

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна
Должность: проректор по учебной работе
Дата подписания: 20.09.2022 12:55:22
Уникальный программный ключ:
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

1

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

О.Г. Локтионова

02 2022 г.

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Методические указания к выполнению практических работ
для студентов направления
28.03.01 Нанотехнологии и микросистемная техника

Курск 2022

УДК 621

Составители: Е.Н. Политов, О.В. Емельянова, Л.Ю. Ворочаева

Рецензент

Доктор технических наук, профессор *С.Ф. Яцун*

Прикладная механика: методические указания к выполнению практических работ для студентов направления 28.03.01 Нанотехнологии и микросистемная техника / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Е.Н. Политов, О.В. Емельянова, Л.Ю. Ворочаева. Курск, 2022. 69 с.

Изложен план проведения практических (лабораторно-практических) занятий по дисциплине «Прикладная механика», рассмотрены примеры решения типовых задач механики. Приведены варианты расчётных схем, ход работы, а также задания для самоконтроля.

Методические указания соответствуют требованиям федерального государственного образовательного стандарта.

Предназначены для студентов направления 28.03.01 Нанотехнологии и микросистемная техника.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 10.02.2022 . Формат 60x84 1/16
Усл.печ.л. 3,8 . Уч.-изд.л. 3,6. Тираж 30 экз. Заказ. ~~779~~ Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Содержание

1. Статика. Уравнения равновесия для плоской системы сил	4
2. Определение кинематических характеристик точки	6
3. Решение задач кинематики твердого тела	18
4. Решение задач динамики механической системы	21
5. Приводы. Изучение работы зубчатых передач	24
6. Приводы. Основные силовые и кинематические характеристики	32
7. Расчет стержней на растяжение-сжатие	37
8. Расчет валов на кручение	40
9. Расчет балки на поперечный изгиб	42
10. Построение трехмерной модели балки и проведение прочностных расчетов	46
Рекомендуемый список литературы	69

1. Статика. Уравнения равновесия для плоской системы сил

Для плоской произвольной системы сил можно составить три уравнения равновесия: $\sum F_{KX} = 0$, $\sum F_{KY} = 0$, $\sum M_0(\vec{F}_K) = 0$.

Определение реакций связей твёрдого тела

Жесткая рама закреплена в точке A шарнирно, а в точке B прикреплена или к невесомому стержню BB_1 , или к шарнирной опоре на катках; стержень прикреплен к раме и к неподвижной опоре шарнирами.

На раму действуют пара сил с моментом $M = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$ и две силы, значения которых, направления и точки приложения указаны в таблице

Определить реакции связей в точках A и B , вызываемые заданными нагрузками. При окончательных подсчетах принять $l = 0,5 \text{ м}$. $F_2 = 20 \text{ Н}$ $\alpha_2 = 45^\circ$ $F_3 = 30 \text{ Н}$ $\alpha_4 = 30^\circ$

Решение

1) Рассмотрим расчетную схему (см. рисунок 1.1). Расставим реакции связей: в точке A две реакции X_A и Y_A , в точке B – реакция направлена вдоль стержня R_B .

Разложим все силы на составляющие по осям координат:

$$F_{2x} = F_2 \cos \alpha_2 = 20 \cos 45^\circ = 14,1 \text{ Н}$$

$$F_{2y} = F_2 \sin \alpha_2 = 20 \sin 45^\circ = 14,1 \text{ Н}$$

$$F_{3x} = F_3 \cos \alpha_3 = 30 \cos 30^\circ = 26 \text{ Н}$$

$$F_{3y} = F_3 \sin \alpha_3 = 30 \sin 30^\circ = 15 \text{ Н}$$

2) Для определения трёх неизвестных реакций составим и решим три уравнения равновесия.

Уравнение моментов сил относительно точки A : $\sum M_A(F_i) = 0$
 $R_B \cdot 4l - M + F_{2x} \cdot 4l + F_{2y} \cdot 2l + F_{3x} \cdot 4l = 0$ (1.1)

Из (1) найдем реакцию R_B .

$$R_B = - \frac{-M + F_{2x} \cdot 4l + F_{2y} \cdot 2l + F_{3x} \cdot 4l}{4l}$$

$$R_B = \frac{-100/0.5 + 14,1 \cdot 4 + 14,1 \cdot 2 + 26 \cdot 4}{-4} = 2,9 \text{ Н}$$

Уравнение проекций сил на ось X : $\sum F_{ix} = 0$
 $-F_{2x} - F_{3x} + X_A = 0$ (1.2)

Откуда

$$X_A = F_{2x} + F_{3x}$$

$$X_A = 14,1 + 26 = 40,1 \text{ Н}$$

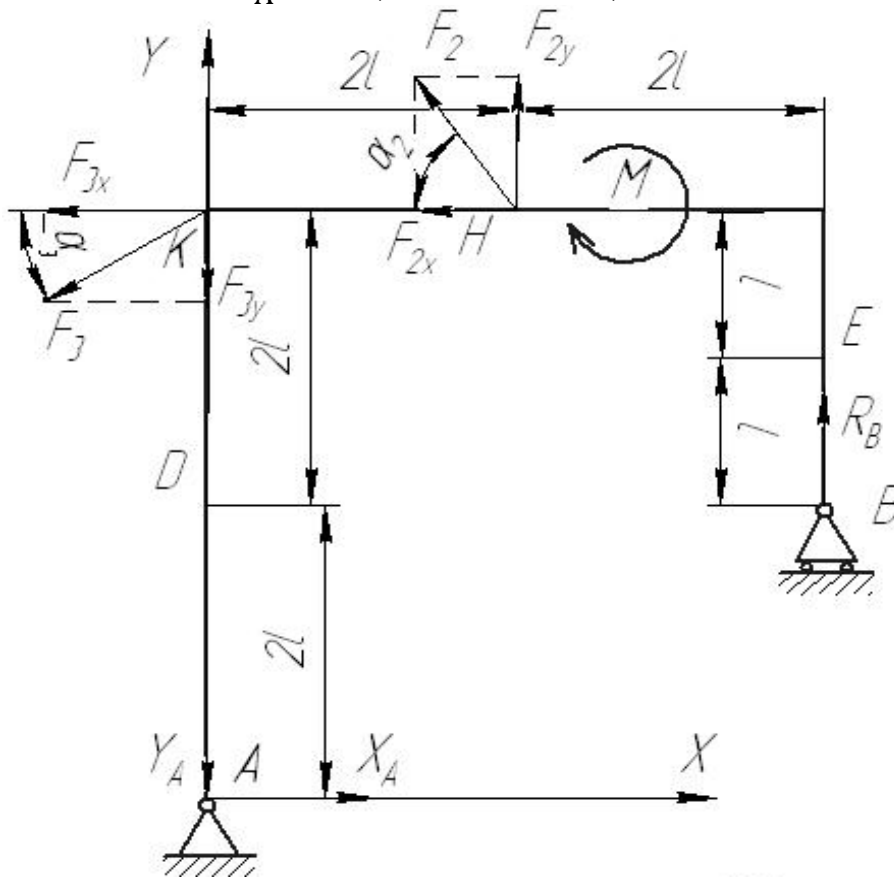


Рис. 1.1 Расчетная схема для определения реакций связей плоской рамы

Уравнение проекций сил на ось Y : $\sum F_{iy} = 0$

$$R_B + F_{2y} - F_{3y} - Y_A = 0 \quad (1.3)$$

Откуда

$$Y_A = R_B + F_{2y} - F_{3y}$$

$$Y_A = 2,9 + 14,1 - 15 = 2 \text{ Н}$$

Проверка: $\sum M_B(F_i) = 0$

$$Y_A \cdot 4l + X_A \cdot 2l - M + F_{2x} \cdot 2l - F_{2y} \cdot 2l + F_{3x} \cdot 2l + F_{3y} \cdot 4l = 0$$

$$2 \cdot 4 + 40,1 \cdot 2 - 100 / 0,5 + 14,1 \cdot 2 - 14,1 \cdot 2 + 26 \cdot 2 + 15 \cdot 4 = 0$$

$$200,2 - 200 = 0$$

Реакции найдены верно.

$$X_A = 40,1 \text{ Н}; \quad Y_A = 2 \text{ Н}; \quad R_B = 2,9 \text{ Н}$$

2 Определение кинематических характеристик точки

Цель работы: Численно, с помощью компьютерной программной среды MATHCAD, по заданным уравнениям движения точки в координатной форме $x = x(t)$, $y = y(t)$ (x, y — в сантиметрах, t — в секундах) составить уравнение траектории, построить ее. Найти законы изменения ее скорости, полного, касательного и нормального ускорений, а также изобразить на рисунке вектора скорости и ускорения и их проекции на оси координат.

Теоретическая часть работы

С целью нахождения уравнения траектории необходимо исключить время из уравнений движения и получить зависимость $y = f(x)$. Для этого выразим время t из одного уравнения и подставив в другое.

Например, если движение точки описывается уравнениями $x = at$, $y = bt^2$, то получаем

$$t = \frac{x}{a}; \quad y = b \left(\frac{x}{a} \right)^2.$$

Для определения скорости точки в декартовых осях используют ее проекции на оси координат v_x и v_y . Они находятся путем дифференцирования выражений соответствующих координат точки по времени:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}.$$

Вектор скорости равен геометрической сумме векторов ее проекций

$$\bar{v} = \bar{v}_x + \bar{v}_y.$$

Поскольку составляющие v_x и v_y перпендикулярны друг другу, то значение скорости определяется формулой:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (2.1)$$

Для нахождения скорости при естественном способе задания движения следует вычислить производную от закона изменения дуговой координаты:

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (2.2)$$

Выражение (2) с учетом (1) дает возможность получить закон изменения пройденного точкой пути от времени:

$$s = \int_0^t v dt = \int_0^t \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dt. \quad (2.3)$$

Линейное ускорение точки, как и линейную скорость, можно представить в виде суммы составляющих проекций на оси декартовой системы координат:

$$\bar{a} = \bar{a}_x + \bar{a}_y,$$

а проекции ускорения равны первым производным от соответствующих проекций скоростей по времени:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}.$$

Полное ускорение точки вычисляется по формуле:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Выражения проекций линейного ускорения на декартовы оси координат несут информацию только об изменении осевых составляющих скорости.

Характер изменения вектора скорости определяют проекции вектора ускорения на естественные оси кривой, по которой движется точка: касательную и главную нормаль.

Касательное ускорение точки \bar{a}_τ характеризует быстроту изменения скорости по величине и находится дифференцированием скорости по времени:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Если точка движется с постоянной скоростью, то касательное ускорение отсутствует.

Вектор \bar{a}_τ направляется *по касательной к траектории*. Он сонаправлен с вектором скорости при ускоренном движении точки и противоположен ему в случае замедленного движения.

Нормальное ускорение \bar{a}_n характеризует быстроту изменения скорости по направлению. Для его расчета применяется формула

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

где ρ – радиус кривизны траектории.

При движении точки по прямой $a_n \equiv 0$.

Вектор нормального ускорения a_n всегда направляется к центру кривизны траектории, то есть по главной нормали.

Вектор полного ускорения точки равен геометрической сумме касательного и нормального ускорений

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n.$$

На рис. 1 показаны направления векторов скорости и ускорений точки в случае ее ускоренного движения.

Поскольку касательное и нормальное ускорения взаимно перпендикулярны, то полное ускорение точки рассчитывается по формуле:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Следовательно, полное ускорение точки равно нулю только в случае одновременного отсутствия касательной и нормальной составляющих, то есть при движении точки по прямой с постоянной скоростью.

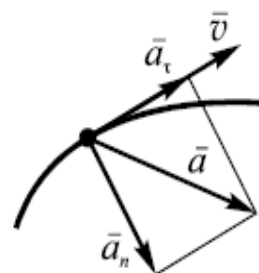


Рис.2.1

Контрольные вопросы

1. Что такое кинематика?
2. Основные кинематические характеристики движения?
3. Какие способы задания движения точки существуют, и в чем заключается особенность каждого из этих способов?
4. Как определяется скорость точки для различных способов задания движения?
5. Как определяется ускорение точки при естественном, векторном и координатном способах задания движения?
6. В каких случаях нормальное ускорение точки равно нулю?
7. Когда касательное ускорение при криволинейном движении равно нулю?

Пример.

Исходные данные: законы изменения координат точки, м:

$$x = 1 - 2 \cos^2 \frac{\pi t}{3}; \quad y = 2 \sin \frac{\pi t}{3} + 1.$$

Определить: траекторию точки; положение, скорость, ускорение и радиус кривизны траектории, соответствующие моменту времени $t_1=1$ с.

Решение.

1 *Определяем уравнение траектории точки аналитически.* Для этого исключим из заданных уравнений движения время t . Поскольку в заданных выражениях время является аргументом функций синус и косинус, то воспользуемся известным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad .$$

В нашем случае

$$\sin \frac{\pi t}{3} = \frac{y-1}{2}; \quad \cos^2 \frac{\pi t}{3} = \frac{1-x}{2}.$$

Поскольку $\alpha = \frac{\pi t}{3}$, то $\sin^2 \frac{\pi t}{3} + \cos^2 \frac{\pi t}{3} = 1$,

Следовательно $\left(\frac{y-1}{2}\right)^2 + \frac{1-x}{2} = 1$; $\frac{(y-1)^2}{2} - x - 1 = 0$.

Отсюда находим: $x = \frac{(y-1)^2}{2} - 1$ - уравнением траектории является парабола.

Так как $-1 \leq \sin \frac{\pi t}{3} \leq 1$, то движение точки происходит не по всей параболе, а по её участку $-1 \leq y \leq 3$.

Для построения траектории составим таблицу значений координат x и y :

Таблица 2.1

x	-1	0	1	2	3
y	1	-0,5	-1	-0,5	3

В масштабе строим траекторию движения точки.

2 Определяем координаты движущейся точки M , соответствующие моменту времени t_1 . Подставляя значение t_1 в заданные уравнения движения, находим:

$$x_1 = 1 - 2 \cos^2 \frac{\pi}{3} = 0,5 \text{ м}; \quad y_1 = 2 \sin \frac{\pi}{3} + 1 = 2,73 \text{ м}.$$

Изображаем на траектории точку M_1 с полученными координатами (рис.2).

Замечание: здесь и далее при расчетах численных значений величин аргумент тригонометрических функций следует подставлять в радианах.

3 Определяем линейную скорость точки. Для этого вначале находим законы изменения осевых проекций скорости:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{4\pi}{3} \cos \frac{\pi t}{3} \left(-\sin \frac{\pi t}{3} \right) = \frac{2\pi}{3} \sin \frac{2\pi t}{3};$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi t}{3}.$$

Тогда скорость точки

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{9} \sin^2 \frac{2\pi t}{3} + \frac{4\pi^2}{9} \cos^2 \frac{\pi t}{3}} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\sin^2 \frac{2\pi t}{3} + \cos^2 \frac{\pi t}{3}}.$$

В момент времени $t_1=1$ с, получаем:

$$v_{x_1} = \frac{2\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3} = 1,814 \text{ м/с};$$

$$v_{y_1} = \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} = 1,047 \text{ м/с}.$$

В соответствии с результатами расчетов на рисунке изображаем вектор скорости. Для этого в выбранном масштабе, например, в 1 см – 1 см/с, из точки M_1 откладываем составляющие вектора скорости v_x и v_y . Затем путем сложения составляющих получаем вектор скорости \vec{v} . При правильных расчетах и построениях этот вектор должен лежать на касательной к траектории движения, что и получилось на рисунке 2.

Замечание: масштаб для построения векторов следует подобрать так, чтобы длина вектора v_1 была не менее 2 см.

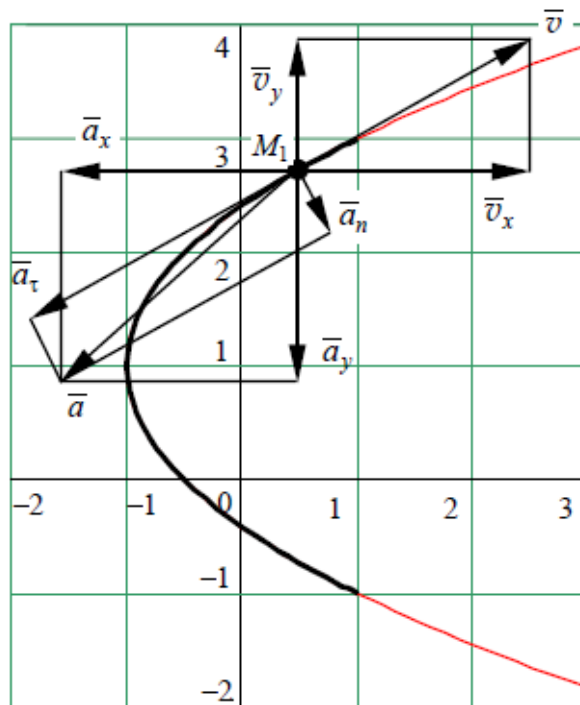


Рис.2.2

4 Строим график функции $v = f(t)$. Он изображен на рисунке 3. На участке от начала движения до момента времени $t = 0,63$ с скорость точки увеличивается, следовательно, в этот промежуток времени движение точки ускоренное, а на интервале от $t = 0,63$ с до $t = 1,57$ с скорость уменьшается, значит на нем движение точки замедленное. Далее происходит чередование этих видов движения.

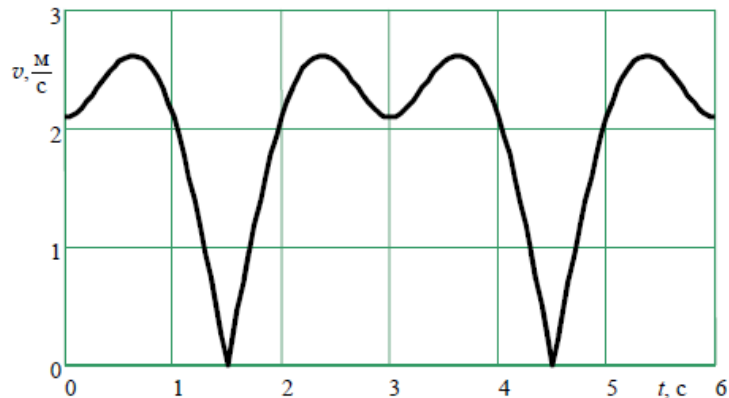


Рис.2.3.

5. Определяем линейное ускорение точки. Для этого находим осевые составляющие ускорения:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{2\pi}{3} \cos \frac{2\pi t}{3} \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi^2}{9} \cos \frac{2\pi t}{3};$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{2\pi}{3} \left(-\sin \frac{\pi t}{3} \right) \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi^2}{9} \sin \frac{\pi t}{3}.$$

В момент времени $t_1=1$ с, получаем

$$a_{x1} = \frac{4\pi^2}{9} \cos \frac{2\pi}{3} = -2,19 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{y1} = -\frac{2\pi^2}{9} \sin \frac{\pi}{3} = -1,90 \text{ м/с}^2.$$

Линейное ускорение точки найдем по формуле $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$:

$$a = \sqrt{(-2,19)^2 + (-1,90)^2} = 2,9 \text{ м/с}^2.$$

Векторы $\bar{a}, \bar{a}_x, \bar{a}_y$ изображаем на рисунке 2, придерживаясь нового масштаба, напр. 1 см – 2 м/с².

6 Вычисляем проекции линейного ускорения точки на естественные оси координат. Зависимость касательного ускорения от времени имеет вид:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{2\pi}{3} \frac{2 \sin \frac{2\pi t}{3} \cos \frac{2\pi t}{3} \frac{2\pi}{3} - 2 \cos \frac{\pi t}{3} \sin \frac{\pi t}{3} \frac{\pi}{3}}{2 \sqrt{\sin^2 \frac{2\pi t}{3} + \cos^2 \frac{\pi t}{3}}} = \frac{\pi^2}{9} \frac{2 \sin \frac{4\pi t}{3} - \sin \frac{2\pi t}{3}}{\sqrt{\sin^2 \frac{2\pi t}{3} + \cos^2 \frac{\pi t}{3}}}$$

или по формуле:

$$a_\tau = |\vec{v} \cdot \vec{a} / v|; \quad a_\tau = \left| \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} \right|.$$

Касательное ускорение от времени и $t_1=1$ с:

$$a_\tau = \frac{\pi^2}{9} \frac{2 \sin \frac{4\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3}}{\sqrt{\sin^2 \frac{2\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{3}}} = -2,849 \text{ м/с}^2.$$

Знак «минус», получившийся при расчете, показывает, что в рассматриваемый момент времени движение точки является замедленным.

