определяющая положение произвольной точки звена  $i$  в системе отсчета, жестко связанной с этим звеном;  $R_{i-1} = [x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}, 1]^T$  – матрица-столбец, определяющая положение той же самой точки в системе, жестко связанной со звеном  $i-1$ .

В матрицу  $A_{i-1,i}$  входят четыре параметра:  $\theta_i$ ,  $s_i$ ,  $a_i$ ,  $\alpha_i$ . Для любой кинематической пары три из них должны быть постоянными, и только один – переменной величиной, причем, согласно выбору координатных осей в системах координат звеньев манипуляторов, для вращательной пары переменной величиной будет угол поворота вокруг оси  $z_{i-1}$  –  $\theta_i$ , для поступательной – перемещение  $s_i$  вдоль оси  $z_{i-1}$ .

$$B_{\vec{n}\vec{a}}(\vec{k}, s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### Пример 1.

Составить таблицу кинематических пар и параметров, а также вычислить матрицы переходов для манипулятора, кинематическая схема которого изображена на рис.1.

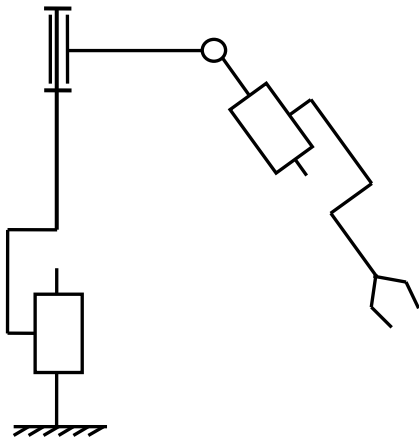


Рис.1.

### Решение.

Специальные системы координат выбираем в соответствии с указаниями. Вначале выбираем оси  $z_i$ . Ось  $z_0$  идет по оси поступательной пары (0,1). Ось  $z_1$  идет по оси вращательной пары (1,2), ось  $z_2$  – по оси вращательной пары (2,3). Ось  $z_3$  направлена по оси поступательной пары (3,4). Ось  $z_4$  связываем со схватом и направляем перпендикулярно плоскости схвата. Заметим, что, поскольку оси первой и второй пар совпадают, то оси  $z_0$  и  $z_1$  также направлены вдоль одной прямой (рис.2).

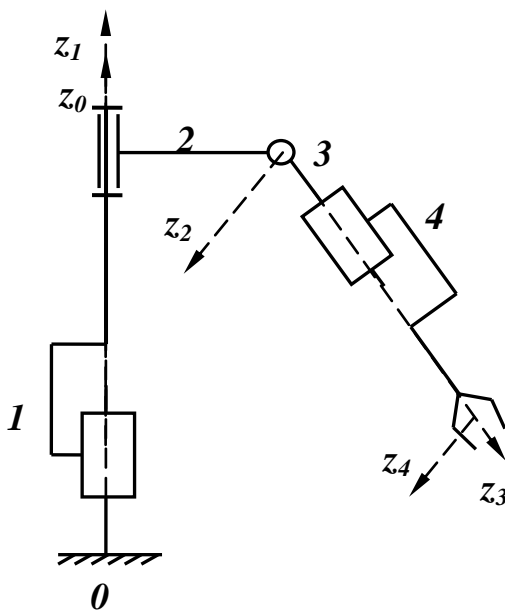


Рис.2.

Выбор осей  $x_i$  показан на рис.3. Ось  $x_0$  связываем с неподвижной стойкой, ось  $x_1$  – с подвижным звеном 1, оси  $x_0$  и  $x_1$  проводим параллельно друг другу. Ось  $x_2$ , поскольку оси  $z_1$  и  $z_2$  являются скрещивающимися, проводим по общему перпендикуляру к ним. Оси  $x_1$  и  $x_2$  совпадают. Ось  $x_3$  проводим перпендикулярно к осям  $z_2$  и  $z_3$  через точку их пересечения, аналогично проводим ось  $x_4$  через точку пересечения  $z_3$  и  $z_4$ . В точке пересечения осей для каждой из пар помещаем соответствующее начало координат. Сразу же заметим, что оси  $y_i$  на схеме мы показывать не будем в силу того, что для

составления таблицы кинематических пар и параметров матриц перехода достаточно знать положения осей  $x_i$  и  $z_i$ .

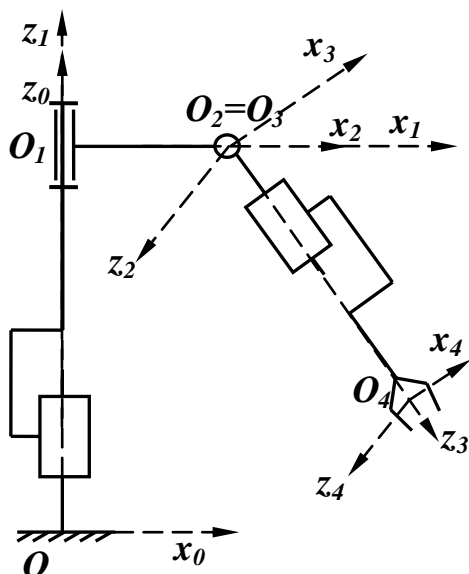


Рис.3.

Составим таблицу кинематических пар и параметров преобразования систем координат для манипулятора (см. таблицу 1). Подобные таблицы исчерпывающе описывают кинематические схемы манипуляторов и являются входной информацией для кинематического расчета на ЭВМ.

Системы координат	параметры			
	$\theta$	$s$	$a$	$\alpha$
01	0	$S_1(t)$	0	0
12	$\Theta_2(t)$	0	$a_2$	$\pi/2$
23	$\Theta_3(t)$	0	0	$\pi/2$
34	0	$S_4(t)$	0	$-\pi/2$

Заполнять таблицу удобно по строкам для перехода между системами координат в каждой кинематической паре. Для этого каждую систему координат, начиная со стойки, мысленно преобразуем строго в том же порядке, который указан выше при нахождении матрицы перехода, в следующую по порядку систему. Схема для определения параметров показана на рис.4.

В нашем случае, допустим, переход от 0 системы к системе 1 проходит следующим образом. 1) Поворота вокруг оси  $z_0$  не происходит, т.к. оси  $x_0$  и  $x_1$  параллельны. Т.е.,  $\theta_1=0$ . 2) Сдвигом вдоль  $z_0$  на  $s_1(t)$  совмещаем оси  $x_0$  и  $x_1$ . Тогда, как можно увидеть на схеме, оси  $z_0$  и  $z_1$  также совпадают, поэтому два последних элемента равны нулю.

Для второй строки совмещаем систему 1 с системой 2. 1) Поворот вокруг оси  $z_1$  на схеме указан  $-\theta_2(t)$  (в данном случае оси  $x_1$  и  $x_2$  направлены вдоль одной прямой только в силу того, что второе звено расположено в плоскости рисунка). 2) Переноса вдоль  $z_1$  нет, поэтому  $s_2=0$ . 3) Переносим систему  $O_1z_1x_1$  вдоль оси  $x_1$  на расстояние  $a_2$  до совмещения начал координат. 4) Совмещаем поворотом на  $90^\circ$  против часовой стрелке оси  $z_1$  и  $z_2$ .

Аналогично заполняем третью и четвертую строки.

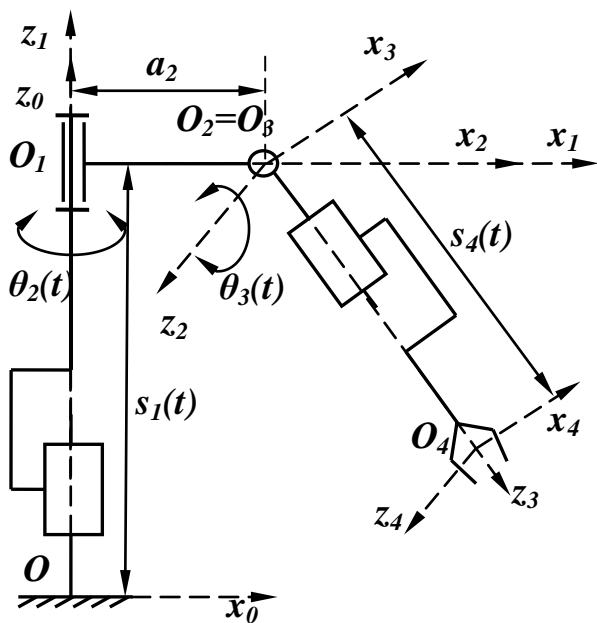


Рис.4.

Матрицы переходов между системами координат с учетом значений параметров имеют вид:

$$T_{01} = \begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \cos 0 & \sin 0 \sin 0 & 0 \cos 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \cos 0 & -\cos 0 \sin 0 & 0 \sin 0 \\ 0 & \sin 0 & \cos 0 & s_1(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_1(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$T_{12} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2(t) & -\sin \theta_2(t) \cos \frac{\pi}{2} & \sin \theta_2(t) \sin \frac{\pi}{2} & a_2 \cos \theta_2(t) \\ \sin \theta_2(t) & \cos \theta_2(t) \cos \frac{\pi}{2} & -\cos \theta_2(t) \sin \frac{\pi}{2} & a_2 \sin \theta_2(t) \\ 0 & \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_2(t) & 0 & \sin \theta_2(t) & a_2 \cos \theta_2(t) \\ \sin \theta_2(t) & 0 & -\cos \theta_2(t) & a_2 \sin \theta_2(t) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{23} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3(t) & -\sin \theta_3(t) \cos \frac{\pi}{2} & \sin \theta_3(t) \sin \frac{\pi}{2} & 0 \cos \theta_3(t) \\ \sin \theta_3(t) & \cos \theta_3(t) \cos \frac{\pi}{2} & -\cos \theta_3(t) \sin \frac{\pi}{2} & 0 \sin \theta_3(t) \\ 0 & \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =.$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_3(t) & 0 & \sin \theta_3(t) & 0 \\ \sin \theta_3(t) & 0 & -\cos \theta_3(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
T_{34} &= \begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \sin 0 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 \cos 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\cos 0 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 \sin 0 \\ 0 & \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & s_4(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & s_4(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \blacktriangle
\end{aligned}$$

### Прямая задача о положениях.

Формулировка: задана кинематическая схема манипулятора и в некоторый момент времени известны значения обобщенных координат, определяющие положение всех звеньев манипулятора друг относительно друга. Требуется определить положение и ориентацию последнего звена манипулятора (схвата) в системе отсчета, связанной со стойкой. Геометрические размеры звеньев считаются известными.

Математически координаты схвата в начальной системе отсчета будут определяться при помощи формулы

$$R_0 = T_{0n} R_n,$$

где  $R_0, R_n$  – матрицы-столбцы размером  $4 \times 1$ , соответствующие координатам произвольной точки схвата соответственно в системах 0 и n, а  $T_{0n}$  – расширенная матрица перехода от начальной системы координат к конечной, являющаяся произведением матриц последовательных переходов:

$$T_{0n} = T_{01} T_{12} \dots T_{n-1n}.$$

Матрица перехода  $T_{0n}$  также имеет блочный вид, причем девять ее элементов представляют собой направляющие косинусы осей системы координат, связанной со схватом, в системе координат стойки, а первые три элемента четвертого столбца являются координатами центра схвата также в системе координат стойки:

$$T_{0n} = \begin{bmatrix} \cos(\vec{i}_n, \vec{i}_0) & \cos(\vec{j}_n, \vec{i}_0) & \cos(\vec{k}_n, \vec{i}_0) & x^n \\ \cos(\vec{i}_n, \vec{j}_0) & \cos(\vec{j}_n, \vec{j}_0) & \cos(\vec{k}_n, \vec{j}_0) & y^n \\ \cos(\vec{i}_n, \vec{k}_0) & \cos(\vec{j}_n, \vec{k}_0) & \cos(\vec{k}_n, \vec{k}_0) & z^n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, решение прямой задачи кинематики сводится к тому, что, задавшись значениями обобщенных координат, вычисляются значения элементов расширенной матрицы перехода; а, следовательно, определяются положение и ориентация схвата в системе координат, жестко связанной со стойкой манипулятора.

Если требуется определить положение и ориентацию в системе координат стойки не схвата, а некоторого промежуточного  $i$ -го звена, то матрица перехода будет последовательным произведением матриц переходов в кинематических парах вплоть до  $i$ -го звена, т.е.,

$$T_{0i} = T_{01}T_{12}\dots T_{i-1i},$$

а для определения положения и ориентации  $i$ -го звена по отношению к  $j$ -му – произведением всех промежуточных матриц переходов между звеньями:

$$T_{ji} = T_{jj+1}T_{j+1j+2}\dots T_{i-1i}.$$

**Пример 2.**

Определить положение и ориентацию схвата манипулятора, изображенного на рис.1 (пример 1).