Поскольку $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, то

$$a_{n_1} = \sqrt{a^2_1 - a^2_{\tau_1}} = \sqrt{(2,9)^2 - (-2,849)^2} = 0,541 \text{ м/с}^2,$$

или по формуле: $a_n = |\vec{v} \times \vec{a} / v|$; $a_n = \left| \frac{v_x a_y - v_y a_x}{v} \right|$.

Изображаем на рисунке векторы касательного и нормального ускорений $\vec{a}_{\tau_1}, \vec{a}_{n_1}$ в том же масштабе, в котором ранее изображались векторы ускорений (в 1 см – 2 м/с²). Вектор касательного ускорения направлен по касательной к траектории движения. Поскольку в нашей задаче касательное ускорение получилось отрицательным, то оно направлено в сторону, противоположную направлению вектора скорости. Нормальное ускорение направлено перпендикулярно касательному к центру кривизны траектории. Векторная сумма касательного и нормального ускорений оказалась равна вектору полного ускорения, полученного через осевые проекции. Этот факт подтверждает правильность расчетов.

7 Определим радиус кривизны траектории в точке M_1 . Для этого используем формулу $a_n = \frac{v^2}{\rho}$. Из неё получаем:

$$\rho = \frac{a_n}{v^2} = \frac{2,09^2}{0,541} = 8,07 \text{ м.}$$

Из описания решения следует, что построение графика с нанесением векторов скоростей и ускорений позволяет проверить правильность аналитических расчетов. При этом должны выполняться следующие условия:

- точка с координатами x_1, y_1 должна попасть на изображенную траекторию;
- вектор скорости v_1 , построенный как диагональ прямоугольника со сторонами v_{x_1} и v_{y_1} , должен быть направлен вдоль касательной к траектории в точке с координатами x_1, y_1 ;
- векторы ускорений, полученные как диагонали прямоугольников со сторонами a_{x_1}, a_{y_1} и a_{τ_1}, a_{n_1} , должны совпасть.

Ход работы

1. Ознакомиться с теоретической частью и примером выполнения задания.
2. На основании исходных данных, приведенных в таблице:
 - в программной среде MATHCAD ввести уравнения траектории точки в осях $x - y$; определяем координаты точки x_1, y_1 , соответствующие заданному моменту времени t_1 ;
 - для получения закона изменения от времени скорости $v(t)$ и ее составляющих $v_x(t), v_y(t)$ провести численное и символьное дифференцирование функций $x(t)$ и $y(t)$ первого порядка в момент времени t_1 ;
 - для получения закона изменения от времени составляющих ускорения $a_x(t)$ и $a_y(t)$ провести численное и символьное дифференцирование функций $x(t)$ и $y(t)$ второго порядка, найти полное ускорение точки в момент времени t_1 ;
 - провести численное определение модуля ускорений a_n и a_τ в момент времени t_1 , радиуса кривизны траектории ρ . В случае необходимости описать причину отсутствия ускорений a_n и a_τ .

Для этого откроем Mathcad и подготовим в окне редактирования задание на вычисление.

Для запуска формульного редактора достаточно установить указатель мыши в любом свободном месте окна редактирования и щелкнуть левой кнопкой мыши. Появится курсор в виде маленького красного крестика. Его можно перемещать клавишами перемещения курсора.

Используя данные таблицы (рис.6) вводим следующие параметры: уравнения движения $x(t), y(t)$, и t_1 , используя оператор присваивания ":=", который применяется для задания значений переменным.

Подготовка вычислительных блоков облегчается благодаря выводу шаблона при задании того или иного оператора. Для этого служат палитры математических символов и шаблонов операторов и функций.

Вычисления выполняются посимвольным набором левой части вычисляемого выражения и установкой после него оператора вывода — знака « \Rightarrow » (равно).

Дифференцирование функций $x(t)$ и $y(t)$ происходит с помощью оператора $\frac{d}{dt}$ и $\frac{d^2}{dt^2}$ на панели "Математический анализ". Для сим-

вольного вывода полученного ответа ввести оператор "→", для численного вывода - оператор «=».

Аналогично, с помощью символьных редакторов, определяем модули a_T и a_r ускорений и радиус кривизны траектории ρ .

Листинг вычислений приведен на рис.2.4.

Уравнения движения

$$x(t) := 1 - 2 \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{t}{3}\right)^2 \quad y(t) := 2 \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{t}{3}\right) + 1 \quad t1 := 1$$

$$x(t1) = 0.5 \quad y(t1) = 2.732$$

Скорость точки

$$\frac{d}{dt}x(t) \rightarrow \frac{4 \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)}{3} \quad \frac{d}{dt}y(t) \rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)}{3}$$

$$u_x := \frac{d}{dt}x(t1) \quad u_x = 1.814 \quad u_y := \frac{d}{dt}y(t1) \quad u_y = 1.047$$

$$v := \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

$$v = 2.094$$

Ускорение точки

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) \rightarrow \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)^2}{9} - \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)^2}{9} \quad \frac{d^2}{dt^2}y(t) \rightarrow -\frac{2 \cdot \pi^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)}{9}$$

$$a_x := \frac{d^2}{dt^2}x(t1) \quad a_x = -2.193 \quad a_y := \frac{d^2}{dt^2}y(t1) \quad a_y = -1.899$$

$$a := \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$a = 2.901$$

Касательное ускорение

$$a_T := \left| \frac{u_x \cdot a_x + u_y \cdot a_y}{v} \right|$$

$$a_T = 2.849$$

$$\rho := \frac{v^2}{a_T} \quad \rho = 8$$

Нормальное ускорение

$$a_n := \left| \frac{u_x \cdot a_y - u_y \cdot a_x}{v} \right| \quad \text{или} \quad a_n1 := \sqrt{a^2 - a_T^2}$$

$$a_n = 0.548 \quad a_n1 = 0.548$$

Греческий

α	β	γ	δ	ε	ζ
η	θ	ι	κ	λ	μ
ν	ξ	ο	π	ρ	σ
τ	υ	φ	χ	ψ	
ω	Α	Β	Γ	Δ	Ε
Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ
Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ
Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ
Ω					

Калькулятор

sin	cos	tan	ln	log
n!	i	x	Γ	ηΓ
e ^x	1/x	()	x ²	x ^y
π	7	8	9	/
1/4	4	5	6	×
÷	1	2	3	+
:=	.	0	-	=

Математический анализ

$\frac{d}{dx}$	$\frac{d^n}{dx^n}$	∞	\int_a^b	$\sum_{n=1}^{\infty}$	$\prod_{n=1}^{\infty}$	\int
\sum_n	\prod_n	$\lim_{n \rightarrow \infty}$	$\lim_{n \rightarrow a^+}$	$\lim_{n \rightarrow a^-}$	$\nabla_x f$	

Символьные

→	▪→	Modifiers
float	rectangular	assume
solve	simplify	substitute
factor	expand	coeffs
collect	series	parfrac
fourier	laplace	ztrans
invfourier	invlaplace	invztrans
n ^T →	n ⁻¹ →	M →
explicit	combine	confrac
rewrite		

Рис.2.4. Листинг вычислений

3. Построить графики функций $x=f(y)$ и $v = f(t_2)$.

Для построения графиков функций $x=f(y)$ и $v = f(t_2)$ введём параметр t_2 как дискретный расчетный интервал времени, с шагом 0,1. Для этого на панели инструментов "График" щелкаем на кнопке с изображением графика – на экране появится шаблон графика. Введём в место ввода по оси X и Y - $x(t_2)$ и $y(t_2)$ - имя независимого аргумента. Отведём от графика указатель мыши и щелкаем левой кнопкой – график траектории движения будет построен.

Далее, аналогично, построим график $v = f(t_2)$.

Если Вы хотите просмотреть матрицу значений $x(t_2)$ и $y(t_2)$, то ниже графика $x=f(y)$ выводим их значения с помощью оператора вывода – знака «= \Rightarrow » (равно). Справа в таблице имеется полоса прокрутки, с помощью которой можно просмотреть значения t_2 в интервале от 0 до 6.

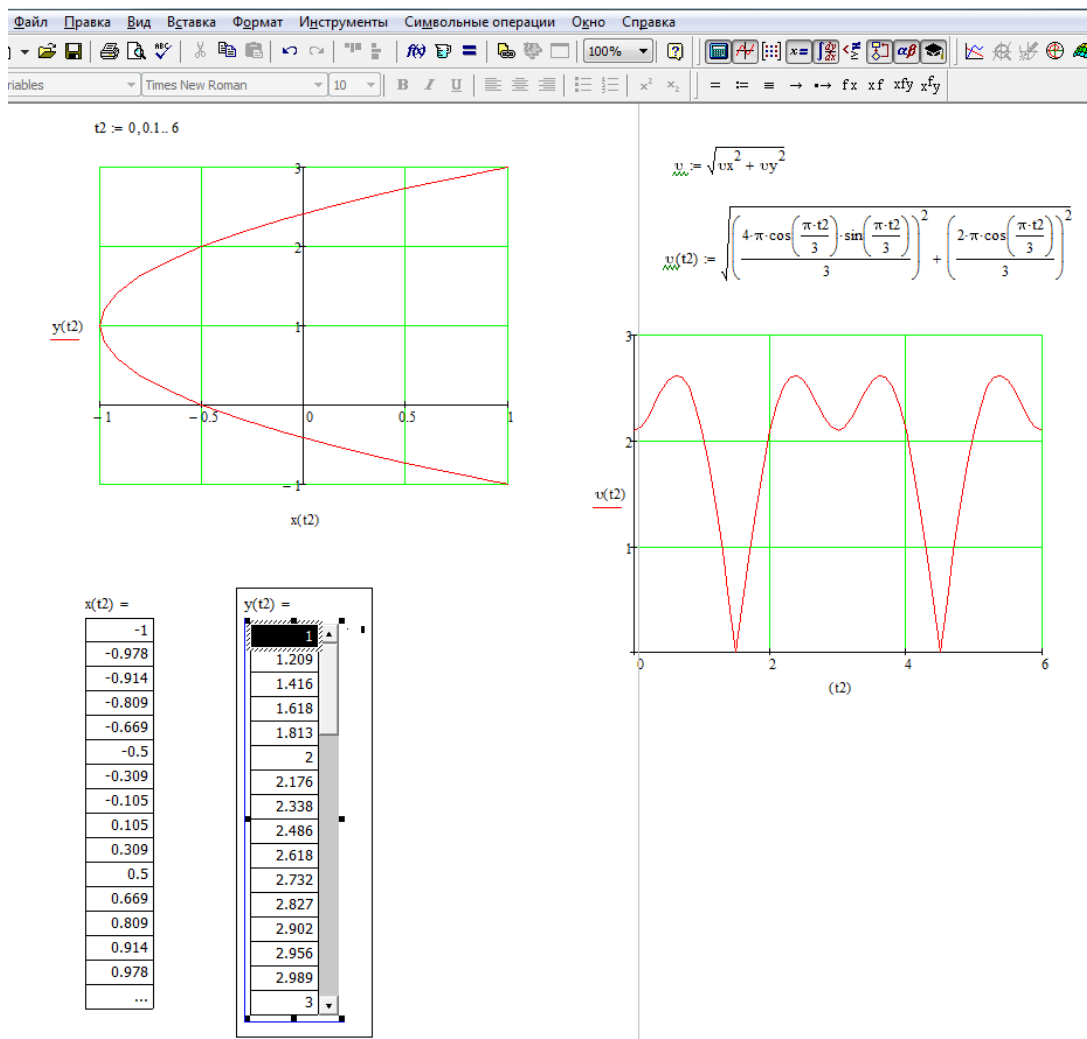


Рис. 2.5. Создание декартовых графиков

Листинг с построенными графиками приведен на рис.5.

4. Вывести на печать графики функций $x=f(y)$ и $v = f(t)$. На графике функций $x=f(y)$ отметить точку $M_1(x,y)$ и в соответствии с результатами расчетов, выбранным масштабом, изобразить вектора скоростей и ускорений. По графику $v = f(t)$ дать характеристику движения точки.
5. Оформить отчет по работе.

3. Решение задач кинематики твердого тела

К простейшим видам движения твердого тела относятся поступательное и вращательное.

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, остается параллельной самой себе при перемещении. При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу, остаются все время неподвижными. Прямая, проходящая через эти точки, называется *осью вращения*.

Определение кинематических параметров тел, совершающих вращательное и поступательное движение

Пример решения задачи.

Механизм (рис. 3.1) состоит из ступенчатых колес 1—3, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 4 и груза 5, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес. Радиусы ступеней колес равны соответственно: у колеса 1 — $r_1 = 2$ см, $R_1 = 4$ см, у колеса 2 — $r_2 = 6$ см, $R_2 = 8$ см, у колеса 3 — $r_3 = 12$ см, $R_3 = 16$ см. На ободьях колес расположены точки A , B и C .

Дано	Найти	
	скорости	ускорения
$\omega_2 = 7t - 3t^2$	v_5, ω_3	ε_2, a_A, a_4

Определить в момент времени $t_1 = 2$ с указанные в таблице в столбцах «Найти» скорости (v — линейные, ω — угловые) и ускорения (a — линейные, ε — угловые) соответствующих точек или тел (v_5 — скорость груза 5 и т.д.).

Решение

1) Определим угловую скорость и угловое ускорение колеса 2 в момент времени $t_1 = 2$ с

$\omega_2 = 7t - 3t^2 = 7 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 = 2$ рад/с – угловая скорость колеса 2 направлена против часовой стрелки.

$\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = 7 - 6t = 7 - 6 \cdot 2 = -5$ рад/с²

Знак «-» означает, что угловое ускорение колеса 2 направлено в противоположную сторону.

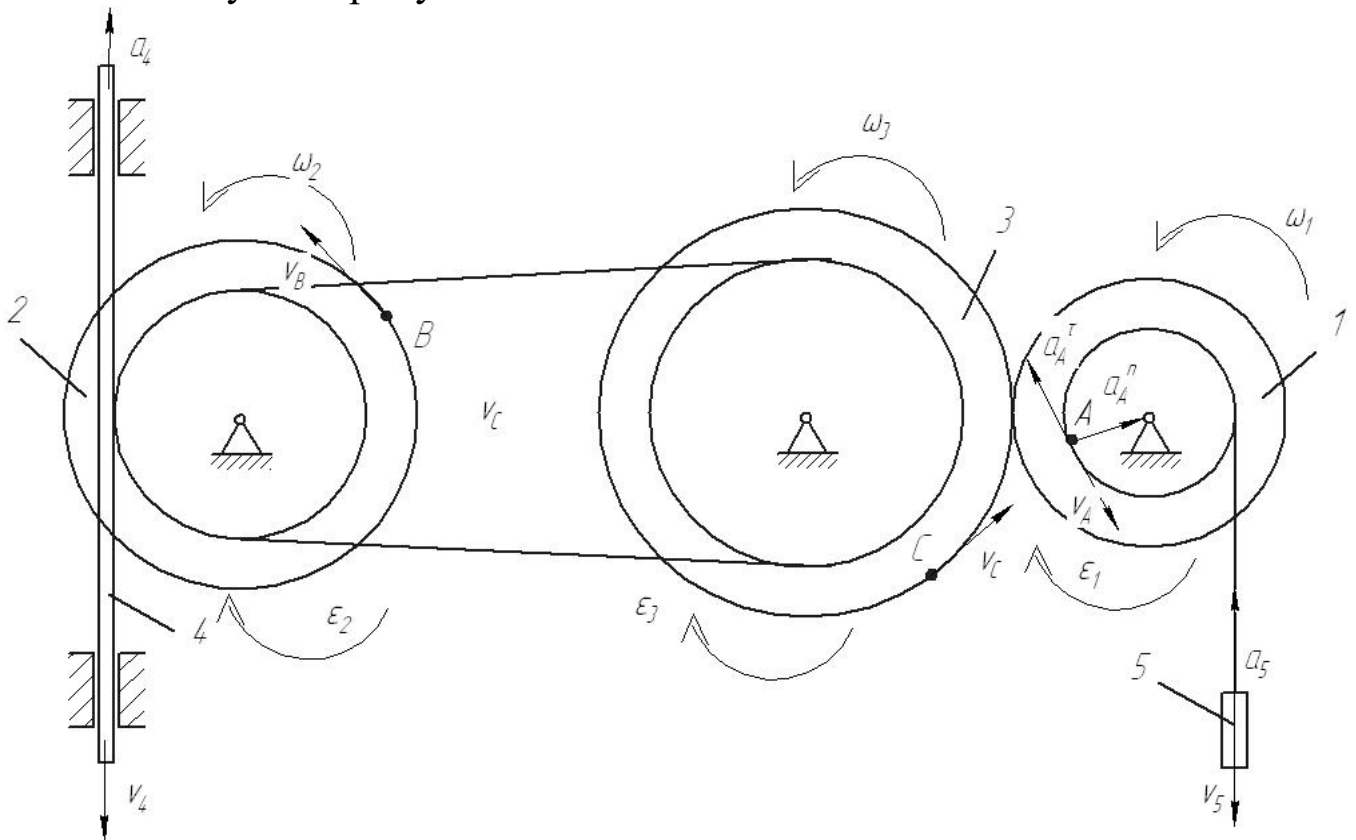


Рис. 3.1 Расчетная схема механизма

Рассмотрим расчетную схему (см. рисунок 3.1).

Определим кинематические соотношения.

$v_4 = \omega_2 \cdot r_2$ - скорость рейки 4.

$v_B = \omega_2 \cdot R_2$ - скорость точки B.

$\omega_3 = \frac{v_B}{r_3} = \frac{\omega_2 \cdot R_2}{r_3} = \frac{2 \cdot 8}{12} = 1.33 \text{ с}^{-1}$ - угловая скорость колеса 3

$v_C = \omega_3 \cdot R_3 = \frac{\omega_2 \cdot R_2 \cdot R_3}{r_3} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4 \text{ см/с}$ - скорость точки C.

$\omega_1 = v_C / R_1 = \frac{\omega_2 \cdot R_2 \cdot R_3}{r_3 R_1}$ – угловая скорость колеса 1.

$$v_A = \omega_1 \cdot r_1 = \frac{\omega_2 \cdot R_2 \cdot R_3 r_1}{r_3 R_1} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 2}{12 \cdot 4} = 10.7 \text{ см/с} - \text{ скорость точки } A.$$

$$v_5 = v_A = 10.7 \text{ см/с} - \text{ скорость тела } 5.$$

2) Определим ускорения

$$\varepsilon_2 = 5 \text{ с}^{-2} - \text{ угловое ускорение колеса } 2.$$

$$a_4 = \dot{v}_4 = \varepsilon_2 \cdot r_2 = 5 \cdot 6 = 30 \text{ см/с}^2 - \text{ ускорение тела } 4.$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^n - \text{ ускорение точки } A$$

$$a_A^{\tau} = \dot{v}_A = \frac{\varepsilon_2 \cdot R_2 \cdot R_3 r_1}{r_3 R_1} = \frac{5 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 2}{12 \cdot 4} = 26.7 \text{ см/с}^2 - \text{ касательное ускоре-}$$

ние точки A

$$a_A^n = \frac{v_A^2}{r_1} = \frac{10.7^2}{2} = 56.9 \text{ см/с}^2 - \text{ нормальное ускорение точки } A$$

$$a_A = \sqrt{(a_A^{\tau})^2 + (a_A^n)^2} = \sqrt{26.7^2 + 56.9^2} = 62.8 \text{ см/с}^2$$

Ответ: $v_5 = 10.7 \text{ см/с}$

$$\omega_3 = 1.33 \text{ рад/с}$$

$$\varepsilon_2 = 5 \text{ с}^{-2} \quad a_4 = 30 \text{ см/с}^2$$

$$a_A = 62.8 \text{ см/с}^2$$

4. Решение задач динамики механической системы

Применение теоремы об изменении кинетической энергии к решению задач динамики механической системы

Пример решения задания.

Механическая система состоит из грузов 1 и 2 (коэффициент трения грузов о плоскость $f = 0,1$), цилиндрического сплошного однородного катка 3 и ступенчатых шкивов 4 и 5 с радиусами ступеней $R_4 = 0,3$ м, $r_4 = 0,1$ м, $R_5 = 0,2$ м, $r_5 = 0,1$ м (массу каждого шкива считать равномерно распределенной по его внешнему ободу) Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям (см. рис. 4.1 и табл. 4.2).

Под действием силы F и сил тяжести система приходит в движение из состояния покоя. При движении системы на шкивы 4 и 5 действуют постоянные моменты сил сопротивлений, равные соответственно M_4 и M_5 . Определить скорости груза 1 в тот момент времени, когда перемещение точки приложения силы F равно s_1 .

Таблица 4.1 – Данные для расчета

m_1 кг	m_2 кг	m_3 кг	m_4 кг	m_5 кг	M_4 Н·м	M_5 Н·м	F , Н	S_1 м
6	0	4	0	8	0,3	0	240	1,6

Решение

1) Используем теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_i$$

В начальный момент времени система покоится: $T_0 = 0$

Тогда получим:

$$T = \sum A_i$$

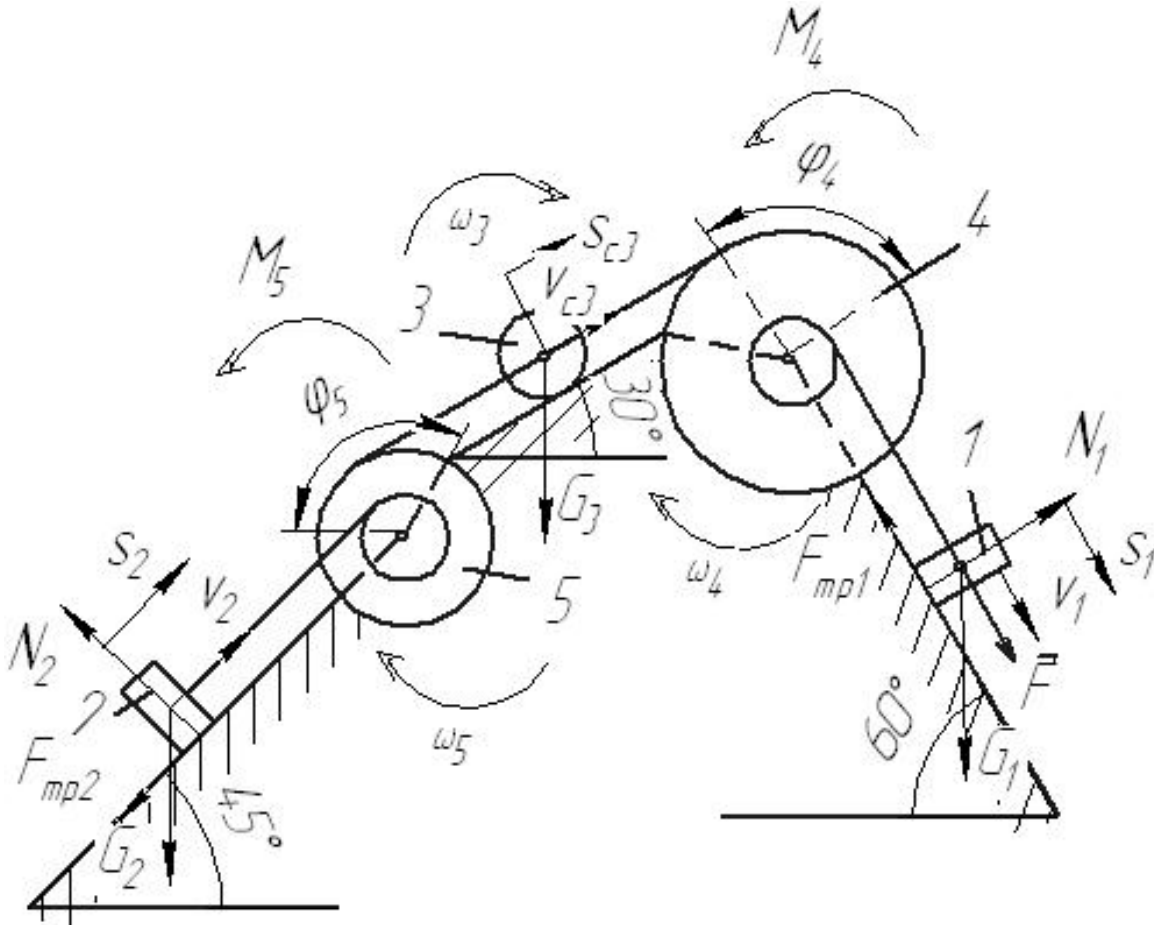


Рис. 4.1. Расчетная схема

2) Определим кинетическую энергию системы в конечный момент времени, когда пройденный телом 1 путь составит s_1 .

$$T = T_1 + T_3 + T_5$$

Найдем кинетические энергии тел, имеющих ненулевую массу.

$$T_1 = m_1 v_1^2 / 2 - \text{поступательное движение}$$

$$T_5 = J_5 \omega_5^2 / 2 - \text{вращательное движение}$$

где $J_5 = m_5 R_5^2$ – момент инерции колеса 5.

$$T_3 = m_3 v_{c3}^2 / 2 + J_3 \omega_3^2 / 2 - \text{плоское движение}$$

где $J_3 = m_3 R_3^2 / 2$ – момент инерции колеса 3.

Выразим все скорости через скорость 1 тела v_1 .

$$\omega_4 = \frac{v_1}{r_4}$$

$$v_{c3} = \omega_4 R_4 = 3v_1 \quad \omega_3 = \frac{v_{c3}}{R_3} = \frac{3v_1}{R_3}$$

$$\omega_5 = \frac{v_{c3}}{R_5} = \frac{3v_1}{R_5} \quad v_2 = \omega_5 r_5 = 1,5v_1$$

Тогда получим выражение для кинетической энергии системы в конечный момент:

$$T = m_1 v_1^2 / 2 + 9m_3 v_1^2 / 2 + 9m_3 v_1^2 / 4 + 9m_5 v_1^2 / 2$$

$$T = v_1^2 \left(m_1 / 2 + 9m_3 / 2 + 9m_3 / 4 + 9m_5 / 2 \right)$$

Получим:

$$T = v_1^2 \left(6/2 + 9 \cdot 4/2 + 9 \cdot 4/4 + 9 \cdot 8/2 \right) = 66v_1^2$$

3) Найдём сумму работ внешних сил за время движения системы.

$$A_F = F \cdot s_1 = 240 \cdot 1,6 = 384 \text{ Дж} - \text{работа силы } F.$$

$A_{G_1} = G_1 s_1 \cos 30^\circ = 6 \cdot 9,8 \cdot 1,6 \cdot \cos 30^\circ = 81,5 \text{ Дж}$ - работа силы тяжести G_1 .

$$A_{F_{mp1}} = -F_{mp1} s_1 - \text{работа силы трения } F_{mp1}.$$

$$F_{mp1} = fN = fG_1 \sin 30^\circ$$

$$A_{F_{mp1}} = -fG_1 s_1 \sin 30^\circ = -0,1 \cdot 6 \cdot 9,8 \cdot 1,6 \cdot \sin 30^\circ = -4,7 \text{ Дж}$$

$$A_{M_4} = -M_4 \varphi_4 - \text{работа момента сопротивления } M_4.$$

$$\varphi_4 = s_1 / r_4$$

$$A_{M_4} = -M_4 s_1 / r_4 = -\frac{0,3 \cdot 1,6}{0,1} = -4,8 \text{ Дж}$$

$$A_{G_3} = -G_3 s_{c3} \cos 60^\circ - \text{работа силы тяжести } G_3.$$

$$s_{c3} = 3 \cdot s_1$$

$$A_{G_3} = -3G_3 s_1 \cos 60^\circ = -3 \cdot 4 \cdot 9,8 \cdot 1,6 \cdot \cos 60^\circ = -94,1 \text{ Дж}$$

Работа остальных сил и моментов равна нулю.

Тогда:

$$\sum A_i = 384 + 81,5 - 4,7 - 4,8 - 94,1 = 362 \text{ Дж}$$

4) Получим:

$$66v_1^2 = 362$$

$$\text{откуда: } v_1 = \sqrt{362/66} = 2,34 \text{ м/с}$$

5 Приводы. Изучение работы зубчатых передач

Цель работы: исследование кинематики зубчатого механизма, определение передаточного отношения.

Общие теоретические положения

Кинематический анализ зубчатых механизмов заключается в определении угловых скоростей выходных и промежуточных звеньев по известным угловым скоростям входных звеньев.

Зубчатые механизмы могут быть плоскими и пространственными. У плоских механизмов звенья вращаются относительно параллельных осей. Пространственные механизмы применяют для передачи вращательного движения между пересекающимися или скрещивающимися осями.

Кроме того, зубчатые механизмы подразделяют на механизмы с неподвижными и подвижными осями вращения (планетарные механизмы).

Для выполнения кинематического анализа необходимо определить передаточное отношение зубчатой передачи. Передаточным отношением U_{12} называется отношение угловой скорости ω_1 входного зубчатого колеса 1 к угловой скорости ω_2 зубчатого колеса 2:

$$U_{12} = \omega_1 / \omega_2 \quad (5.1)$$

У плоских механизмов передаточное отношение положительное, если зубчатые колеса вращаются в одном направлении, и отрицательное, если колеса вращаются в разные стороны.

Угловые скорости колес, находятся в зацеплении, обратно пропорциональны радиусам делительных окружностей r и числам зубьев.

Таким образом, передаточное отношение для пары зубчатых колес внешнего зацепления (рис. 5.1, а)

$$U_{12} = \omega_1 / \omega_2 = n_1 / n_2 = r_1 / r_2 = -z_2 / z_1 \quad (5.2)$$

внутреннего зацепления (рис. 5.1 б.)

$$U_{12} = \omega_1 / \omega_2 = n_1 / n_2 = r_1 / r_2 = z_2 / z_1 \quad (5.3)$$

На кинематической схеме направление вращения зубчатых колес можно показать стрелками.

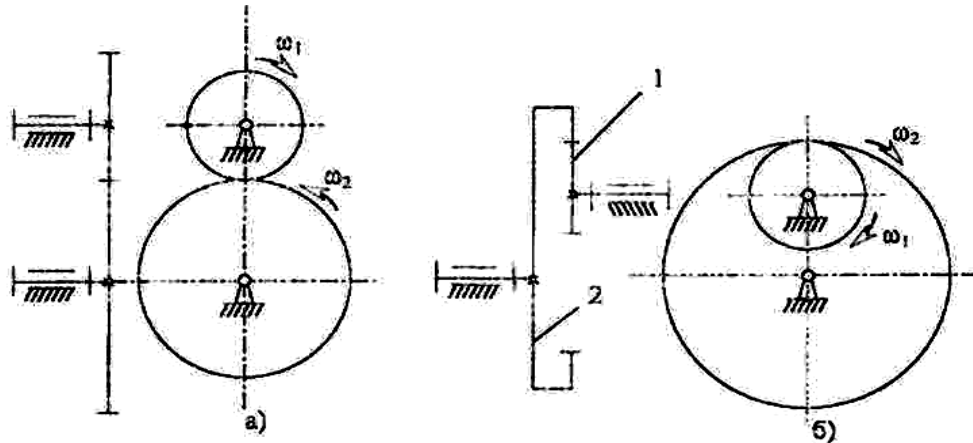


Рис. 5.1. Схемы простых зубчатых механизмов с параллельными неподвижными осями.

Многосменные зубчатые механизмы с неподвижными осями подразделяют на рядовые и ступенчатые (рис. 5.2 а, б).

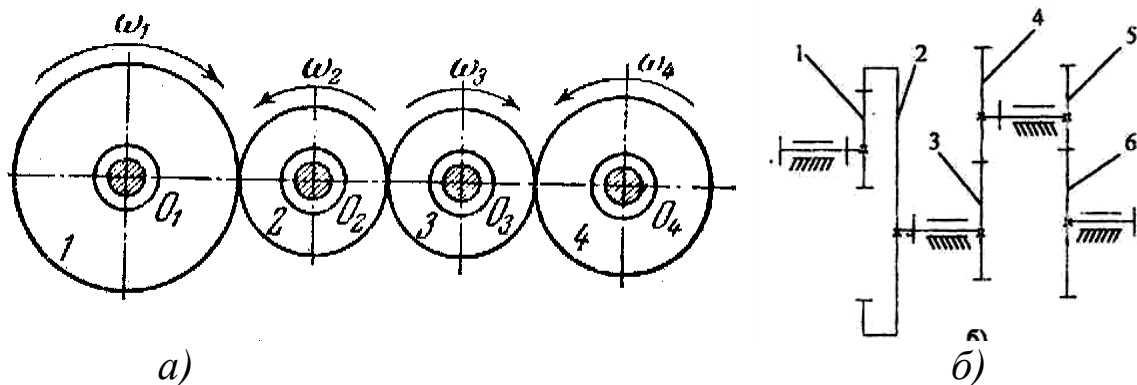


Рис. 5.2. Схемы многосменных зубчатых механизмов: а – рядовая (с паразитными колесами), б - ступенчатая

Общее передаточное отношение многосменного механизма равно произведению передаточных отношений отдельных механизмов (ступеней):

$$U_{i1} = U_I \cdot U_{II} \cdot U_{III} \cdot \dots \cdot U_N, \quad (5.4)$$

где U_I – передаточное отношение I ступени (пары зубчатых колес, находящихся в зацеплении), U_{II} – передаточное отношение II ступени и т.д.

В общем случае при i ведущих колесах и j ведомых колесах в механизме и k внешних зацеплениях формула (5.4) имеет вид:

$$U_{1n} = (-1)^k \frac{\prod_{j=1}^n z_j^{\text{ведом}}}{\prod_{i=1}^n z_i^{\text{ведущ}}} = \frac{\omega_1}{\omega_n} \quad (5.5)$$

где Π - знак произведения,

ω_1 – угловая скорость входного звена; ω_n – угловая скорость выходного звена.

В формуле (5.5) в числителе стоит произведение числа зубьев *ведомых* колес, в знаменателе - произведение числа зубьев *ведущих* колес.

Передаточное отношение механизма изображенного на рис. 5.2, а:

$$U_{14} = (-z_2/z_1) \cdot (-z_3/z_2) \cdot (-z_4/z_3) = -z_4/z_1$$

Общее передаточное отношение рядового механизма не зависит от числа зубьев промежуточных колес. Эти колеса применяют для измерения направления вращения выходного звена при неизменном направлении вращения входного либо для обеспечения передачи движения при большом расстоянии между осями вращения входного и выходного колес.

Для ступенчатого механизма (рис. 5.2, б) передаточное отношение определяется по формуле

$$U_{16} = (-1)^2 \frac{z_2 \cdot z_4 \cdot z_6}{z_1 \cdot z_3 \cdot z_5} = \frac{\omega_1}{\omega_6}$$

Знак передаточного отношения определяют также по правилу стрелок (по направлению вращения колес).

Подбирая числа зубьев в ступенчатом механизме, можно получить большие передаточные отношения, чем у рядовой передачи.

Объекты выполнения работы: модели зубчатых механизмов с неподвижными осями.

Содержание работы и отчета

1. Записать название и цель работы, а также краткие теоретические сведения
2. Используя модель механизма (в соответствии с вариантом), составить кинематическую схему зубчатого механизма. В соответствии с

вариантом определить (*записать*) числа зубьев зубчатых колес и угловую скорость входного звена.

3. Используя (5.4, 5.5) составить формулы для вычисления передаточных отношений ступеней редуктора и общего передаточного отношения от входного к выходному звену, определить их значения.

4. Определить угловую скорость выходного вала в соответствии с исходными данными и результатами вычислений

5. Результаты вычислений представить в таблице.

Таблица 5.1- Параметры зубчатого механизма

Числа зубьев				Передаточное отношение			Угловая скорость выходного колеса
Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	U_{12}	U_{34}	U_{14}	ω_4 , рад/с

6. Сформулировать выводы по работе.

Варианты заданий для выполнения работы

I Редуктор двухступенчатый цилиндрический

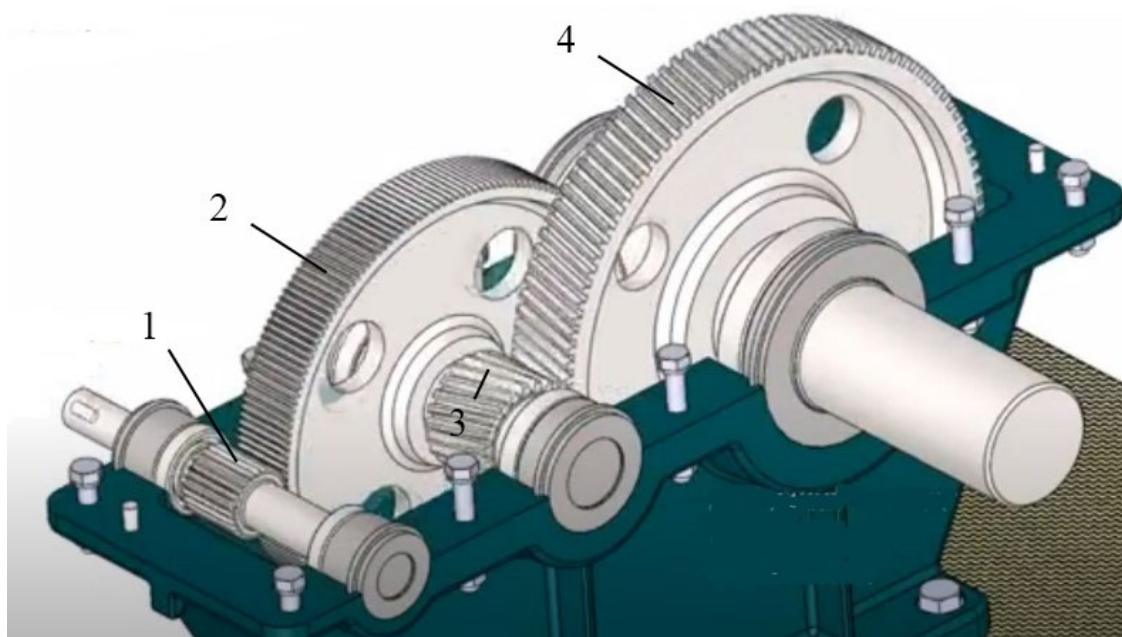


Рис.5.1– 3D-модель редуктора

Таблица 5.1– Исходные данные для расчета

Вариант	Числа зубьев колёс				Угловая скорость входного колеса
	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	ω_1 , рад/с
1	28	96	20	70	350
2	30	85	19	66	280
3	29	76	22	68	300
4	31	99	18	81	160
5	32	103	24	86	400
6	28	92	23	77	330
7	31	108	22	76	190
8	33	82	21	62	240
9	26	99	18	58	260
10	23	88	19	62	370