**Решение.**

В рассмотренном примере требуется найти произведение матриц

$$T_{04} = T_{01}T_{12}T_{23}T_{34}.$$

Перемножим матрицы. Заметим, что операция умножения матриц некоммутативна.

$$\begin{aligned}
 T_{02} = T_{01}T_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_1(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2(t) & 0 & \sin \theta_2(t) & a_2 \cos \theta_2(t) \\ \sin \theta_2(t) & 0 & -\cos \theta_2(t) & a_2 \sin \theta_2(t) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2(t) & 0 & \sin \theta_2(t) & a_2 \cos \theta_2(t) \\ \sin \theta_2(t) & 0 & -\cos \theta_2(t) & a_2 \sin \theta_2(t) \\ 0 & 1 & 0 & s_1(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \\
 T_{24} = T_{23}T_{34} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_3(t) & 0 & \sin \theta_3(t) & 0 \\ \sin \theta_3(t) & 0 & -\cos \theta_3(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & s_4(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_3(t) & -\sin \theta_3(t) & 0 & s_4(t) \sin \theta_3(t) \\ \sin \theta_3(t) & \cos \theta_3(t) & 0 & -s_4(t) \cos \theta_3(t) \\ 0 & 0 & 1 & s_4(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$T_{04} = T_{02}T_{24} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2(t) & 0 & \sin \theta_2(t) & a_2 \cos \theta_2(t) \\ \sin \theta_2(t) & 0 & -\cos \theta_2(t) & a_2 \sin \theta_2(t) \\ 0 & 1 & 0 & s_1(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_3(t) & -\sin \theta_3(t) & 0 & s_4(t) \sin \theta_3(t) \\ \sin \theta_3(t) & \cos \theta_3(t) & 0 & -s_4(t) \cos \theta_3(t) \\ 0 & 0 & 1 & s_4(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_2(t) \cos \theta_3(t) & -\cos \theta_2(t) \sin \theta_3(t) & \sin \theta_2(t) & s_4(t) \cos \theta_2(t) \sin \theta_3(t) + s_4(t) \sin \theta_2(t) + a_2 \cos \theta_2(t) \\ \sin \theta_2(t) \cos \theta_3(t) & -\sin \theta_2(t) \sin \theta_3(t) & -\cos \theta_2(t) & s_4(t) \sin \theta_3(t) \sin \theta_2(t) - s_4(t) \cos \theta_2(t) + a_2 \sin \theta_2(t) \\ \sin \theta_3(t) & \cos \theta_3(t) & 0 & -s_4(t) \cos \theta_3(t) + s_1(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Получаем следующие значения направляющих косинусов:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{i}_n, \vec{i}_0) &= \cos \theta_2(t) \cos \theta_3(t), & \cos(\vec{j}_n, \vec{i}_0) &= -\cos \theta_2(t) \sin \theta_3(t), & \cos(\vec{k}_n, \vec{i}_0) &= \sin \theta_2(t), \\ \cos(\vec{i}_n, \vec{j}_0) &= \sin \theta_2(t) \cos \theta_3(t), & \cos(\vec{j}_n, \vec{j}_0) &= -\sin \theta_2(t) \sin \theta_3(t), & \cos(\vec{k}_n, \vec{j}_0) &= -\cos \theta_2(t), \\ \cos(\vec{i}_n, \vec{k}_0) &= \sin \theta_3(t), & \cos(\vec{j}_n, \vec{k}_0) &= \cos \theta_3(t), & \cos(\vec{k}_n, \vec{k}_0) &= 0; \end{aligned}$$

и следующие величины координат центра схвата:

$$\begin{aligned} x^n &= s_4(t) \cos \theta_2(t) \sin \theta_3(t) + s_4(t) \sin \theta_2(t) + a_2 \cos \theta_2(t). \\ y^n &= s_4(t) \sin \theta_3(t) \sin \theta_2(t) - s_4(t) \cos \theta_2(t) + a_2 \sin \theta_2(t). \\ z^n &= -s_4(t) \cos \theta_3(t) + s_1(t). \end{aligned}$$

Заметим, что, поскольку все три оси, связанные со схватом, образуют правую систему координат, то достаточно знать направляющие косинусы двух осей, например,  $x_4$  и  $z_4$ , т.к. положение этих осей в пространстве уже определяет положение оси  $y_4$ . Таким образом, количество направляющих косинусов сокращается до шести:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{i}_n, \vec{i}_0) &= \cos \theta_2(t) \cos \theta_3(t), & \cos(\vec{j}_n, \vec{i}_0) &= -\cos \theta_2(t) \sin \theta_3(t), & \cos(\vec{k}_n, \vec{i}_0) &= \sin \theta_2(t), \\ \cos(\vec{i}_n, \vec{k}_0) &= \sin \theta_3(t), & \cos(\vec{j}_n, \vec{k}_0) &= \cos \theta_3(t), & \cos(\vec{k}_n, \vec{k}_0) &= 0. \end{aligned}$$

Однако независимыми из них являются только три. Достаточно взять косинусы следующих углов: между одноименными осями  $z_4$  и  $z_0$  ( $\cos(\vec{k}_n, \vec{k}_0)$ , можно сравнить с эйлеровским углом нутации), между осями  $z_4$  и  $x_4$  и между осями  $x_4$  и  $x_0$ . Тогда получаем три выражения, определяющие углы:

$$\cos(\vec{i}_n, \vec{i}_0) = \cos \theta_2(t) \cos \theta_3(t), \quad \cos(\vec{k}_n, \vec{i}_0) = \sin \theta_2(t), \quad \cos(\vec{k}_n, \vec{k}_0) = 0. \blacktriangle$$

### Обратная задача о положениях.

Формулировка: задана кинематическая схема манипулятора и известны положение и ориентация схвата в системе координат стойки. Требуется определить значения обобщенных координат, которые обеспечат заданное положение схвата.

Положение схвата как твердого тела задается с помощью шести величин. Обычно это: три координаты центра схвата, два направляющих косинуса одной из координатных осей и еще один из направляющих косинусов второй оси. Например, этими шестью величинами могут быть шесть наддиагональных элементов матрицы  $T_{0n}$ :



$$T_{0n} = \begin{bmatrix} \bullet & (t_{0n})_{12} & (t_{0n})_{13} & (t_{0n})_{14} \\ \bullet & \bullet & (t_{0n})_{23} & (t_{0n})_{24} \\ \bullet & \bullet & \bullet & (t_{0n})_{34} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}.$$

Приравнивая заданные величины соответствующим элементам матрицы  $T_{0n}$ , получим систему шести в общем случае трансцендентных уравнений относительно неизвестных обобщенных координат.

Если число неизвестных  $n=6$ , то система данных уравнений будет иметь единственное решение, и необходимые значения обобщенных координат можно найти.

Если манипулятор имеет более шести степеней свободы, то числа неизвестных будет превышать число уравнений, и одному и тому же положению схвата могут соответствовать различные наборы значений обобщенных координат.

Если число степеней свободы меньше шести, то любые наперед заданные произвольные положение и ориентацию схвата при таком количестве обобщенных координат получить нельзя. Однако, если требуется только попадание центра схвата в точку пространства без учета его ориентации, то для этого может быть использован манипулятор с тремя степенями свободы. Для решения задачи в таком случае потребуется составить три уравнения для определения трех неизвестных.

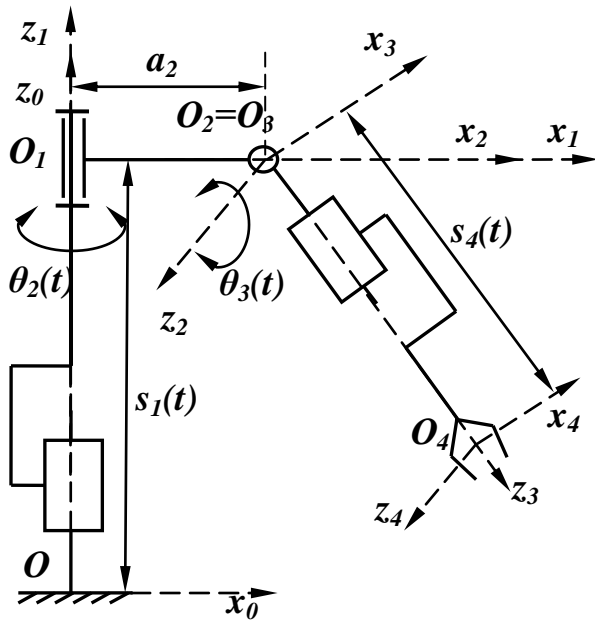
### Пример 3.

Задан  $\vec{r}^*(x^*, y^*, z^*)$  – радиус-вектор центра схвата манипулятора, изображенного на рис.1 (примеры 1,2), в системе, связанной со стойкой. Требуется определить значения обобщенных координат, соответствующих заданному положению центра схвата.

### Решение.

Рассматриваемый манипулятор имеет четыре степени свободы, поэтому положений, при которых центр схвата будет находиться в конкретной заданной точке, бесконечно много. Поэтому для определенности следует задать значение одной из обобщенных координат или значение одного направляющего косинуса для системы координат схвата. Выше мы отметили, что ориентация схвата описывается тремя выражениями:

$$\cos(\vec{i}_n, \vec{i}_0) = \cos \theta_2(t) \cos \theta_3(t), \quad \cos(\vec{k}_n, \vec{i}_0) = \sin \theta_2(t), \quad \cos(\vec{k}_n, \vec{k}_0) = 0.$$



Третье равенство служит очевидным уравнением связи, которая выражается в том, что ось схвата  $z_4$  всегда будет находиться в горизонтальной плоскости, перпендикулярно оси  $z_0$ . Уравнением связи также является выражение для первого косинуса.

Пусть в некоторый момент времени задано значение угла

$$\cos(\vec{k}_n, \vec{i}_0) = \sin \theta_2(t) = \alpha_{13}.$$

Тогда

$$\cos \theta_2(t) = \sqrt{1 - \alpha_{13}^2}.$$

Для центра схвата имеем уравнения:

$$x^* = s_4(t) \sqrt{1 - \alpha_{13}^2} \sin \theta_3(t) + s_4(t) \alpha_{13} + a_2 \sqrt{1 - \alpha_{13}^2}.$$

$$y^* = s_4(t) \sin \theta_3(t) \alpha_{13} - s_4(t) \sqrt{1 - \alpha_{13}^2} + a_2 \alpha_{13}.$$

$$z^* = -s_4(t) \cos \theta_3(t) + s_1(t).$$

Выражаем из первого и второго уравнений  $\sin \theta_3(t)$  и приравниваем оба значения:

$$\sin \theta_3(t) = \frac{x^* - s_4(t) \alpha_{13} - a_2 \sqrt{1 - \alpha_{13}^2}}{s_4(t) \sqrt{1 - \alpha_{13}^2}} = \frac{y^* + s_4(t) \sqrt{1 - \alpha_{13}^2} - a_2 \alpha_{13}}{s_4(t) \alpha_{13}}.$$

Отсюда

$$s_4(t) = x^* \alpha_{13} - y^* \sqrt{1 - \alpha_{13}^2}.$$

Тогда

$$\sin \theta_3(t) = \frac{x^* (1 - \alpha_{13}^2) + y^* \sqrt{1 - \alpha_{13}^2} \alpha_{13} - a_2 \sqrt{1 - \alpha_{13}^2}}{(x^* \alpha_{13} - y^* \sqrt{1 - \alpha_{13}^2}) \sqrt{1 - \alpha_{13}^2}} = \frac{x^* \sqrt{1 - \alpha_{13}^2} + y^* \alpha_{13} - a_2}{x^* \alpha_{13} - y^* \sqrt{1 - \alpha_{13}^2}}$$

или

$$\theta_3(t) = \arcsin \frac{x^* \sqrt{1 - \alpha_{13}^2} + y^* \alpha_{13} - a_2}{x^* \alpha_{13} - y^* \sqrt{1 - \alpha_{13}^2}}.$$

Из уравнения для третьей координаты получаем

$$s_1(t) = z^* + s_4(t) \cos \theta_3(t). \blacktriangle$$

### **Аналитическое решение обратной задачи о положениях для пространственных манипуляторов в матричном виде.**

Решения обратных задач о положениях манипуляторов в явном виде имеют существенное значение как для проектирования, так и для управления. При проектировании такие решения позволяют исследовать влияние конструктивных параметров на процесс движения. При управлении результаты таких решений позволяют построить быстродействующие алгоритмы управления.

Сложность задачи о положениях связана с ее нелинейностью, поэтому построить точное решение не всегда можно, опираясь на уравнения решения прямой задачи, особенно если количество степеней свободы превышает четыре.

Алгоритм решения задачи методом матриц таков.

Пусть считается известным положение схвата в пространстве, т.е., можно записать матрицу связи между системами координат стойки и схвата

$$T_{0n} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

С другой стороны, используя матрицы перехода между системами координат соседних звеньев, можно записать, что

$$T_{0n} = T_{01} T_{12} T_{23} \dots T_{n-2n-1} T_{n-1n}.$$

Чтобы в уравнениях для определения обобщенных координат можно было сразу явно выразить одну координату, умножим данное матричное равенство слева на матрицу  $T_{10}$ , обратную матрице  $T_{01}$ . Получим

$$T_{10} T_{0n} = T_{10} T_{01} T_{12} T_{23} \dots T_{n-2n-1} T_{n-1n}.$$

Но произведение двух взаимобратных матриц равно единичной матрице, поэтому приходим к равенству

$$T_{10} T_{0n} = T_{12} T_{23} \dots T_{n-2n-1} T_{n-1n}.$$

Приравнявая соответствующие элементы матричных произведений, стоящих в левой и правой частях равенства, получаем систему уравнений, разрешенную относительно первой обобщенной координаты.