II Редуктор двухступенчатый цилиндрический

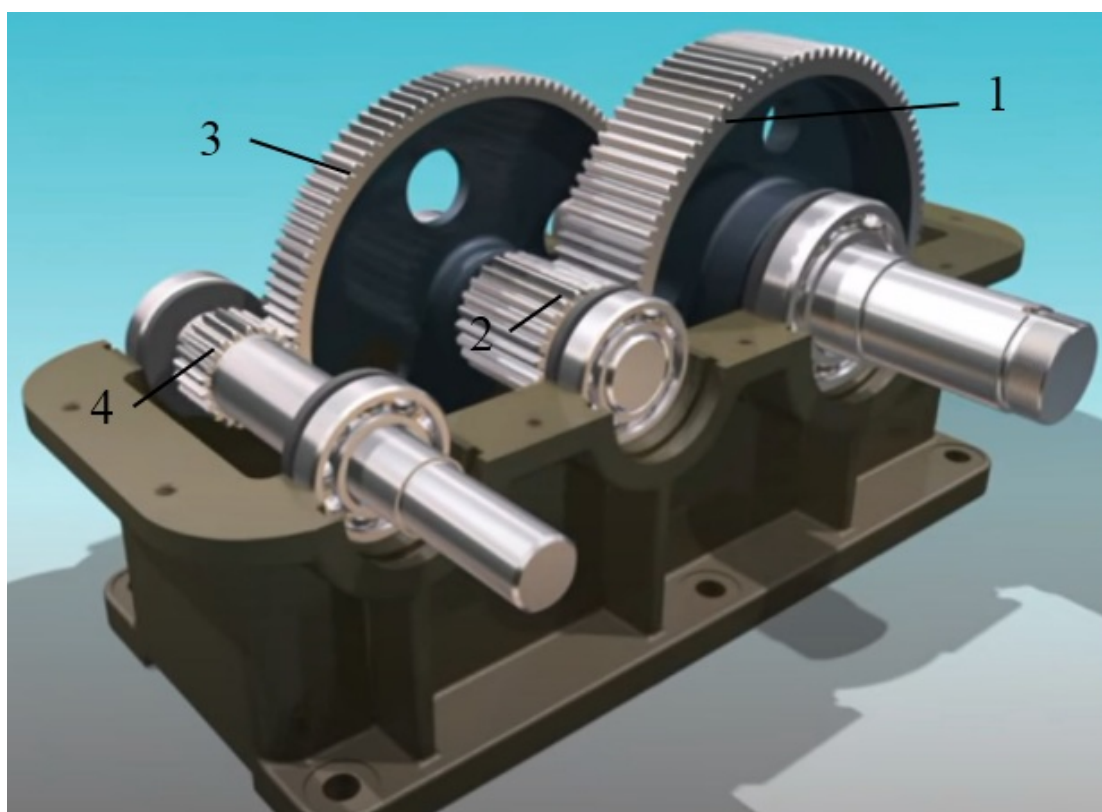


Рис. 5.11–3D-модель редуктора

Таблица 5.П– Исходные данные для расчета

Вариант	Числа зубьев колёс				Угловая скорость входного колеса
	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	ω_1 , рад/с
1	60	20	96	22	35
2	56	19	85	26	28
3	58	22	76	23	30
4	71	18	99	27	16
5	76	24	103	28	40
6	67	23	92	20	33
7	66	22	108	25	19
8	62	21	82	21	24
9	58	18	99	24	26
10	65	19	88	19	37

III Редуктор двухступенчатый коническо-цилиндрический

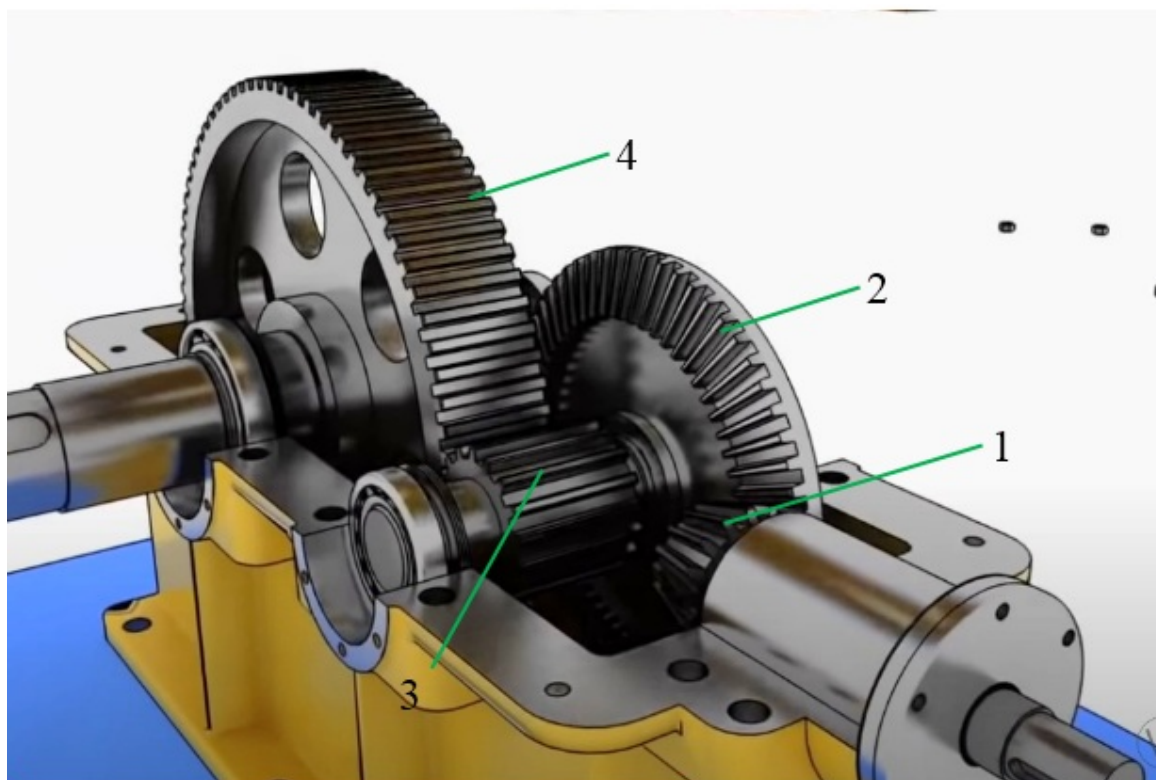


Рис. 5.П- 3D-модель редуктора

Таблица 5.II– Исходные данные для расчета

Вариант	Числа зубьев колёс				Угловая скорость входного колеса
	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	ω_1 , рад/с
1	18	76	20	80	330
2	20	75	19	86	290
3	19	66	22	78	300
4	21	69	18	91	170
5	22	73	24	89	410
6	18	77	23	87	330
7	21	81	22	86	190
8	19	72	21	64	240
9	20	70	18	68	260
10	23	65	19	72	370

IV Редуктор двухступенчатый цилиндрический соосный

Таблица 5.IV– Исходные данные для расчета

Вариант	Числа зубьев колёс				Угловая скорость входного колеса
	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	ω_1 , рад/с
1	18	76	20	70	330
2	20	75	19	66	290
3	19	66	22	68	300
4	21	69	18	81	170
5	22	73	24	86	410
6	18	77	23	77	360
7	21	81	22	76	180
8	19	72	21	62	230
9	20	70	18	58	260
10	23	65	19	62	370

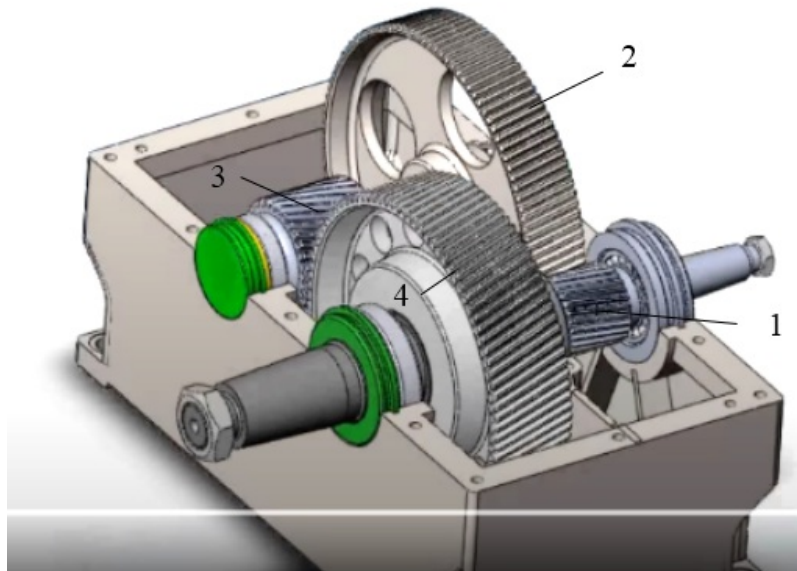
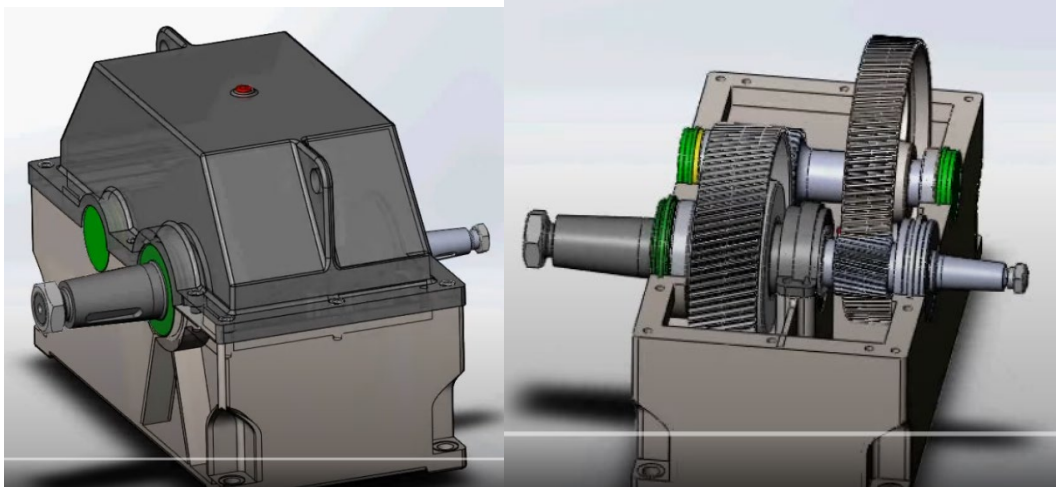


Рис. 5.III- 3D-модель редуктора

Контрольные вопросы

1. Для чего предназначены зубчатые механизмы с неподвижными осями?
2. Чем отличаются рядовые передачи от ступенчатых?
3. Как определяется передаточное отношение механизма?
4. Какие колеса называют паразитными и на что они влияют?
5. Для заданной схемы зубчатого механизма при известных числах зубьев колес и скорости входного звена определить скорость вращения выходного звена (или наоборот).

6 Приводы. Основные силовые и кинематические характеристики

Цель занятия: приобретение знаний и навыков определения основных кинематических и силовых параметров механических передач

Краткие теоретические сведения

Одним из основных элементов машины является передаточный механизм, установленный между двигателем и исполнительным органом.

На рис. 6.1 дана типовая схема машины.

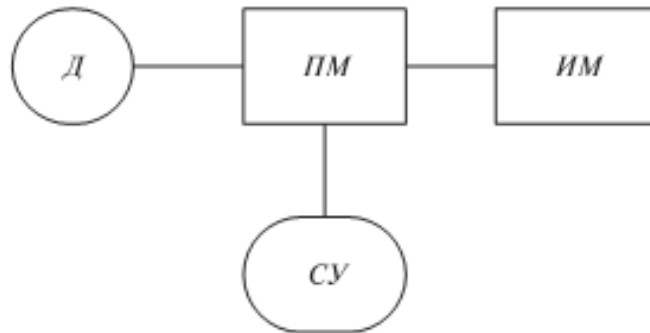


Рис. 6.1: Д – двигатель, ПМ – передаточный механизм, ИМ – исполнительный механизм, СУ – система управления приводом

Передаточный механизм должен обеспечивать с заданной степенью точности передачу движения и его преобразование, быть экономичным и безопасным в работе.

1. Передаточное отношение привода

Важнейшей характеристикой передач вращательного движения является **передаточное отношение**, которое показывает, во сколько раз угловая скорость ω (или частота вращения n) ведомого звена больше или меньше угловой скорости (частоты вращения) ведущего звена.

$$U = \frac{\omega_{\text{ведущ}}}{\omega_{\text{ведом}}} = \frac{n_{\text{ведущ}}}{n_{\text{ведом}}}, \quad (6.1)$$

где $\omega_{\text{ведущ}}$ – угловая скорость ведущего звена;
 $\omega_{\text{ведом}}$ – угловая скорость ведомого звена.

Для зубчатых передач передаточное отношение можно определить, зная число зубьев каждого из колес:

$$U = \frac{z_2}{z_1} \quad (6.2)$$

Для цепных передач передаточное отношение можно определить, зная число зубьев ведущей и ведомой звездочек:

$$U = \frac{z_2}{z_1} \quad (6.3)$$

Для ременных передач передаточное отношение можно определить, зная диаметры ведущего и ведомого шкивов:

$$U = \frac{d_2}{d_1} \quad (6.4)$$

Для фрикционных передач передаточное отношение можно определить, зная диаметры ведущего и ведомого катков:

$$U = \frac{d_2}{d_1} \quad (6.5)$$

Привод может включать несколько передаточных механизмов (ступеней). При этом значение общего передаточного отношения определяется произведением передаточных отношений отдельных кинематических ступеней привода

$$u_{об} = u_{12} \cdot u_{23} \dots u_n = \frac{\omega_1}{\omega_n} \quad (6.6)$$

Пример 1.

Определить частоту вращения вала 3, если диаметры шкивов равны соответственно (мм): $d_1 = 300$, $d_2 = 750$, числа зубьев конической шестерни и колеса: $z_2 = 50$, $z_3 = 100$, $n_1 = 2500$ об/мин (рис. 6.2).

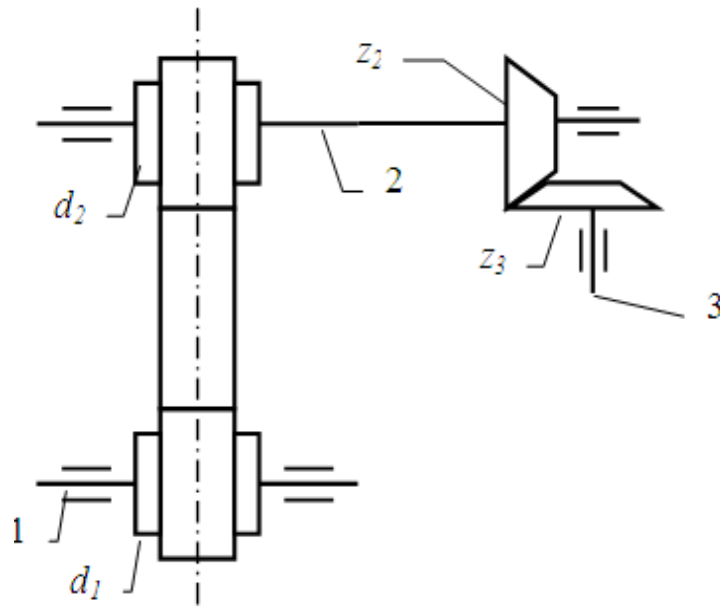


Рис. 6.2

Решение.

Данный передаточный механизм является двухступенчатым: первая ступень – ременная передача (вращение передается с шкива 1 на шкив 2), вторая ступень – коническая зубчатая передача (вращение передается с шестерни 2 на колесо 3).

Общее передаточное отношение определим по формуле (6.6):

$$u_{об} = u_{12} \cdot u_{23} = \frac{n_1}{n_3}$$

$$u_{12} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{750}{300} = 2.5$$

$$u_{23} = \frac{z_3}{z_2} = \frac{100}{50} = 2$$

Тогда

$$u_{об} = u_{12} \cdot u_{23} = 2,5 \cdot 2 = 5$$

и

$$n_3 = \frac{n_1}{u_{об}} = \frac{2500}{5} = 500 \text{ об / мин}$$

2. Коэффициент полезного действия передачи, мощность

Если к ведущему валу передачи подвести мощность P_1 , то с ведомого можно будет отобрать мощность P_2 , которая несколько

меньше затраченной P_1 (следствие потерь на трение и др. сопротивления). Эти потери выражаются коэффициентом полезного действия:

$$\eta = P_2 / P_1 \quad (6.7)$$

Поскольку

$$P = T \cdot \omega \quad (6.8)$$

и

$$\omega = (\pi \cdot n) / 30 \quad (6.9)$$

где T – момент вращения;

ω – угловая скорость,

$$\text{то} \quad \eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2 \omega_2}{T_1 \omega_1} = \frac{T_2 n_2}{T_1 n_1} = \frac{T_2}{T_1 u_{12}} \quad (6.10)$$

В силовой (понижающей) передаче (редуктор)

$$\omega_1 > \omega_2, \quad T_2 > T_1, \quad T_2 = T_1 \cdot u_{12} \cdot \eta$$

Пример 2.

Определить мощность и крутящий момент, передаваемые колесом, если известны числа зубьев шестерни и колеса: ($Z_1 = 18, Z_2 = 45$). $T_1 = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $n_1 = 900 \text{ об/мин}$. Коэффициент полезного действия передачи принять $\eta = 0.95$

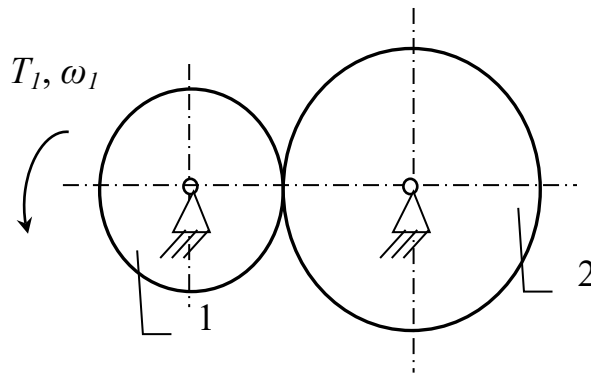


Рис. 6.3

Решение (см. рис.6.3).

Мощность на ведущем колесе определим по формуле (6.8):

$$P_1 = T_1 \cdot \omega_1,$$

где $\omega_1 = (\pi \cdot n_1) / 30 = (\pi \cdot 900) / 30 = 94,2 \text{ рад/с}$ – угловая скорость ведущего колеса (шестерни)

$$P_1 = 10 \cdot 94,2 = 942 \text{ Вт}$$

Мощность на ведомом колесе определим из (6.7):

$$P_2 = P_1 \cdot \eta = 942 \cdot 0,95 = 895 \text{ Вт} \quad (P_2 < P_1)$$

Передаточное отношение

$$U = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Для зубчатых передач передаточное отношение можно определить, зная число зубьев каждого из колес:

$$U = \frac{z_2}{z_1} = \frac{45}{18} = 2.5$$

Тогда

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{U} = \frac{94.2}{2.5} = 37.7 \quad (\text{рад/с})$$

Тогда крутящий момент на валу ведомого колеса будет равен:

$$T_2 = \frac{P_2}{\omega_2} = \frac{895}{37.7} = 23.7 \quad \text{Н}\cdot\text{м}$$

Ответ: $P_2 = 895$ Вт, $T_2 = 23.7$ Н·м

Контрольные вопросы

1. Назначение передаточного механизма
2. Основные типы механических передач
3. Как определяется передаточное отношение различных механических передач?
4. Силовые характеристики механических передач

7. Расчет стержней на растяжение-сжатие

Для заданной схемы (рис.7.1) требуется:

1. Построить эпюру осевых нагрузок.
2. Определить размер *квадратного* сечения стержня исходя из условий прочности.

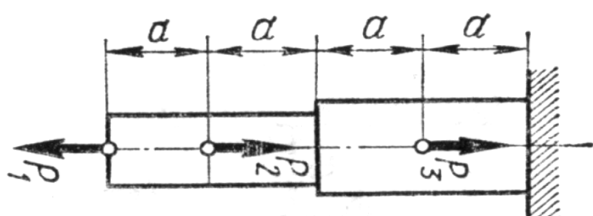


Рис. 7.1 Расчётная схема бруса

Исходные данные

Сила, кН			Допускаемое нормальное напряжение $[\sigma]$, МПа
P_1	P_2	P_3	
12	7	8	220

Решение.