Аналогично, умножая обе части исходного матричного равенства справа на матрицу  $T_{nn-1}$ , обратную для  $T_{n-1n}$ , придем к системе уравнений, разрешенной относительно  $n$ -й обобщенной координаты.

### Численное решение обратной задачи о положениях.

Не всегда обратную задачу о положениях удастся решить аналитически. Рассмотрим простейший алгоритм численного решения системы трансцендентных уравнений.

Пусть манипулятор обладает шестью степенями свободы. Обозначим обобщенные координаты через  $q_1, q_2, \dots, q_6$ . Заданными будем считать шесть наддиагональных элементов матрицы  $T_{06}$ :

$$T_{06} = \begin{bmatrix} \bullet & (t_{06})_{12} & (t_{06})_{13} & (t_{06})_{14} \\ \bullet & \bullet & (t_{06})_{23} & (t_{06})_{24} \\ \bullet & \bullet & \bullet & (t_{06})_{34} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}.$$

В нулевом приближении дадим обобщенным координатам произвольные начальные приближения  $q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \dots, q_6^{(0)}$ . Следующее приближение получим из разложения элементов матрицы  $T_{06}$  в ряд Тейлора, ограниченного линейными членами:

$$T_{06} = T_{06}^{(0)} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial T_{06}^{(0)}}{\partial q_j} (q_j^{(1)} - q_j^{(0)}).$$

Здесь  $T_{06}^{(0)}$  – матрица  $T_{06}$ , элементы которой выражены через начальные приближения обобщенных координат,  $\frac{\partial T_{06}^{(0)}}{\partial q_j}$  – значения частных производных по обобщенным координатам матрицы  $T_{06}$  в точке начального приближения.

Остановимся на процедуре нахождения частных производных по обобщенным координатам. Матрица  $T_{06}$  представляет собой произведение шести матриц, каждая из которых зависит только от одной обобщенной координаты

$$T_{06} = T_{01}(q_1)T_{12}(q_2) \dots T_{56}(q_6).$$

В силу этого получаем, что частные производные по отдельным координатам равны

$$\frac{\partial T_{06}}{\partial q_1} = \frac{\partial T_{01}(q_1)}{\partial q_1} T_{12}(q_2) \dots T_{56}(q_6),$$

$$\frac{\partial T_{06}}{\partial q_2} = T_{01}(q_1) \frac{\partial T_{12}(q_2)}{\partial q_2} T_{23}(q_3) \dots T_{56}(q_6),$$

.....

$$\frac{\partial T_{06}}{\partial q_6} = T_{01}(q_1) T_{12}(q_2) \dots \frac{\partial T_{56}(q_6)}{\partial q_6}.$$

Для производной матрицы перехода в отдельной кинематической паре между  $j-1$  и  $j$  звеньями справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial T_{j-1j}(q_j)}{\partial q_j} = \Omega_{\dot{a}\ddot{a}} T_{j-1j}(q_j),$$

если пара – вращательная,

$$\frac{\partial T_{j-1j}(q_j)}{\partial q_j} = \Omega_{\ddot{n}\dot{a}} T_{j-1j}(q_j),$$

если пара – поступательная.

Здесь

$$\Omega_{\dot{a}\ddot{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_{\ddot{n}\dot{a}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Пример.** Определить частные производные для матрицы  $T_{04} = T_{01}T_{12}T_{23}T_{34}$  из примеров 1, 2.

**Решение:**

В данном примере матрицы  $T_{01}, T_{34}$  являются матрицами переходов в поступательных парах, а  $T_{12}, T_{23}$  – матрицами переходов во вращательных парах, поэтому

$$\frac{\partial T_{04}}{\partial s_1} = \frac{\partial T_{01}(s_1)}{\partial s_1} T_{12}(\theta_2) T_{23}(\theta_3) T_{34}(s_4) = \Omega_{\dot{n}\ddot{a}} T_{01}(s_1) T_{12}(\theta_2) T_{23}(\theta_3) T_{34}(s_4),$$

$$\frac{\partial T_{04}}{\partial \theta_2} = T_{01}(s_1) \frac{\partial T_{12}(\theta_2)}{\partial \theta_2} T_{23}(\theta_3) T_{34}(s_4) = T_{01}(s_1) \Omega_{\dot{a}\ddot{a}} T_{12}(\theta_2) T_{23}(\theta_3) T_{34}(s_4),$$

$$\frac{\partial T_{04}}{\partial \theta_3} = T_{01}(s_1) T_{12}(\theta_2) \frac{\partial T_{23}(\theta_3)}{\partial \theta_3} T_{34}(s_4) = T_{01}(s_1) T_{12}(\theta_2) \Omega_{\dot{a}\ddot{a}} T_{23}(\theta_3) T_{34}(s_4),$$

$$\frac{\partial T_{04}}{\partial s_4} = T_{01}(s_1) T_{12}(\theta_2) T_{23}(\theta_3) \frac{\partial T_{34}(s_4)}{\partial s_4} = T_{01}(s_1) T_{12}(\theta_2) T_{23}(\theta_3) \Omega_{\dot{n}\ddot{a}} T_{34}(s_4).$$

Перемножая, получаем следующие матрицы частных производных:

$$\frac{\partial T_{04}}{\partial s_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial T_{04}}{\partial \theta_2} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_2 \cos \theta_3 & \sin \theta_2 \sin \theta_3 & \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \sin \theta_3 \cdot s_4 - a_2 \sin \theta_2 \\ \cos \theta_2 \cos \theta_3 & -\cos \theta_2 \sin \theta_3 & \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cdot s_4 + a_2 \cos \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial T_{04}}{\partial \theta_3} = \begin{bmatrix} -\cos \theta_2 \sin \theta_3 & -\cos \theta_2 \cos \theta_3 & 0 & \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cdot s_4 \\ -\sin \theta_2 \sin \theta_3 & -\sin \theta_2 \cos \theta_3 & 0 & \sin \theta_2 \cos \theta_3 \cdot s_4 \\ \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & \sin \theta_3 \cdot s_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial T_{04}}{\partial s_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cos \theta_2 \sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta_2 \sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \blacktriangle$$

### Задания.

#### Задача 1: Специальные системы координат.

Для указанной на рисунке схемы манипулятора требуется:

1. Пронумеровать звенья и показать на схеме системы координат  $O_i x_i y_i z_i$ , связанные со звеньями. Выбор осей систем координат провести в соответствии с правилом Денавита-Хартенберга.
2. Составить таблицу перехода между системами координат.
3. Записать расширенные матрицы перехода между системами координат.
4. Найти координаты схвата и направляющие косинусы осей системы координат схвата в глобальной неподвижной системе координат основания.

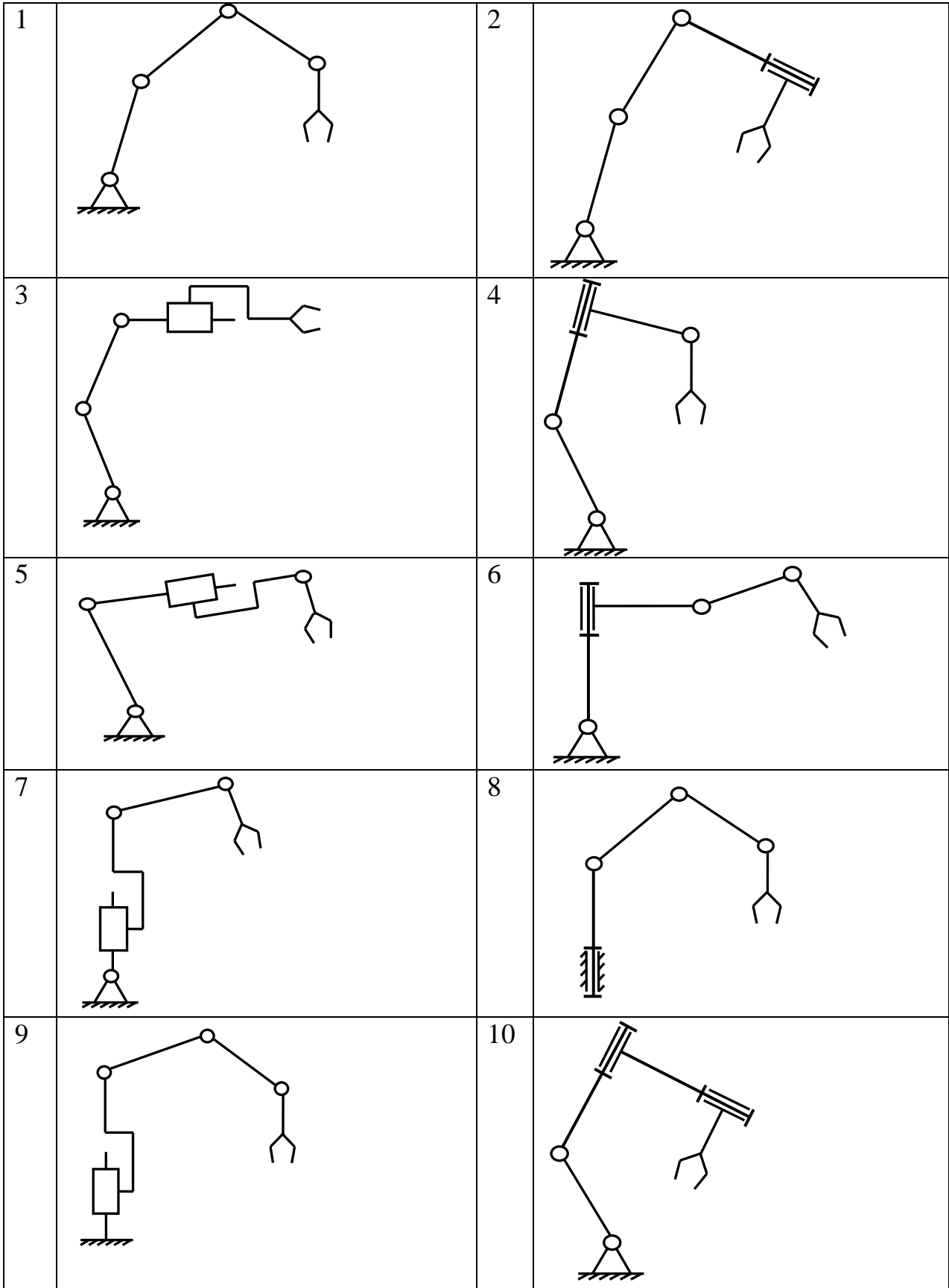
#### Задача 2: Прямая задача о положениях манипулятора с тремя звеньями.

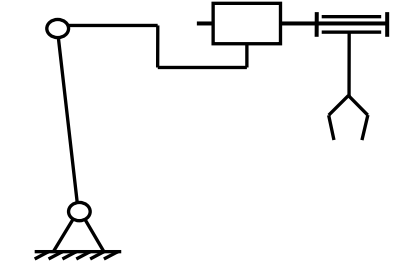
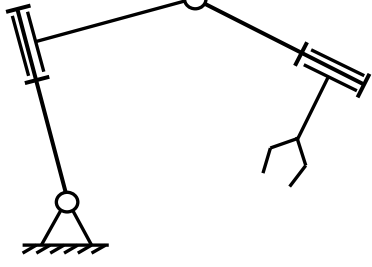
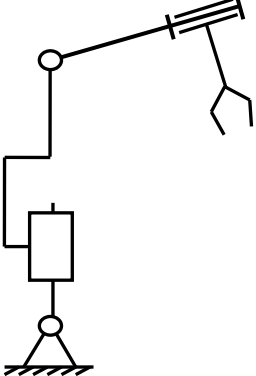
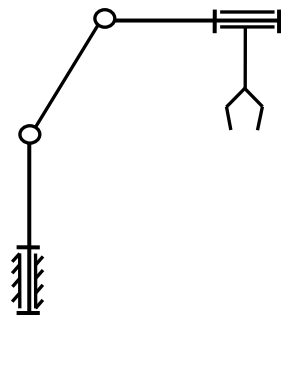
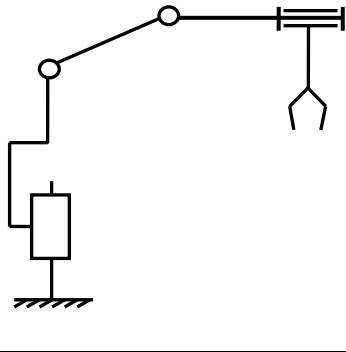
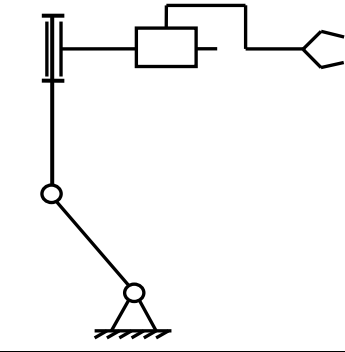
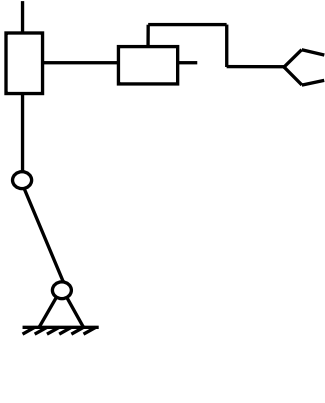
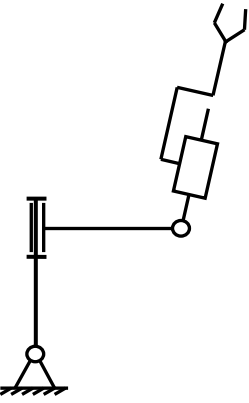
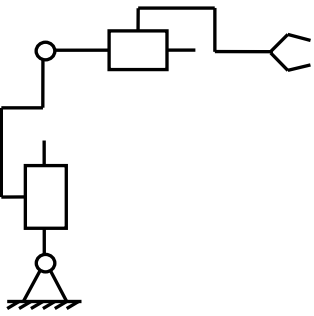
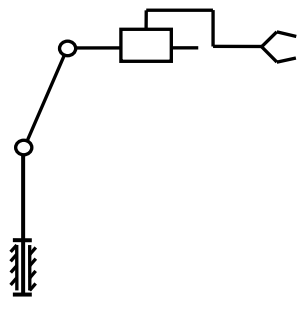
Для заданной схемы требуется