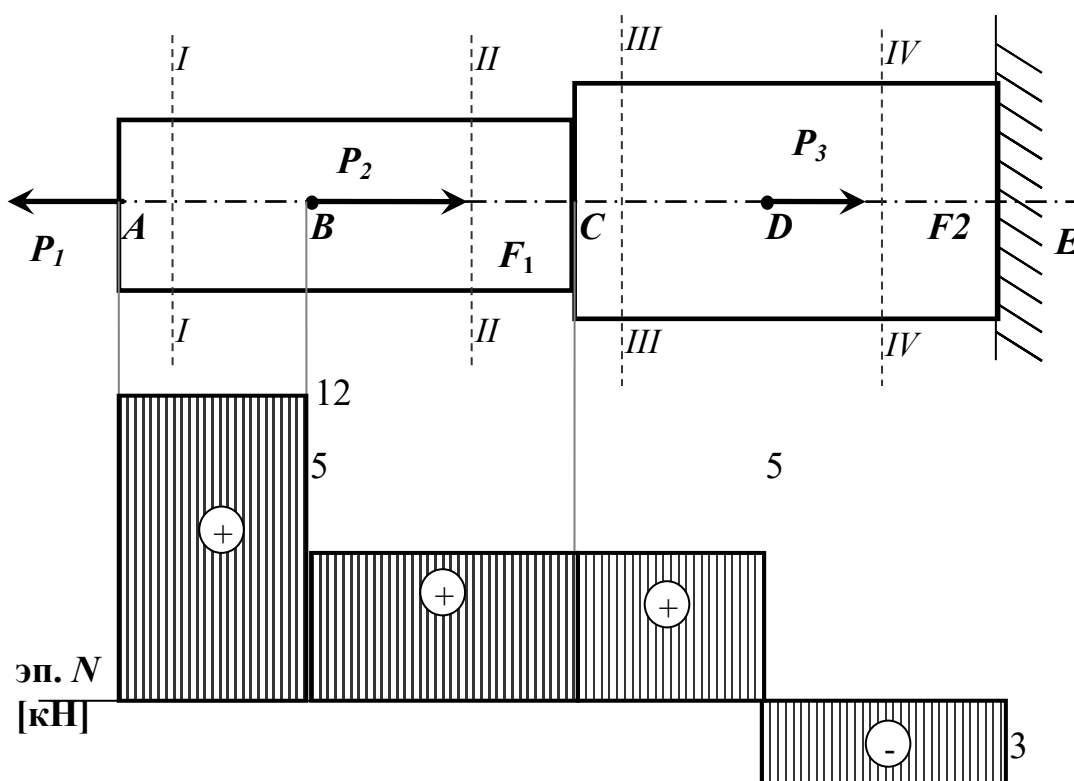


Рис. 7.2 Расчётная схема и эпюра внутренних продольных усилий бруса

Расставим характерные точки (сечения) – те, в которых приложены нагрузки или изменяется характер поперечного сечения (форма, размер).

В данном случае таких характерных точек 5: A, B, C, D, E .

Таким образом, необходимо рассмотреть 4 характерных участка бруса, начиная с левого конца его, т.е. с точки A .

Рассмотрим характерный участок AB .

Мысленно проведём поперечное сечение бруса $I-I$ между точками A и B , отбросим правую часть бруса, оставив в рассмотрении левую, действие отброшенной части заменив реакцией.

Из условия равновесия (равенство проекций сил на ось x , получим:

Из условия равновесия (равенство проекций сил на ось x , получим:

$$N = P_1 = 12 \text{ кН},$$

т.е. внутренняя продольная сила в сечении $I-I$ является растягивающей.

Несложно установить, что значение внутренней силы N неизменно на всём участке AB .

Выбирая масштаб, строим соответствующий участок эпюры продольных сил (в размерности кН), сила N на участке AB постоянна.

Далее рассмотрим участок BC .

Проведем сечение $II-II$ в произвольном месте между точками B и C . Отбросим левую часть, её действие заменим реакцией, направим реакцию в сторону от сечения, считая её растягивающей силой.

Получим баланс сил, показанный на рис. 5.

Из условия равновесия имеем:

$$N = P_1 - P_2 = 12 - 7 = 5 \text{ кН},$$

Строим соответствующий участок эпюры продольных сил, сила N на участке BC постоянна.

Аналогично рассматриваем остальные участки стержня, проводя сечения $III-III$ и $IV-IV$ соответственно и вновь отбрасывая левую часть бруса.

Участок CD :

$$N = P_1 - P_2 = 12 - 7 = 5 \text{ кН},$$

Участок DE :

$$N = P_1 - P_2 - P_3 = 12 - 7 - 8 = -3 \text{ кН}$$

Условие прочности при растяжении (сжатии) стержня имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{N}{A} \right|_{\max} \leq [\sigma], \quad (7.1)$$

где σ_{\max} – наибольшее по модулю нормальное напряжение на соответствующей ступени стержня, N – продольное усилие в сечении стержня, A – площадь поперечного сечения соответствующей ступени бруса, $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение, зависящее от материала стержня.

Поскольку поперечные сечения бруса квадратные, то сторона квадрата h определится как: $h = \sqrt{A}$.

В данном случае брус имеет две ступени, соответственно необходимо рассмотреть условия равновесия (1) для каждой из ступеней.

Размер сечения для ступени 1 определится из выражения:

$$h_1 \geq \sqrt{\frac{N_I}{[\sigma]}} \quad (7.2)$$

Размер сечения для ступени 2 определится из выражения:

$$h_2 \geq \sqrt{\frac{N_{II}}{[\sigma]}} \quad (7.3)$$

Подставляя числовые данные в выражения (7.2) и (7.3), определим размеры поперечных сечений стержня, при которых прочность бруса будет обеспеченной.

$$h_1 \geq \sqrt{\frac{12 \cdot 10^3 \text{ Н}}{220 \cdot 10^6 \text{ Па}}} = 0,0074 \text{ (м) или } 8 \text{ мм}$$

$$h_2 \geq \sqrt{\frac{5 \cdot 10^3 \text{ Н}}{220 \cdot 10^6 \text{ Па}}} = 0,0048 \text{ (м) или } 5 \text{ мм}$$

8 Расчет валов на кручение

Для заданной схемы вала (рис. 8.1) требуется:

1. Построить эпюру крутящих моментов.

Определить диаметры круглых сечений вала исходя из условий прочности и жёсткости.

Модуль упругости второго рода принять равным $G = 8 \cdot 10^4$ МПа

Исходные данные для расчёта вала

Крутящий момент, кН·м			Допускаемое касательное напряжение $[\tau]$, МПа	Допускаемый относительный угол закручивания $[\theta]$, рад
T_1	T_2	T_3		
2	3	1	35	0,003

Решение.

Из условия равновесия $\Sigma T = 0$ находим значение момента X :

$$T_1 - T_2 - T_3 + X = 0;$$

$$X = -T_1 + T_2 + T_3 = -2 + 3 + 1 = 2 \text{ кН·м}.$$

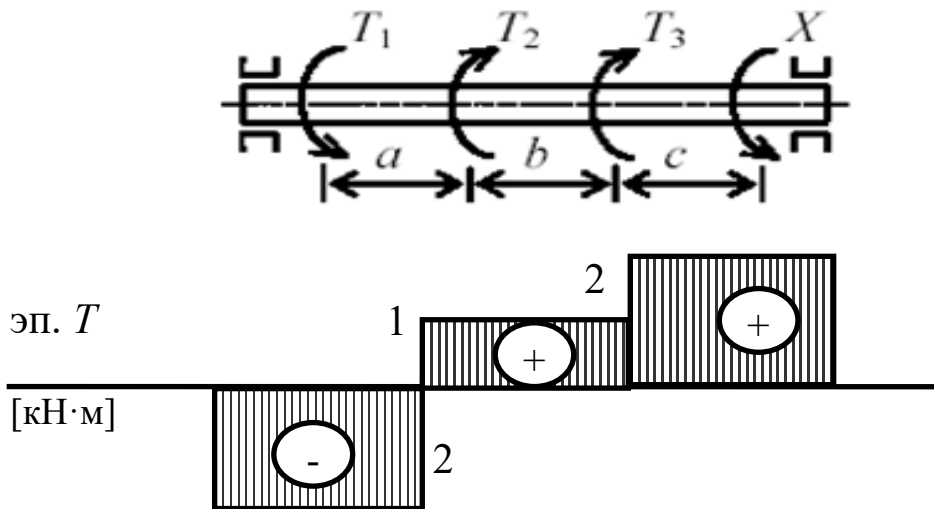


Рис. 8.1 Расчётная схема вала и эпюра крутящих моментов

Используя метод сечений, вычисляем крутящие моменты на участках вала.

$$\text{Участок } AB: M = -T_1 = -2 \text{ кН·м};$$

$$\text{Участок } BC: M = -T_1 + T_2 = -2 + 3 = 1 \text{ кН·м};$$

$$\text{Участок } CD: M = -T_1 + T_2 + T_3 = -2 + 3 + 1 = 2 \text{ кН·м}.$$

По найденным значениям строим эпюру крутящих моментов

Диаметр вала определим из условия прочности на кручение:

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau], \quad (4)$$

где $W_p = 0,2d^3$ – полярный момент сопротивления вала круглого сечения.

Тогда диаметр вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{T_{\max}}{0,2[\tau]}} \quad (8.1)$$

Подставляя числовые значения, получим

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 35 \cdot 10^6}} = 0,0659 \text{ м}$$

Округляя полученное значение диаметра до стандартного значения, получим

$$d = 70 \text{ мм}$$

Определим диаметр вала из условия жёсткости:

$$\Theta_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_p} \leq [\Theta], \quad (8.2)$$

где G – модуль упругости 2 рода

$I_p = 0,1d^4$ – момент инерции круглого сечения вала.

Тогда

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{T_{\max}}{0,1G \cdot [\Theta]}} \quad (8.3)$$

Подставляя числовые данные, получим:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,003}} = 0,096 \text{ м}$$

Округляя до стандартного значения, получим $d = 100$ мм.

Из двух расчётных диаметров (по критерию прочности вала и по условию жёсткости) выбираем наибольшее значение, т.е. принимаем $d = 100$ мм

9 Расчет балки на поперечный изгиб

Для заданной схемы балки (рис. 9.1) требуется:

1. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.
2. Для опасного сечения определить размер квадратного сечения из условия изгибной прочности.

Данные для расчёта взять в таблице 9.1 (если какая-либо величина в таблице имеет значение со знаком «-», то она считается направленной в противоположную сторону).

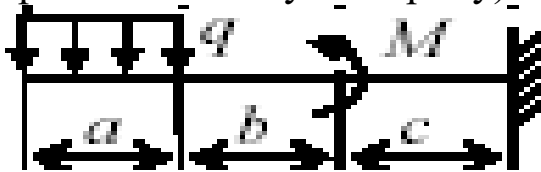


Рис. 9.1 Расчётная схема балки

Таблица 9.1 Исходные данные для расчёта балки

Распределенная нагрузка q , кН/м	Сосредоточенная сила P , кН	Момент пары сил M , кН·м	Линейные размеры, м			Допускаемое нормальное напряжение $[\sigma]$, МПа
			a	b	c	
8	2	0.5	0.3	0.5	0.2	190

Решение

Для данной схемы консольной балки реакции в заделке можно не определять, если при этом начинать решение задачи с наиболее удалённого от заделки конца.

Расставим характерные точки.

Таким образом, необходимо рассмотреть 3 характерных участка, начиная с левого конца балки.

Используем метод сечений.

Рассмотрим участок AB .

Проведем сечение $I-I$ в произвольном месте балки между точками A и B , зададим положение сечения координатой x_1 , отсчитываемой от левого конца балки, отбросим правую часть балки, оставив в рассмотрение левую от сечения часть, а действие отброшенной части заменим реакцией.

Используем метод сечений.

Рассмотрим участок AB .

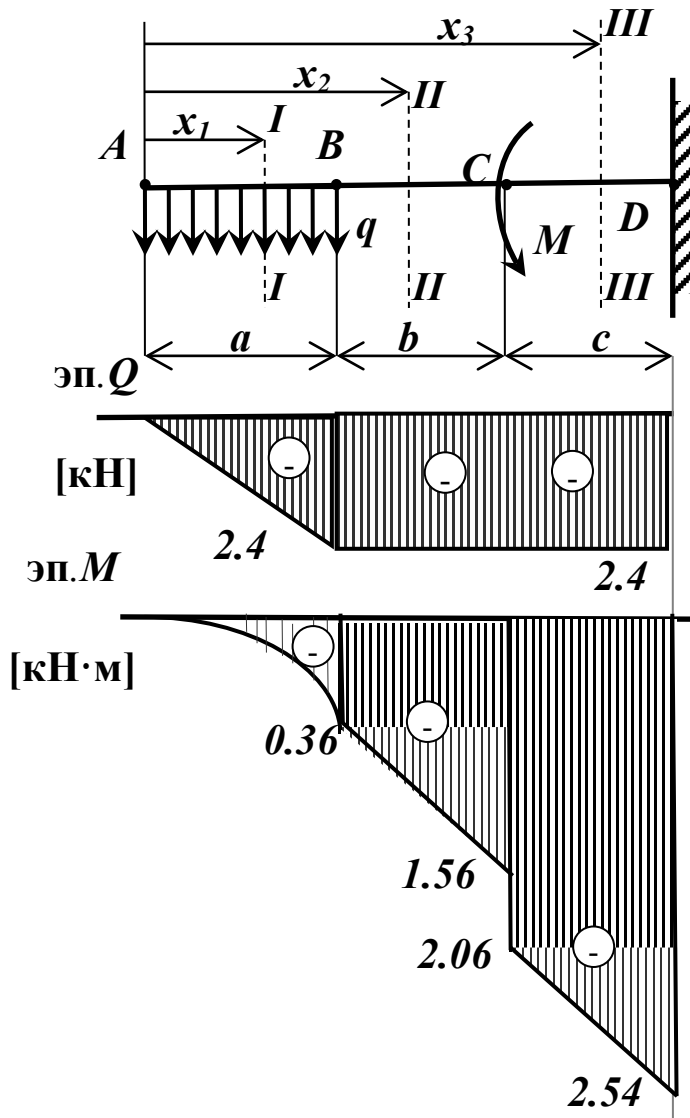


Рис. 9.2 Расчётная схема балки на изгиб и эпюры внутренних силовых факторов

Проведем сечение $I-I$ в произвольном месте балки между точками A и B , зададим положение сечения координатой x_1 , отсчитываемой от левого конца балки, отбросим правую часть балки, оставив в рассмотрение левую от сечения часть, а действие отброшенной части заменим реакцией.

$$Q = -qx_1$$

Т.е. поперечная сила на участке AB переменная, линейно зависит от координаты x_1 .

Определим значение поперечной силы в крайних точках участка AB ; при этом, поскольку сечение проводили в произвольном месте

на участке AB , необходимо рассмотреть всю совокупность возможных положений сечений, т.е.

$$0 \leq x_1 \leq a.$$

При $x_1 = 0$

$$Q = -8 \cdot 0 = 0 \text{ кН}$$

При $x_1 = a = 0,3 \text{ м}$

$$Q = -8 \cdot 0,3 = -2,4 \text{ кН}$$

Запишем уравнение изгибающего момента в сечении $I-I$.

$$M = -qx_1 \cdot \frac{x_1}{2} = -\frac{qx_1^2}{2}$$

Изгибающий момент на участке AB определяется квадратичной зависимостью.

График изгибающего момента на участке AB можно построить по 3 точкам, используя основные свойства эпюр Q и M : на данном участке эпюра изгибающего момента представляет собой параболу, выпуклостью направленной к распределённой нагрузке.

При $x_1 = 0$

$$M = -8 \cdot 0^2 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

При $x_1 = a/2 = 0,15 \text{ м}$

$$M = -8 \cdot 0,15^2 / 2 = -0,09 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

При $x_1 = a = 0,3 \text{ м}$

$$M = -8 \cdot 0,3^2 / 2 = -0,36 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Участок BC .

Проводим сечение $II-II$, на расстоянии x_2 от левого края балки, отбрасываем правую часть, заменив её действие реакцией. При этом

$$a \leq x_2 \leq a + b$$

Запишем уравнения для поперечной силы Q и изгибающего момента M для данного сечения.

$$Q = -q \cdot a$$

Т.е. на участке BC значение силы Q не зависит от положения сечения и равно:

$$Q = -8 \cdot 0,3 = -2,4 \text{ кН}$$

Изгибающий момент:

$$M = -qa \cdot (x_2 - a/2)$$

линейно зависит от координаты поперечного сечения.

При $x_2 = a = 0,3 \text{ м}$

$$M = -8 \cdot 0,3 \cdot (0,3 - 0,3/2) = -0,36 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

При $x_2 = a + b = 0,3 + 0,5 = 0,8$ м

$$M = -8 \cdot 0,3 \cdot (0,8 - 0,3/2) = -1,56 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Участок CD.

Проводим сечение III-III, на расстоянии x_3 от левого края балки, отбрасываем правую часть, заменив её действие реакцией. При этом

$$a + b \leq x_3 \leq a + b + c$$

Запишем уравнения для поперечной силы Q и изгибающего момента M для данного сечения.

$$Q = -q \cdot a$$

Т.е. на участке CD значение силы Q не зависит от положения сечения и равно:

$$Q = -8 \cdot 0,3 = -2,4 \text{ кН}$$

Изгибающий момент:

$$M = -qa \cdot (x_3 - a/2) - M$$

линейно зависит от координаты поперечного сечения.

При $x_3 = a + b = 0,3 + 0,5 = 0,8$ м

$$M = -8 \cdot 0,3 \cdot (0,8 - 0,3/2) - 0,5 = -2,06 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

При $x_3 = a + b + c = 0,3 + 0,5 + 0,2 = 1,0$ м

$$M = -8 \cdot 0,3 \cdot (1,0 - 0,3/2) - 0,5 = -2,54 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

По полученным данным строим эпюру поперечных сил и эпюру изгибающих моментов (рис. 9.2).

Условие изгибной прочности балки записывается выражением:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_z} \leq [\sigma], \quad (9.1)$$

M_{\max} – максимальный изгибающий момент (в опасном сечении), Н·м;

W_z – осевой момент сопротивления поперечного сечения балки, м³,

для квадратного сечения $W_z = h^3/6$ (h – сторона квадрата, м)

$[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение.

Тогда из формулы (9.1) выразим размер квадратного сечения:

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{6|M_{\max}|}{[\sigma]}} \quad (9.2)$$

Подставляя числовые данные, получим:

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 2,54 \cdot 10^3}{190 \cdot 10^6}} = 0,043 \text{ м}$$

Принимаем $h = 45$ мм.

10 Построение трехмерной модели балки и проведение прочностных расчетов

Задание

Построить трехмерную модель балки, показанной на рис. 10.1, по численным значениям параметров, приведенным в табл.10.1. Провести расчет балки на прочность.

Выполнить отчет о проведении работы, описать последовательность действий и используемые для построения детали команды.

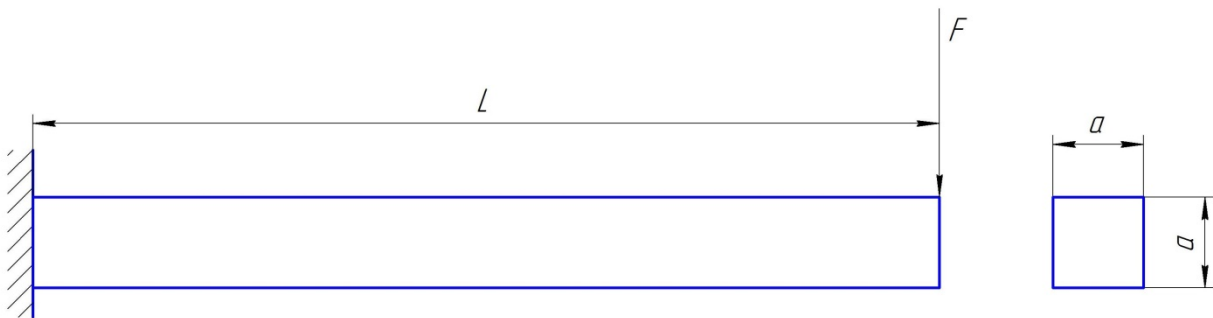


Рис. 10.1 Геометрические размеры балки

Табл. 10.1 - Параметры балки

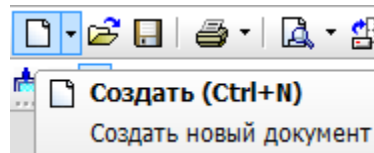
№	a , мм	l , мм	F , Н
1	80	1000	10000
2	90	500	9000
3	60	600	11000
4	100	650	10500
5	120	700	12000
6	110	580	12500
7	150	950	11500
8	180	1500	13000
9	140	1200	13500
10	115	1300	14000
11	90	840	14500
12	70	1200	15000
13	85	750	9500
14	64	860	10000
15	80	1400	10500

Ход выполнения работы

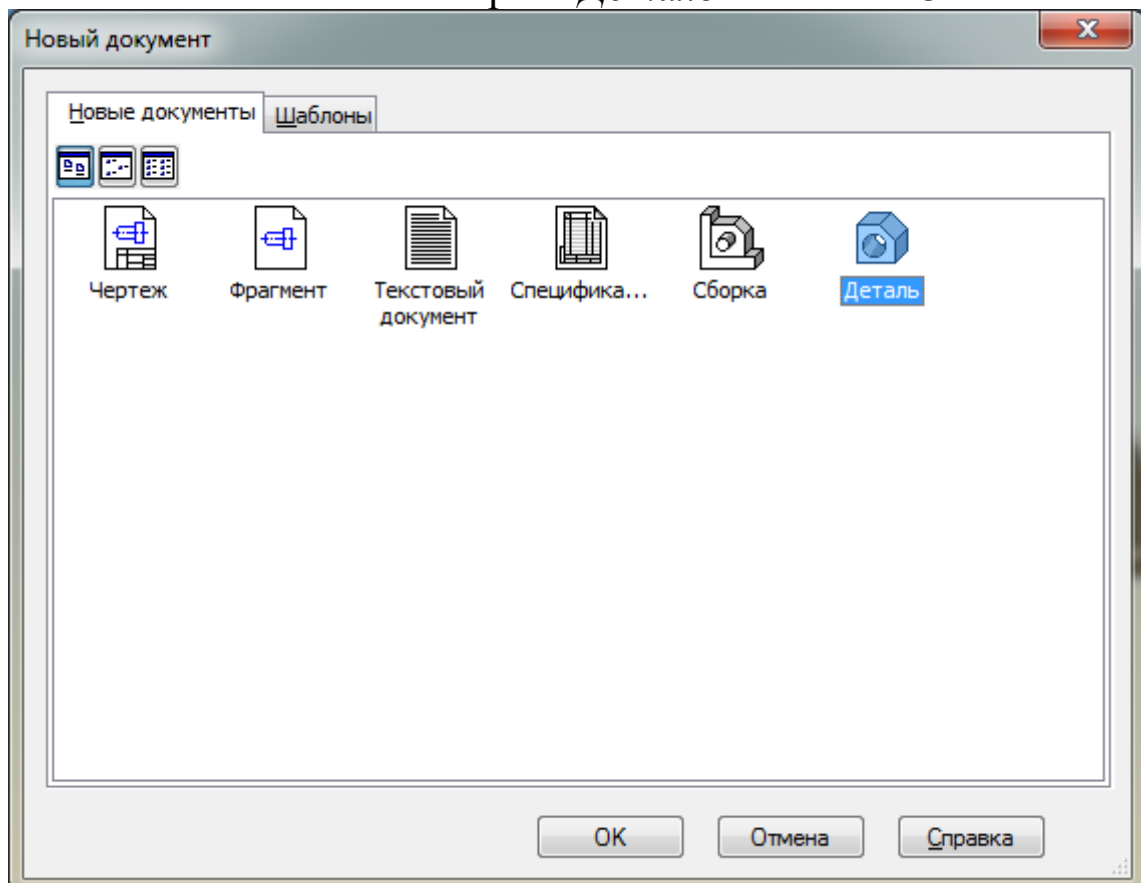
Рассмотрим пример построения трехмерной модели балки со следующими геометрическими размерами.

a , мм	l , мм	F , Н
100	1000	10000

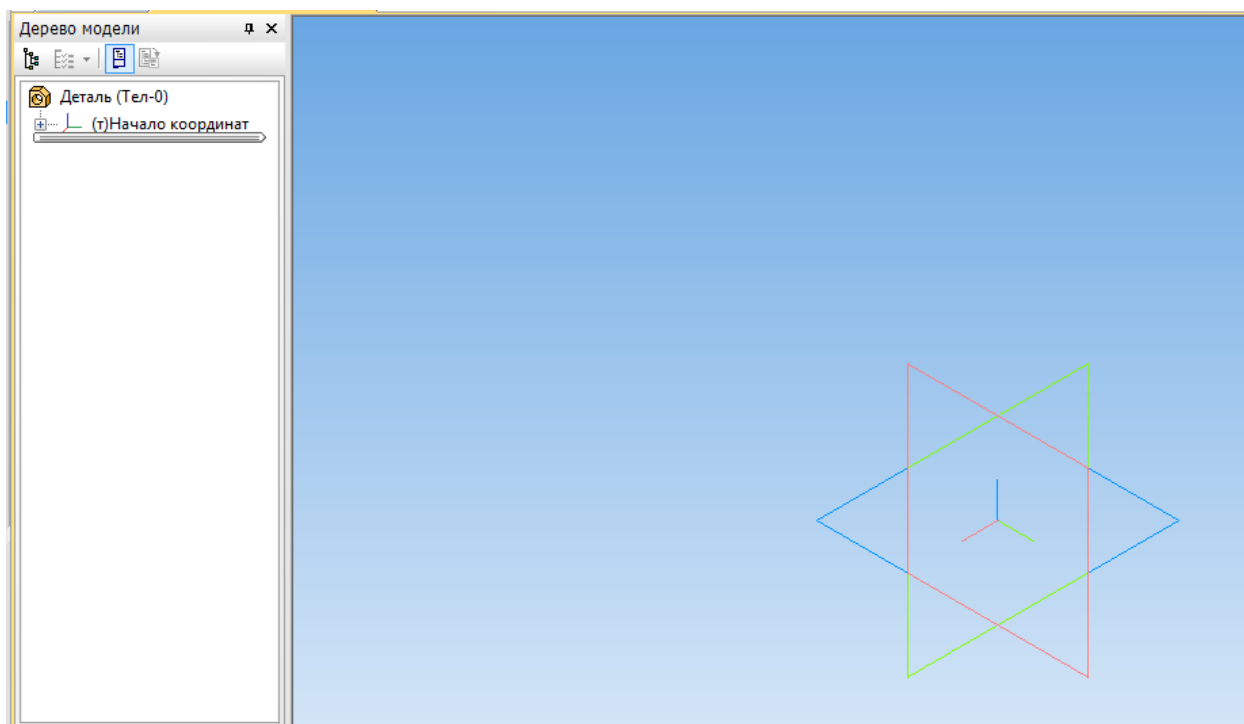
Для создания файла детали нажмите *Создать* на *Панели инструментов*.



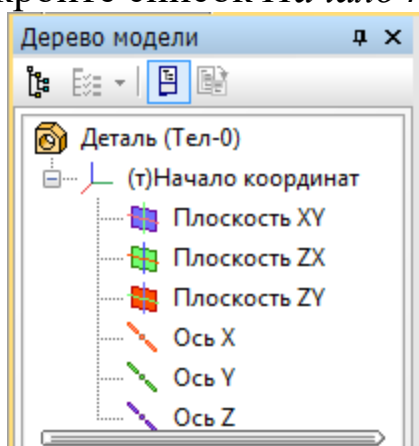
В появившемся окне выберите *Деталь*. Нажмите *ОК*.



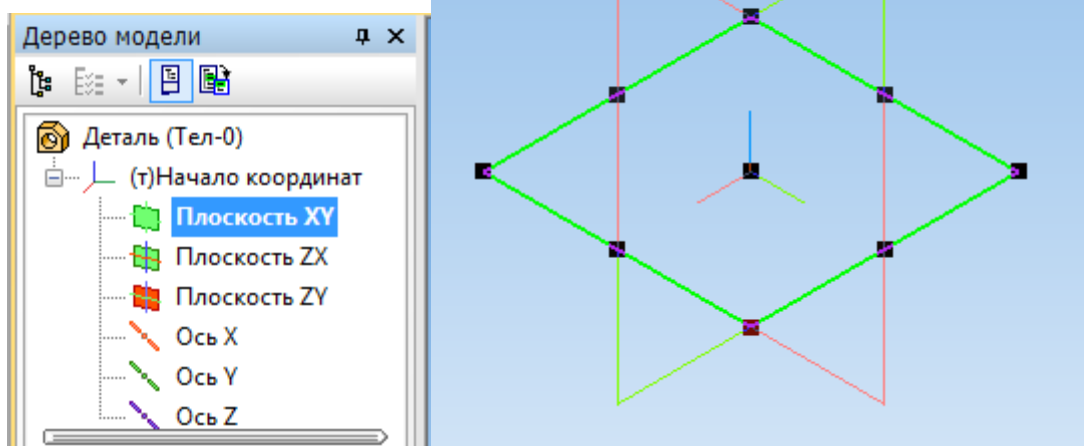
Появляется окно детали.






Выберите плоскость, в которой будем выполнять эскиз. Для этого в *Дереве модели* раскройте список *Начало координат*

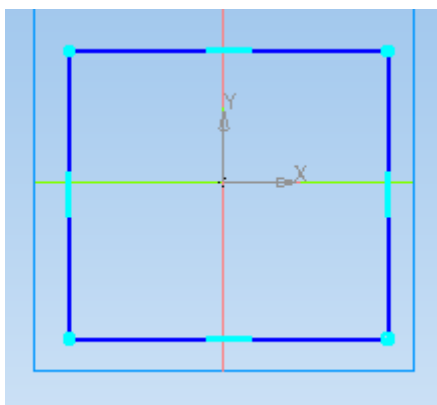





и выберите *Плоскость XY*, нажав по ней левой клавишей мыши. *Плоскость XY* будет выглядеть следующим образом.

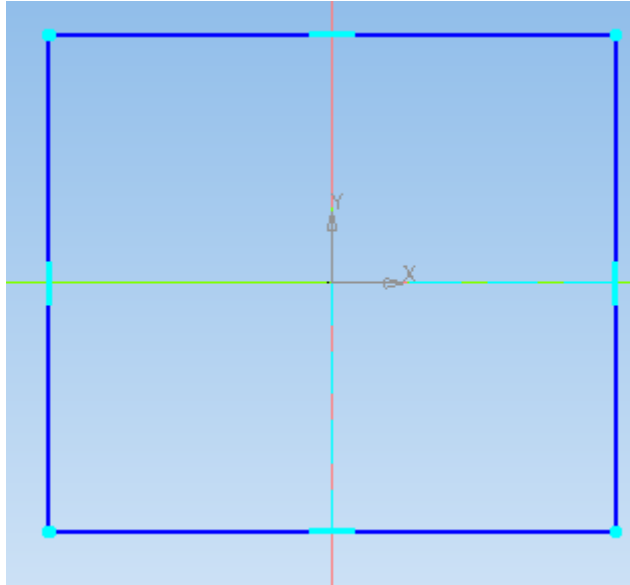




На верхней панели выберите *Эскиз* .

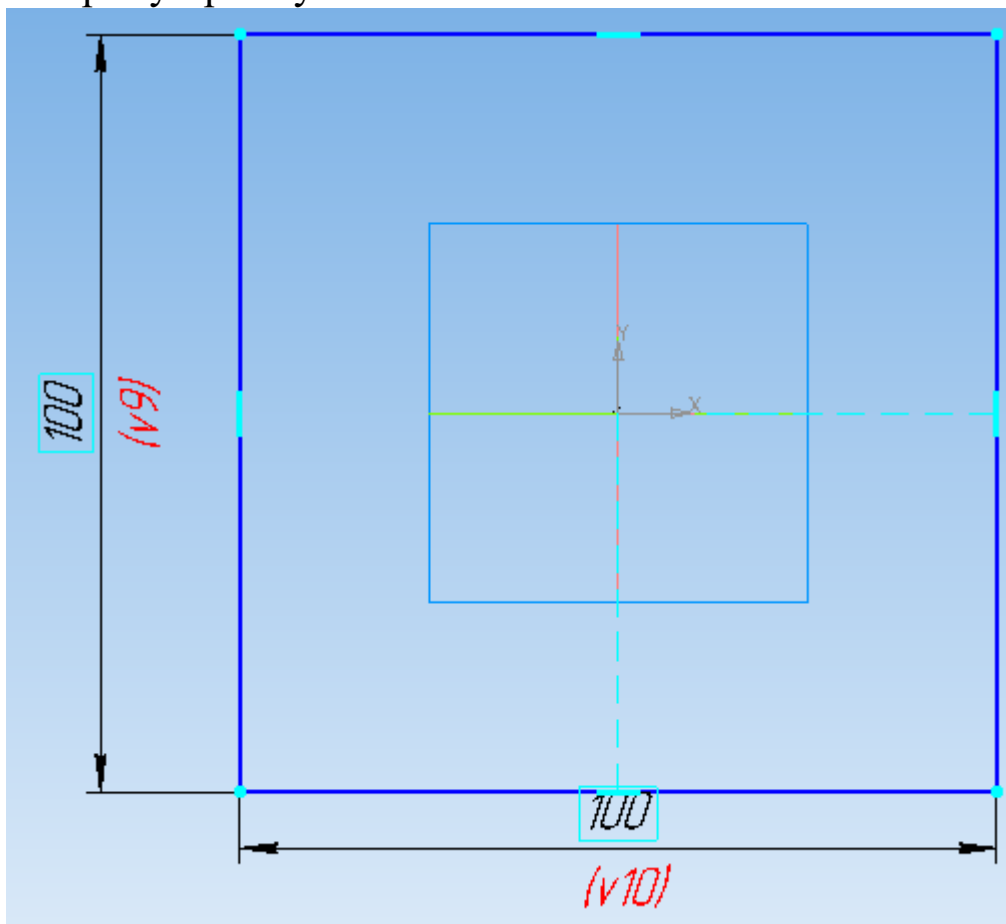
Постройте прямоугольник так, чтобы начало координат располагалось внутри прямоугольника, используя вкладку *Прямоугольник*  панели *Геометрия* .





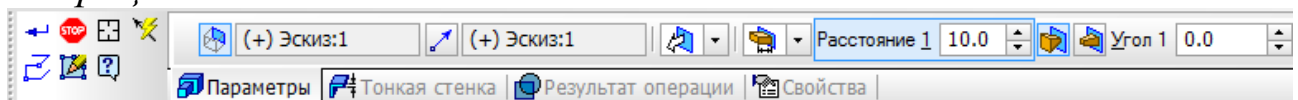
Используя команды *Выровнять точки по горизонтали*  для начала координат и середины вертикальной стороны прямоугольника и *Выровнять точки по вертикали*  для начала координат и середины горизонтальной стороны прямоугольника (панель *Параметризация* ) , расположите прямоугольник симметрично относительно начала координат.



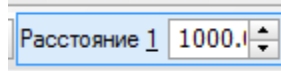
Выберите *Линейный размер*  панели *Размеры*  и укажите длину и ширину прямоугольника 100 мм и 100 мм соответственно.



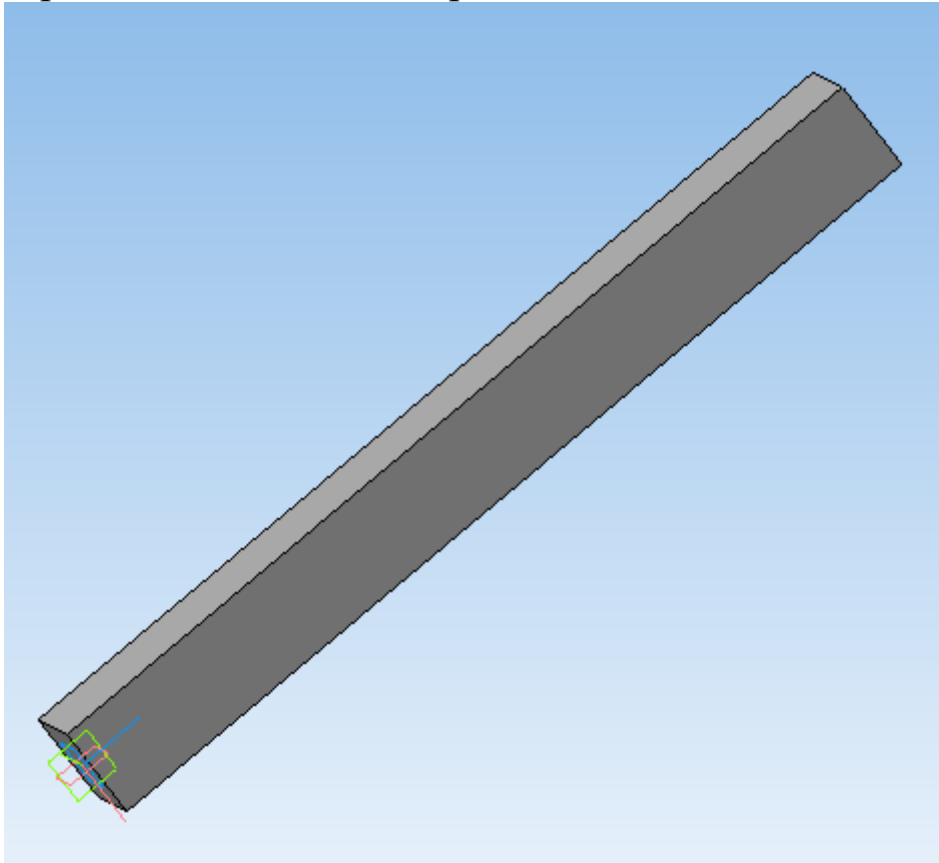
Перейдите на панель *Редактирование детали*  и выберите *Операцию выдавливания* .



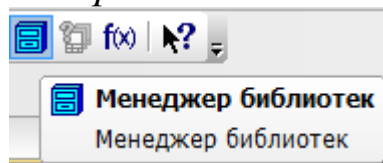
На вкладке *Параметры* панели свойств задайте *Расстояние*, на которое будет выдавливаться эскиз, 1000 мм.



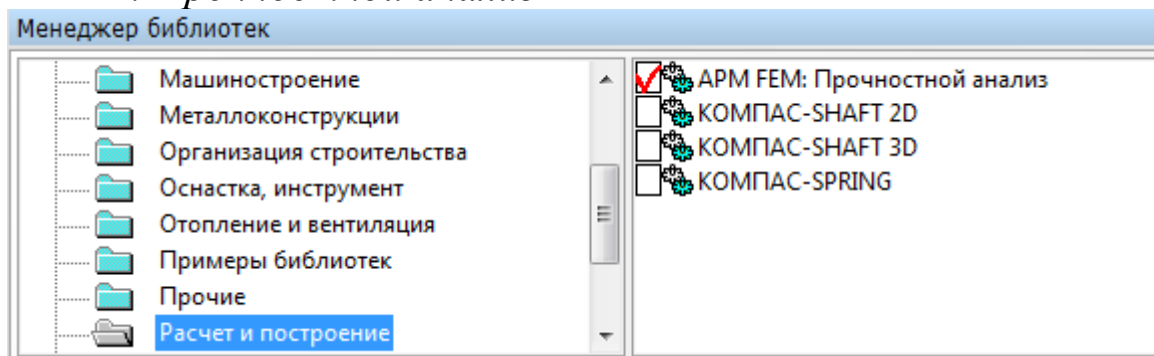
Подтвердите выполнение операции  !.



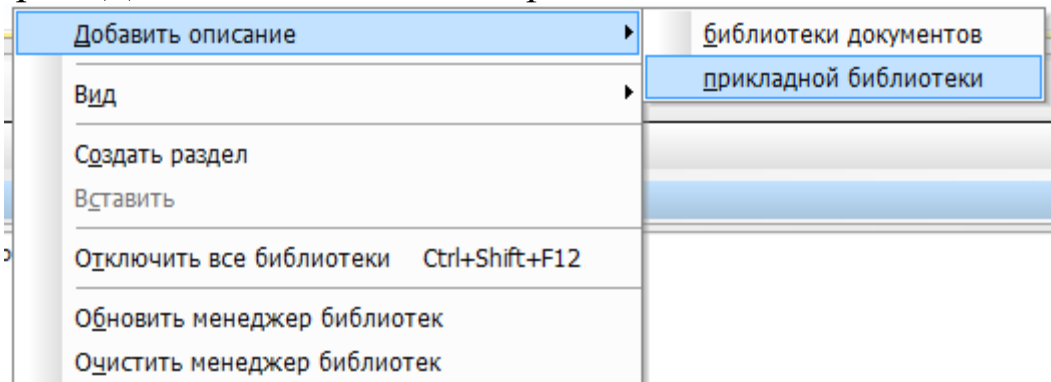
Запустите библиотеку прочностных расчетов. Для этого на верхней панели выберите *Менеджер библиотек*.