1. Записать координаты схвата и направляющие косинусы осей системы координат схвата в глобальной неподвижной системе координат основания, принимая следующие законы изменения обобщенных координат:

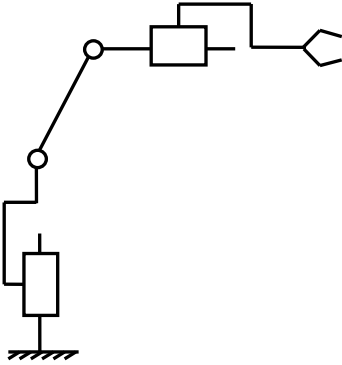
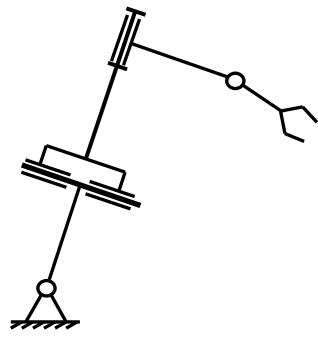
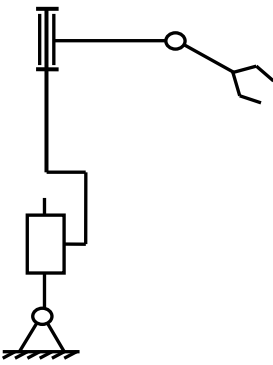
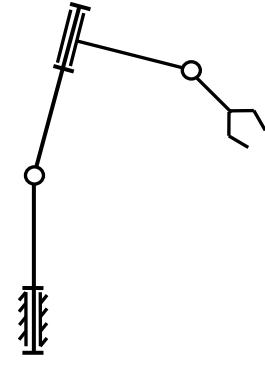
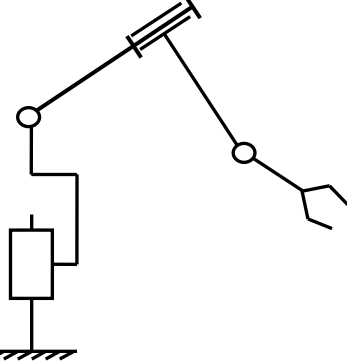
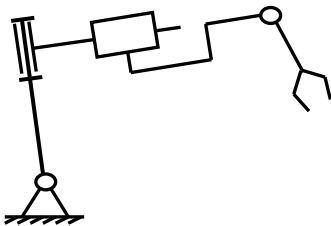
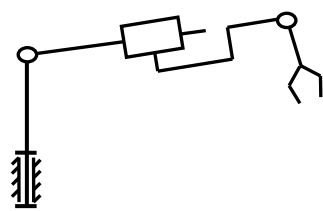
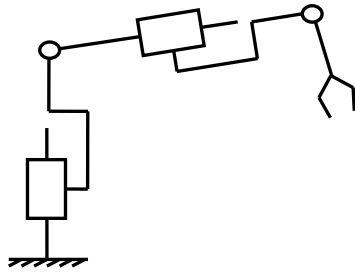
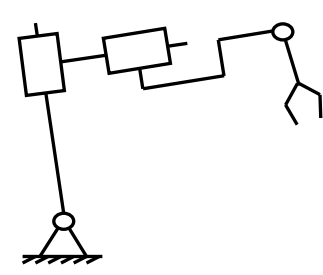
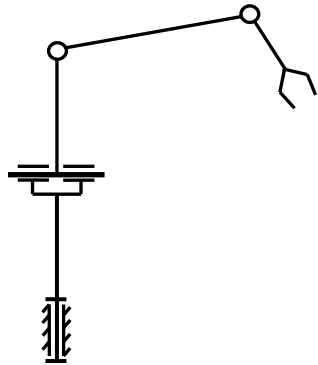
$\Theta_i(t)$	$s_i(t)$
$\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{6} t$	$0,2 + 0,1 \sin \frac{\pi}{6} t$

2. Найти координаты схвата и направляющие косинусы связанной с ним системы координат для моментов времени  $t=0, 1, 3$ с. Принять длины звеньев  $l_i=0,3$ м.
3. Изобразить на схеме три указанные положения механизма. Отсчет относительных углов поворота во вращательных кинематических парах вести от положений, при которых одноименные оси координат соседних звеньев параллельны друг другу. Если ось вращательной пары лежит в плоскости рисунка, отсчет углов поворота вести от плоскости рисунка.