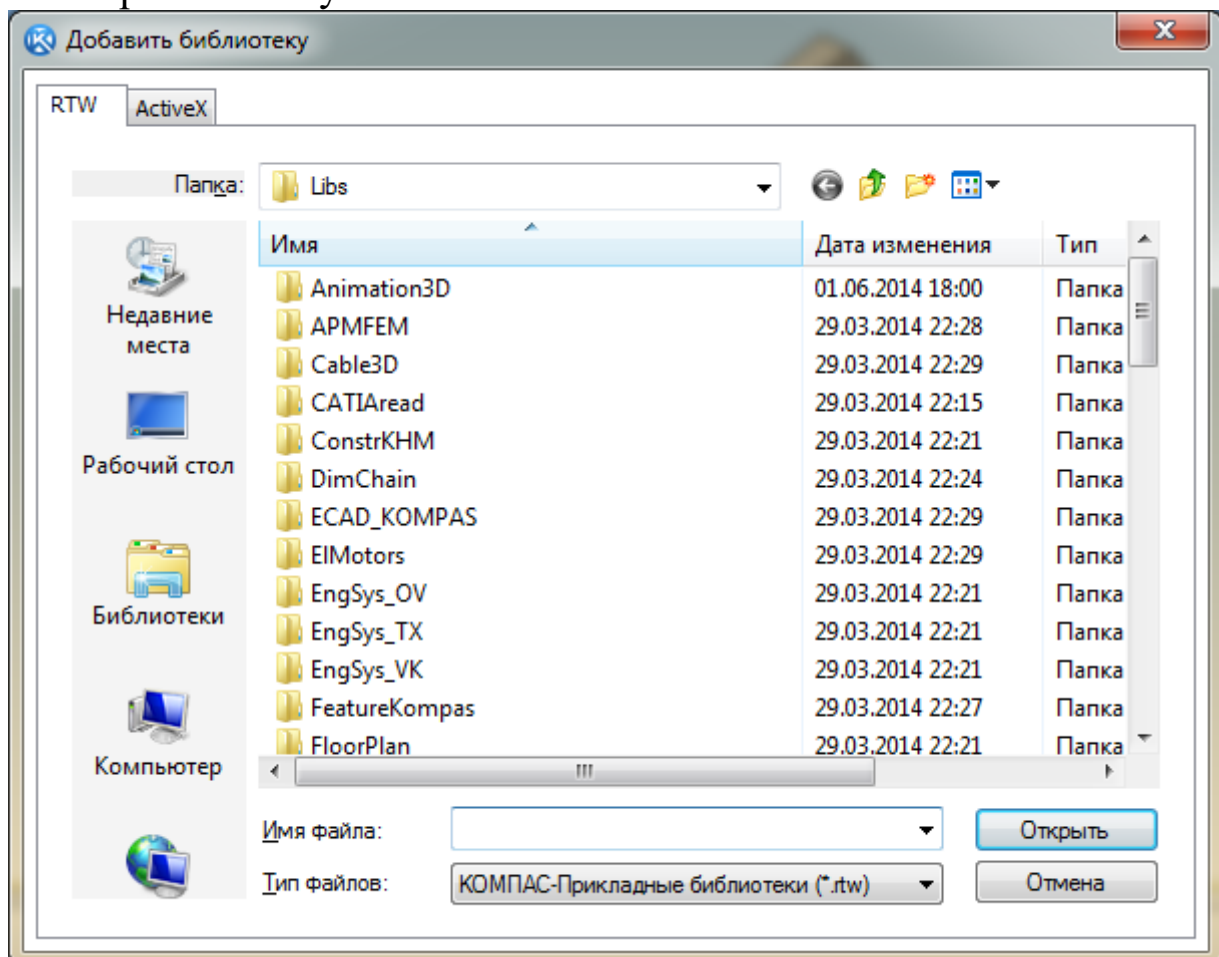
В появившемся внизу окне выберите *Расчет и построение – APM FEM: Прочностной анализ*.



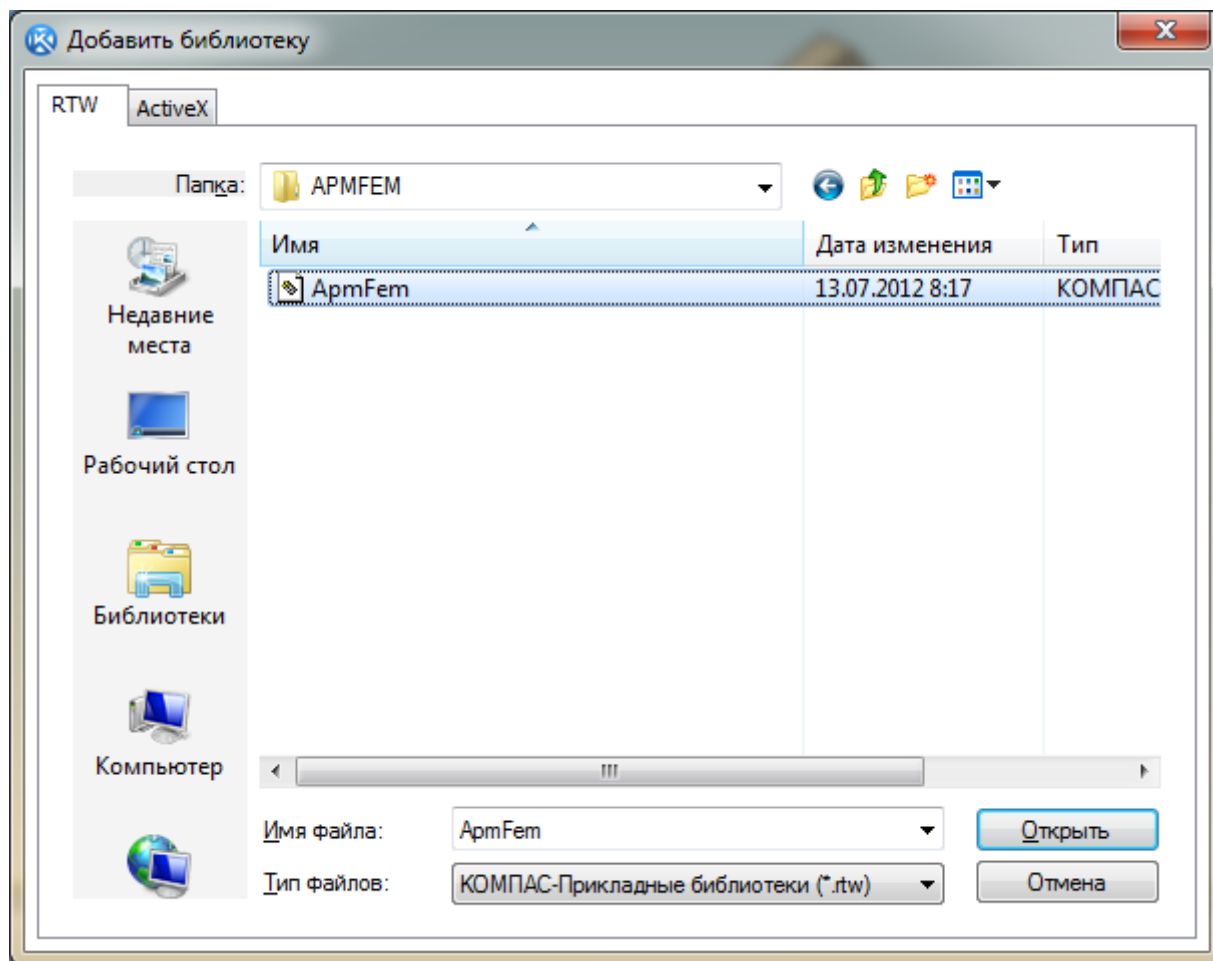
Если библиотеки прочностного анализа нет в списке, то нажмите на правой части окна *Менеджера библиотек* правой клавишей мыши и выберите *Добавить описание – прикладной библиотеки*.



Откройте папку Libs.

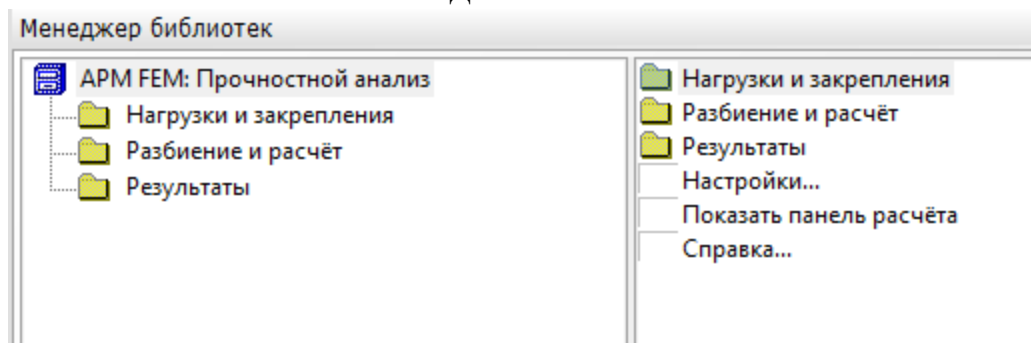


Зайдите в папку ARMFEM.

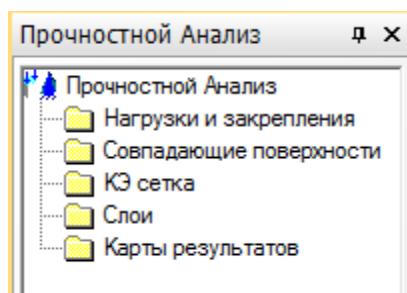


Выберите имеющийся в ней файл и нажмите *Открыть*. Библиотека появится в *Менеджере библиотек*.

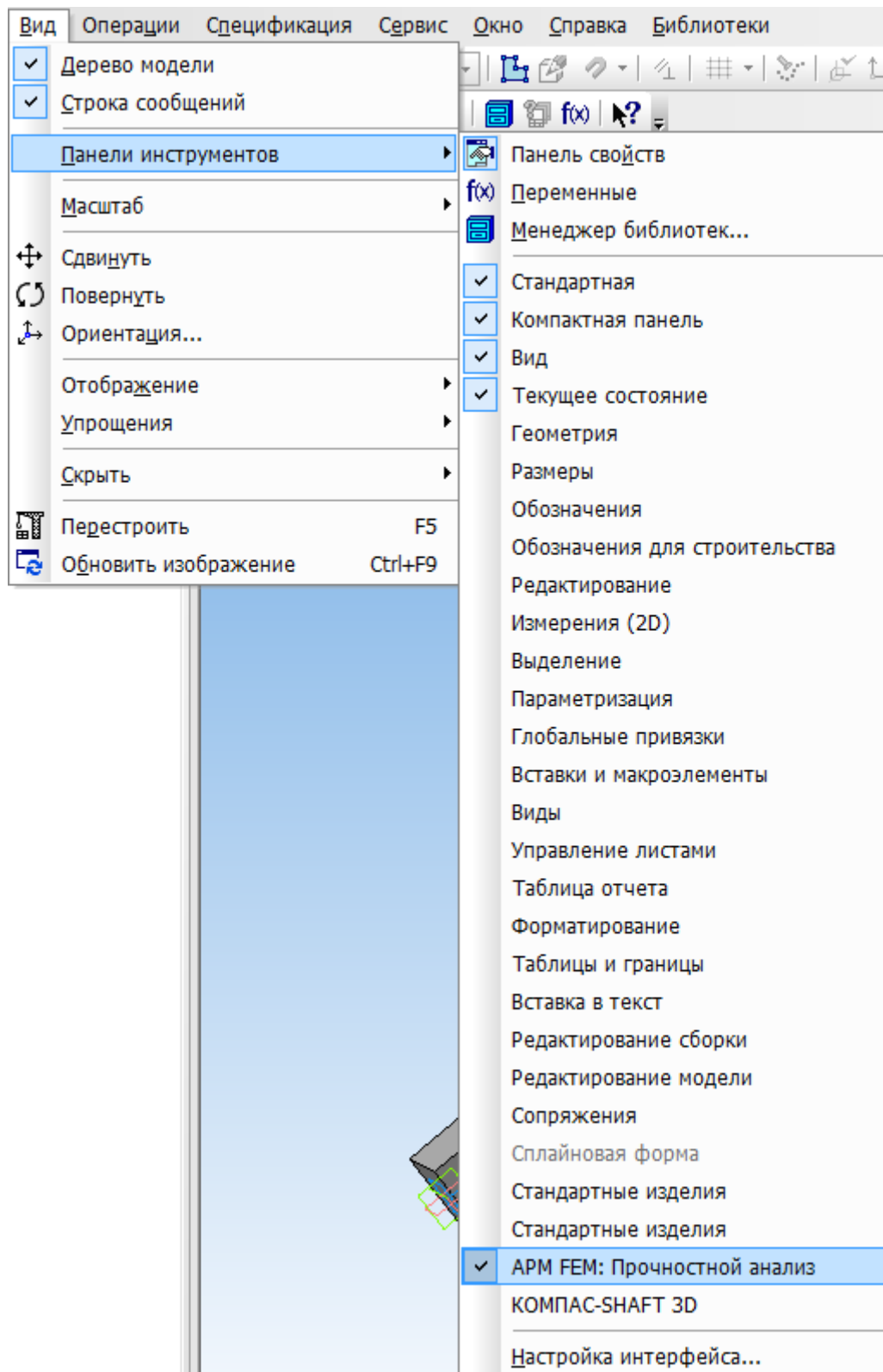
Окно библиотеки имеет вид.



При запуске библиотеки слева в файле детали появляется окно *Прочностной анализ*.



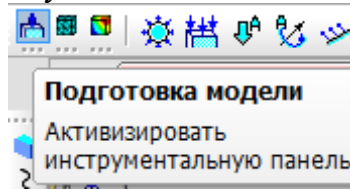
Закройте окно *Менеджера библиотек*. Для работы с панелью библиотеки прочностных расчетов выберите *Вид – Панели – Прочностной анализ*.



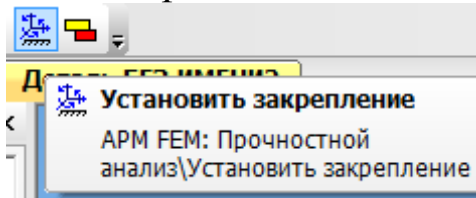
Появится панель библиотеки.



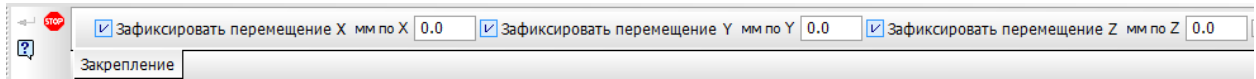
Нажмите на *Подготовку модели*.



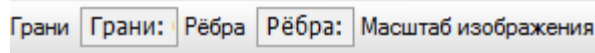
Вначале необходимо указать закрепление балки. Для этого выберите команду *Установить закрепление*.



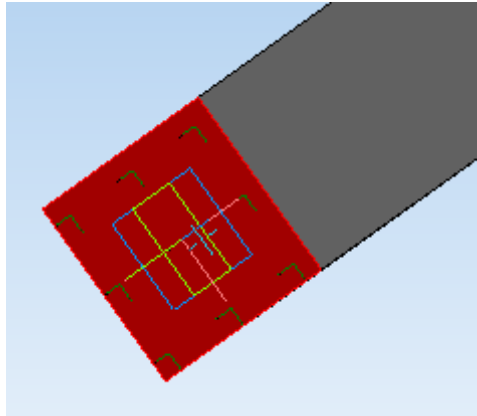
Панель свойств имеет вид.



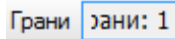
Для передвижения по панели свойств используйте стрелки  и .



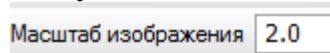
Нажмите на окно *Грани* и укажите грань балки, которая будет зафиксирована – это грань, лежащая в плоскости XY. При этом грань будет выделена красным цветом.

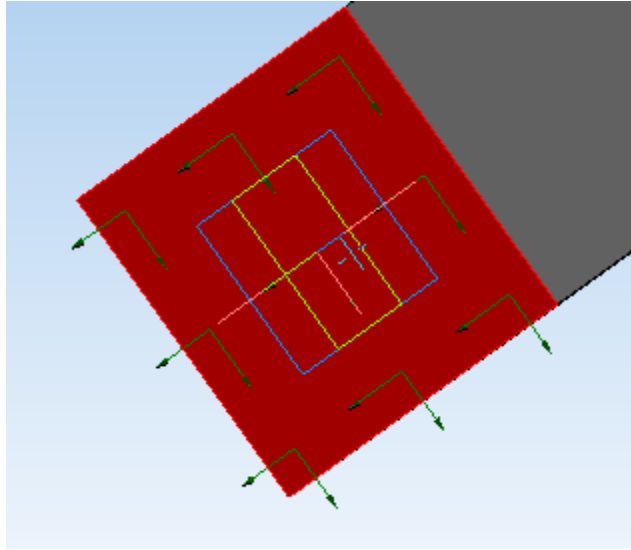


В окне *Грани* будет указана *Грань 1*.



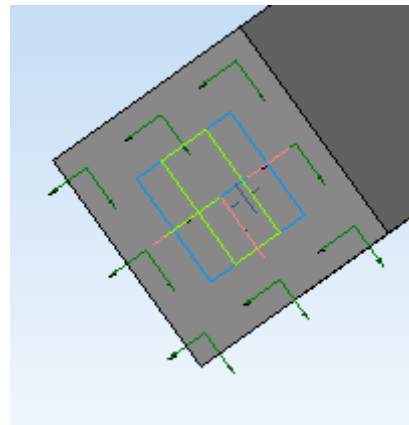
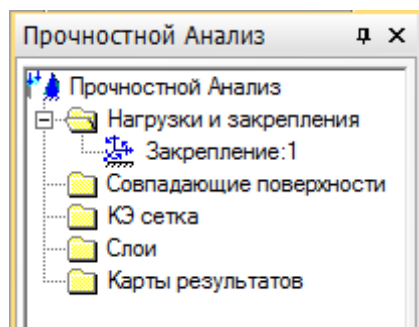
Для лучшей наглядности увеличьте масштаб изображения до 2.



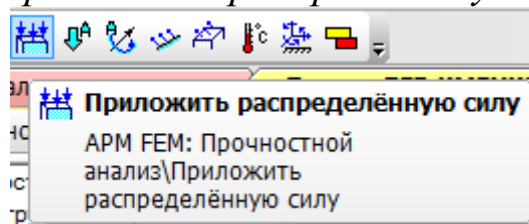


Подтвердите выполнение операции .

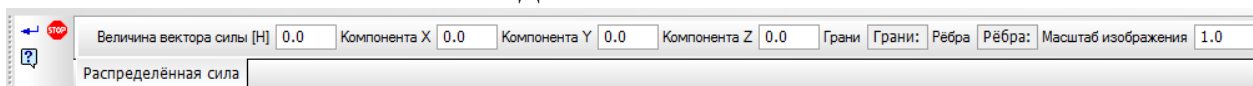
В окне Прочностной анализ – Нагрузки и закрепления появляется Закрепление 1.



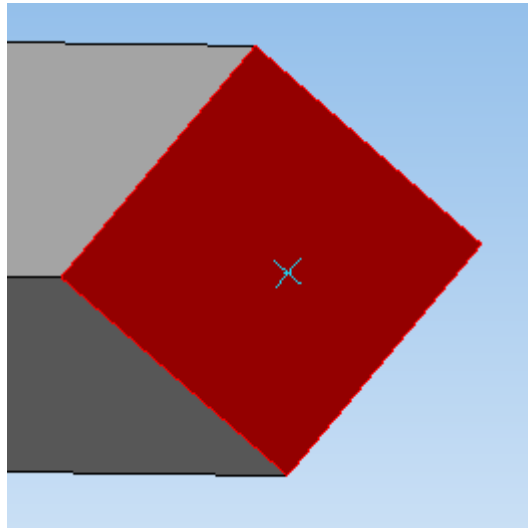
Теперь необходимо указать нагрузку, действующую на балку. Для этого нажмите *Приложить распределённую силу*.