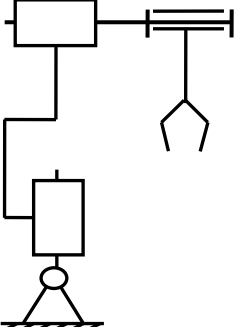
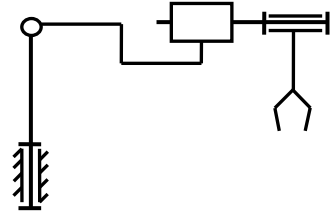
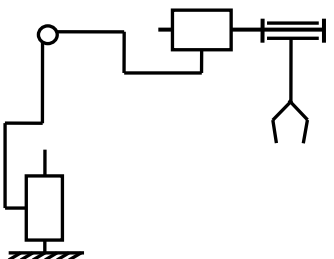
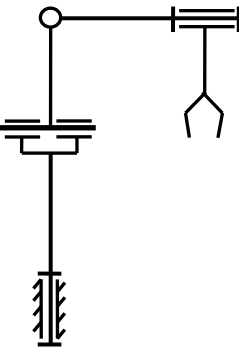
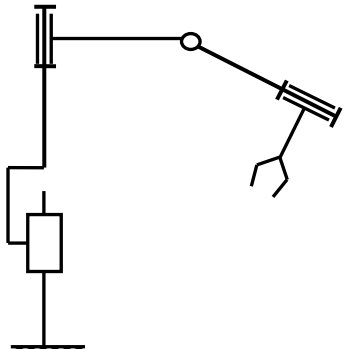
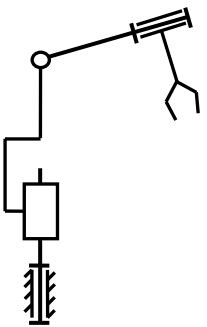
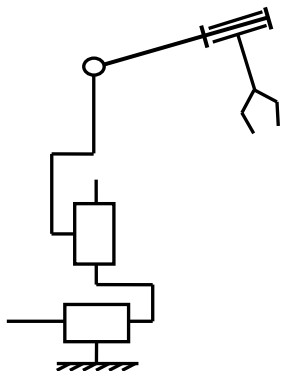
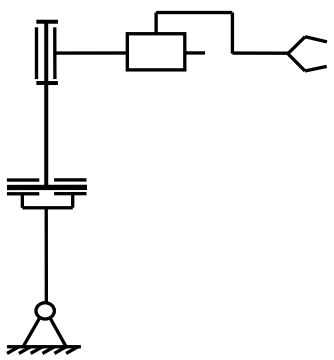


11		12	
13		14	
15		16	
17		18	
19		20	

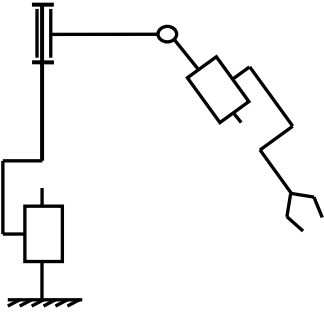
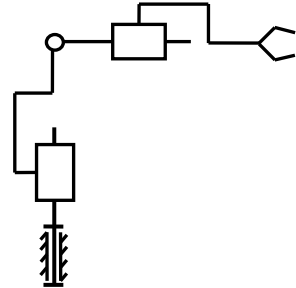
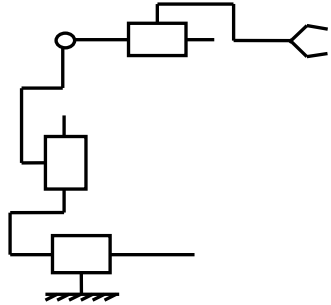
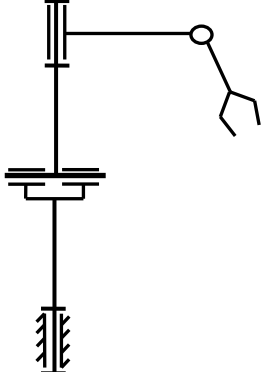
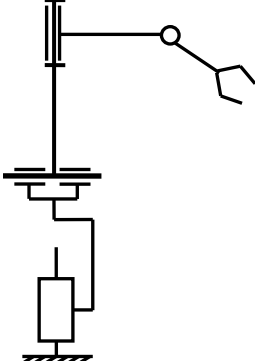
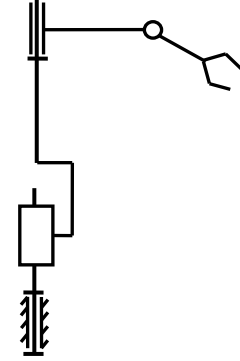


21		22	
23		24	
25		26	
27		28	
29		30	

31	<p>Diagram 31 shows a mechanism with a fixed base. A vertical link is connected to the base. A horizontal link is attached to the top of the vertical link. A gripper arm is connected to the end of the horizontal link.</p>	32	<p>Diagram 32 shows a mechanism with a fixed base. A vertical link is connected to the base. A horizontal link is attached to the top of the vertical link. A gripper arm is connected to the end of the horizontal link.</p>
33	<p>Diagram 33 shows a mechanism with a fixed base. A vertical link is connected to the base. A horizontal link is attached to the top of the vertical link. A gripper arm is connected to the end of the horizontal link.</p>	34	<p>Diagram 34 shows a mechanism with a fixed base. A vertical link is connected to the base. A horizontal link is attached to the top of the vertical link. A gripper arm is connected to the end of the horizontal link.</p>
35	<p>Diagram 35 shows a mechanism with a fixed base. A vertical link is connected to the base. A horizontal link is attached to the top of the vertical link. A gripper arm is connected to the end of the horizontal link.</p>	36	<p>Diagram 36 shows a mechanism with a fixed base. A vertical link is connected to the base. A horizontal link is attached to the top of the vertical link. A gripper arm is connected to the end of the horizontal link.</p>
37	<p>Diagram 37 shows a mechanism with a fixed base. A vertical link is connected to the base. A horizontal link is attached to the top of the vertical link. A gripper arm is connected to the end of the horizontal link.</p>	38	<p>Diagram 38 shows a mechanism with a fixed base. A vertical link is connected to the base. A horizontal link is attached to the top of the vertical link. A gripper arm is connected to the end of the horizontal link.</p>

39		40	
41		42	
43		44	
45		46	

47		48	
49		50	
51		52	
53		54	

55		56	
57		58	
59		60	

### Библиографический список

1. Барбашова, Т.Ф. Теоретическая механика в задачах: учебное пособие / Т.Ф. Барбашова, Е.И. Кутушев, Т.В. Попова. М.: Изд-во Попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2010. 184 с.
2. Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. М.: Наука, 1971. Т. 2.
3. Диевский, В.А. Теоретическая механика: учебное пособие / В.А. Диевский. СПб.: Изд-во «Лань», 2005. 320 с.: ил.
4. Добронравов, В.В. Курс теоретической механики / В.В. Добронравов, Н.Н. Никитин. М.: Высш. шк., 1985. 575 с.
5. Курс теоретической механики / под ред. К.С. Колесникова. М.: Изд-во АПМ, 2000. 472 с.
6. Паншина, А.В. Теоретическая механика в решениях задач из сборника И.В. Мещерского: Аналитическая механика / А.В. Паншина, В.М. Чуркин. М.: Княжеский дом «ЛИБРОКОМ», 2012. 200 с.
7. Сборник коротких задач по теоретической механике: учеб. пособие для ВТУЗов / под ред. О.Э. Кепе. М.: Высш. шк., 1989. 368 с.
8. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Танг. М.: Высш. шк., 1986. 416 с.
9. Яблонский, А.А. Курс теории колебаний / А.А. Яблонский. М.: Высш. шк., 1975. 248с.
10. Лекции по теоретической механике / С.Ф. Яцун, В.Я. Мищенко, О.Г. Локтионова, Д.И.Сафаров. Баку: Унсиййэт, 2000. 109 с.