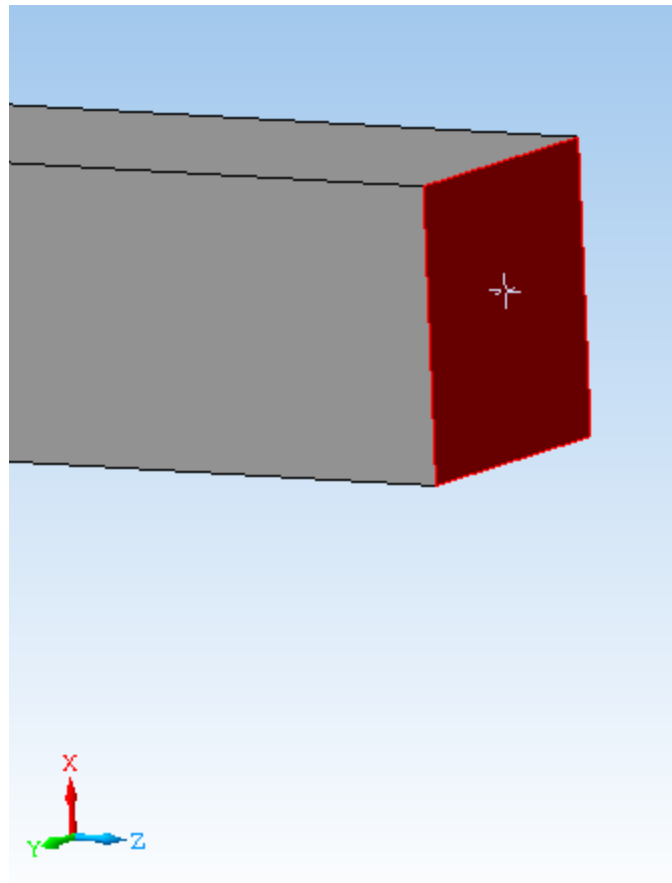
Панель свойств имеет вид.



Распределённая сила будет приложена на грани, противоположной закреплённой. Выделите требуемую грань левой клавишей мыши.



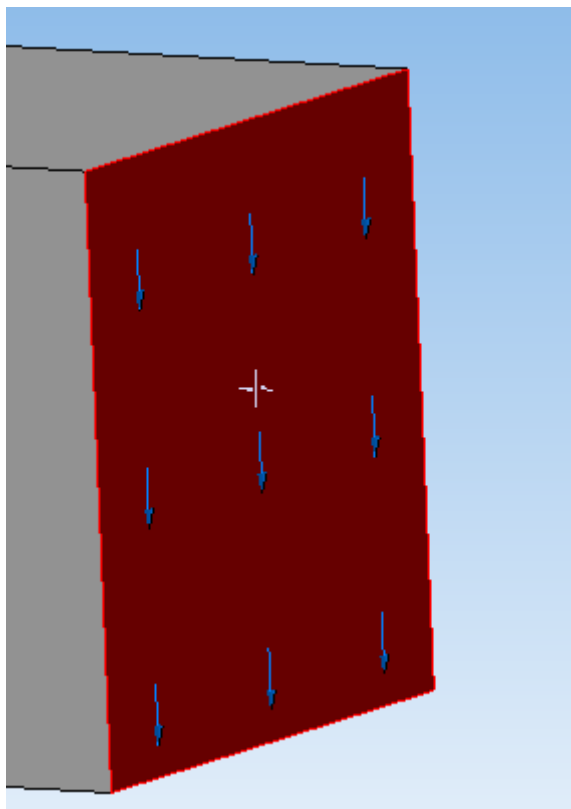
Сила должна действовать вниз и быть приложена к выделенной грани, поэтому для задания значения силы представлен наглядный рисунок.



Сила действует в отрицательном направлении оси X. На панели свойств в окне *Компонента X* задайте значение силы 10000 Н, знак силы «-».

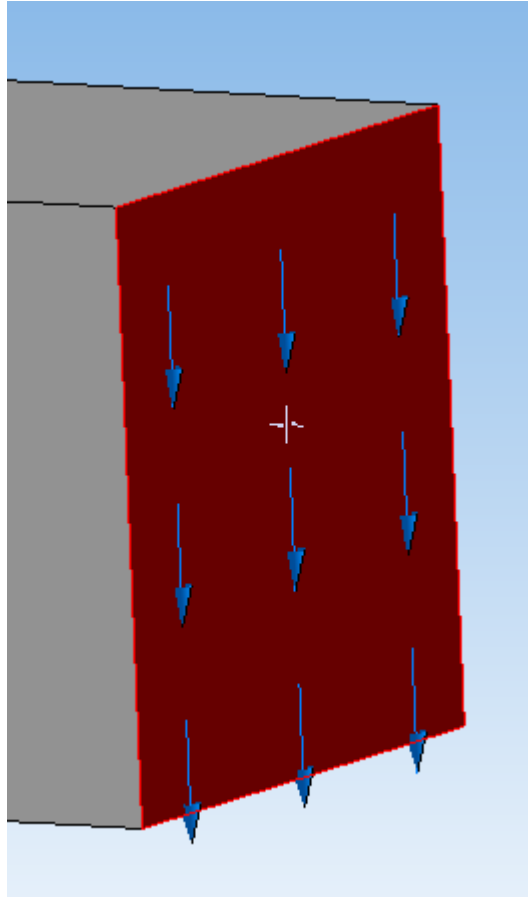
Величина вектора силы [Н] Компонента X

Направление действия распределенной силы показано на соответствующей грани.



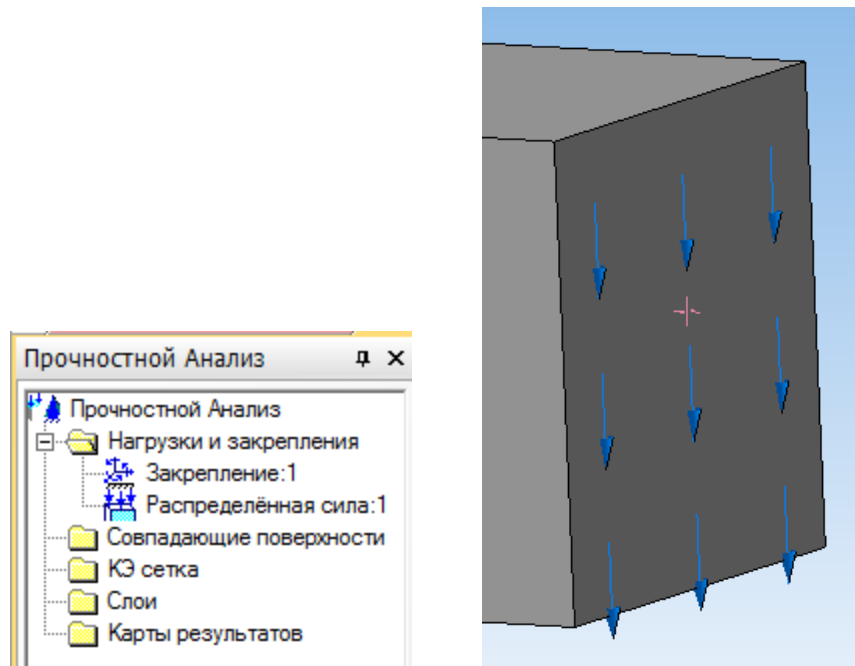
Для лучшей наглядности измените масштаб изображения с 1 до 2.

Масштаб изображения

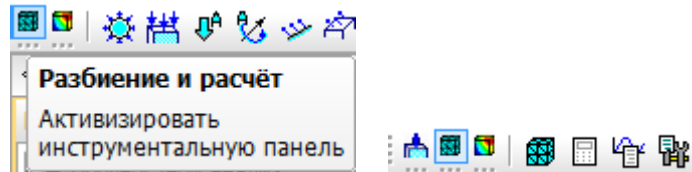


Подтвердите выполнение операции .

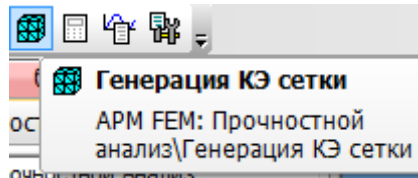
В окне Прочностной анализ – Нагрузки и закрепления появляется Распределенная сила 1.



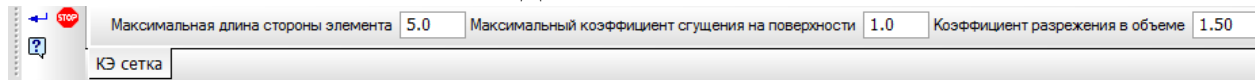
Переходим к построению сетки разбиения. Выберите команду *Разбиение и расчет*.



Выберите *Генерация конечно-элементной сетки*.

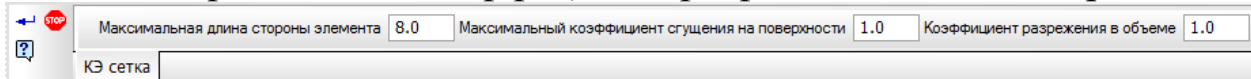


Панель свойств имеет вид.



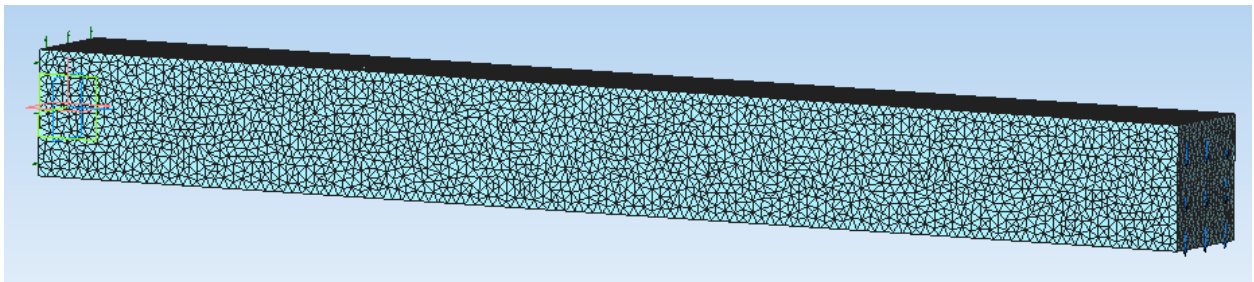
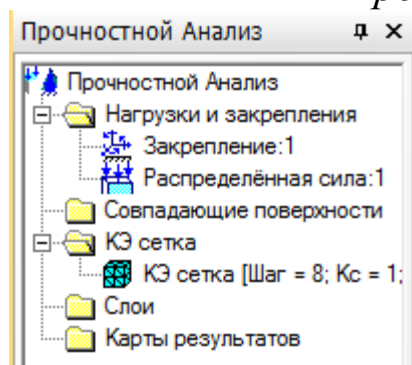
При формировании конечно-элементной сетки балка разбивается на треугольные призмы с *Максимальной длиной стороны элемента*, указываемой в соответствующем окне. Чем меньше длина элемента, тем точнее производимый расчет. Задайте длину элемента 8 мм.

Также для удобства задайте *Максимальный коэффициент сгущения на поверхности* и *Коэффициент разрежения в объеме* равными 1

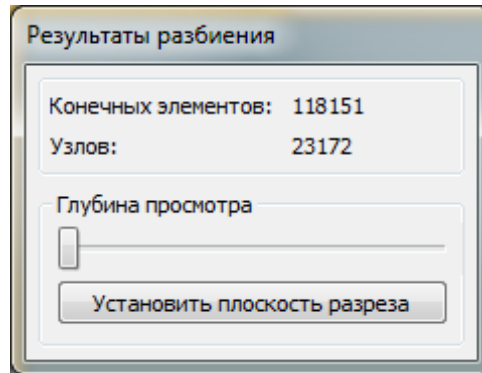


Подтвердите выполнение операции .

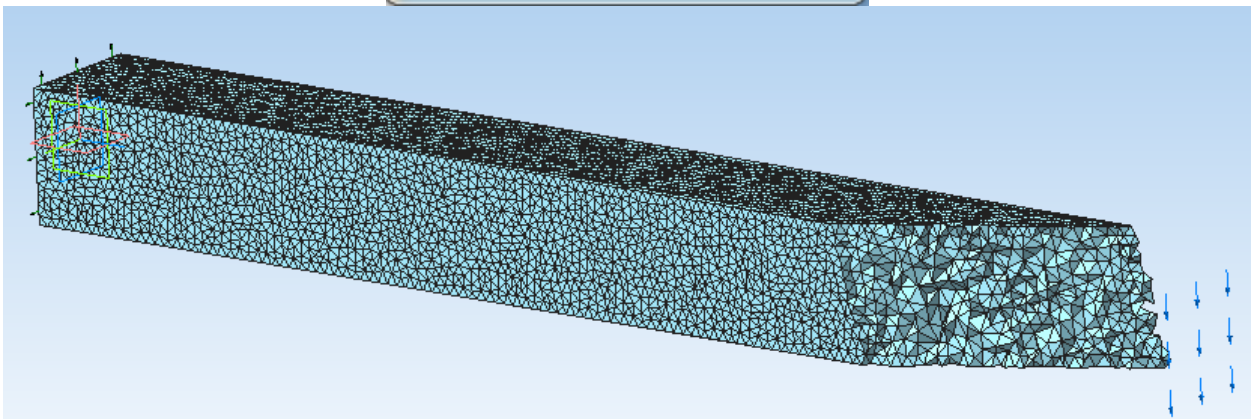
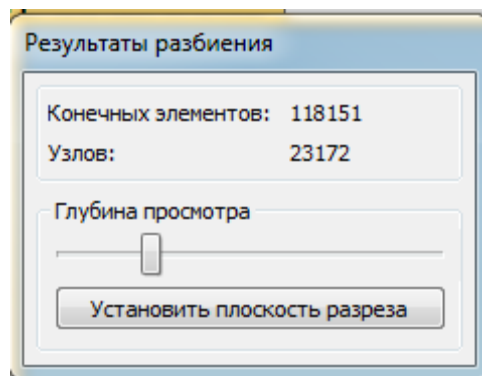
Сетка построена, что показано в окне *Прочностной анализ*.



Появляется окно *Результаты разбиения*, в котором указывается число конечных элементов и узлов сетки.

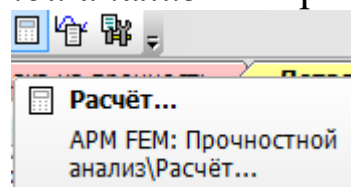


Изменять глубину просмотра можно, передвигая ползунок влево-вправо.

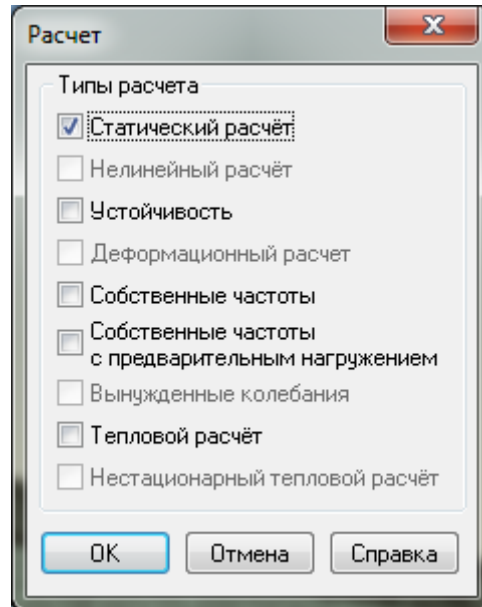


Верните глубину просмотра в исходное состояние.

На панели *Прочностной анализ* выберите команду *Расчет*.

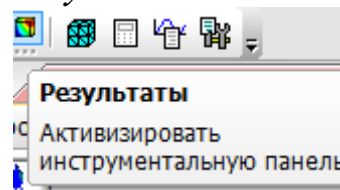


Появляется окно, в котором можно выбрать тип расчета.

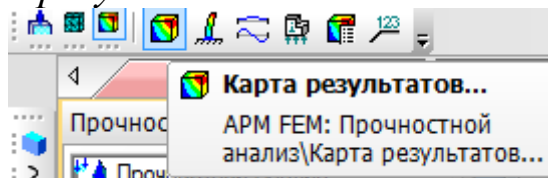


Выберите *Статический расчёт* и нажмите *OK*.

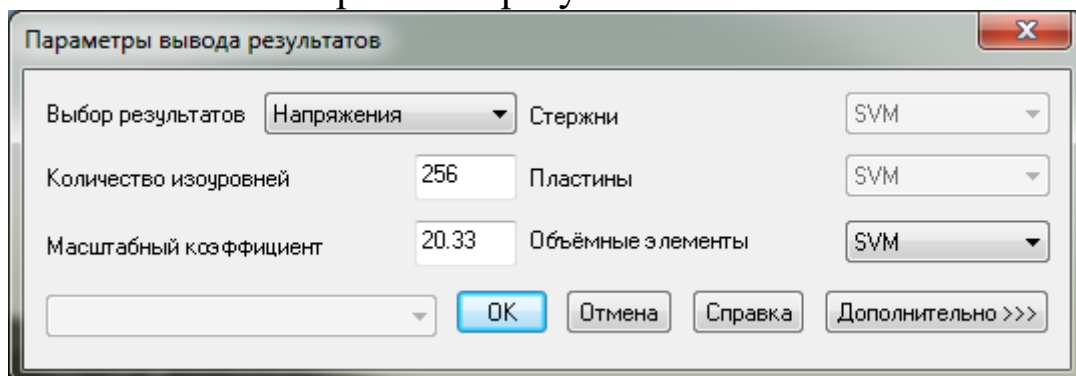
После того как расчёт будет проведен, нажмите на панели *Прочностной анализ* команду *Результаты*.



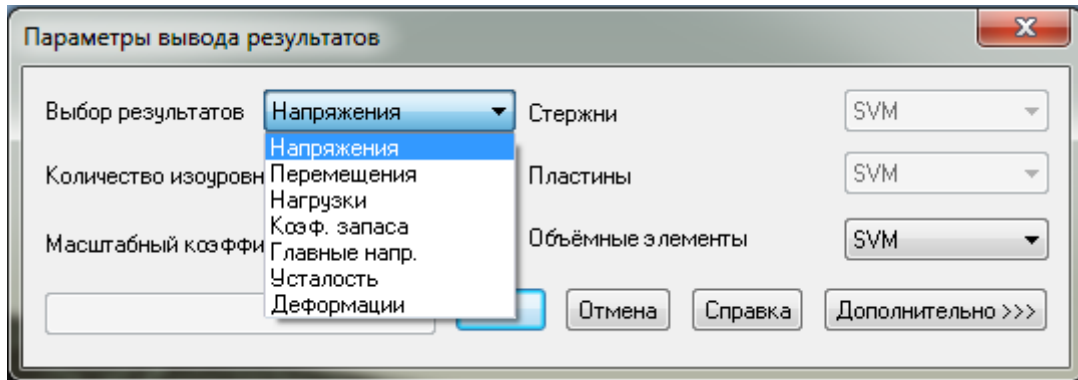
Выберите *Карта результатов*.



Появляется окно отражения результатов.



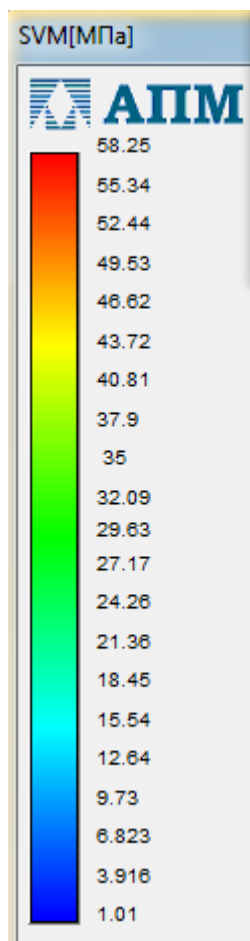
В раскрывающемся списке *Выбор результатов* можно установить требуемый результат.

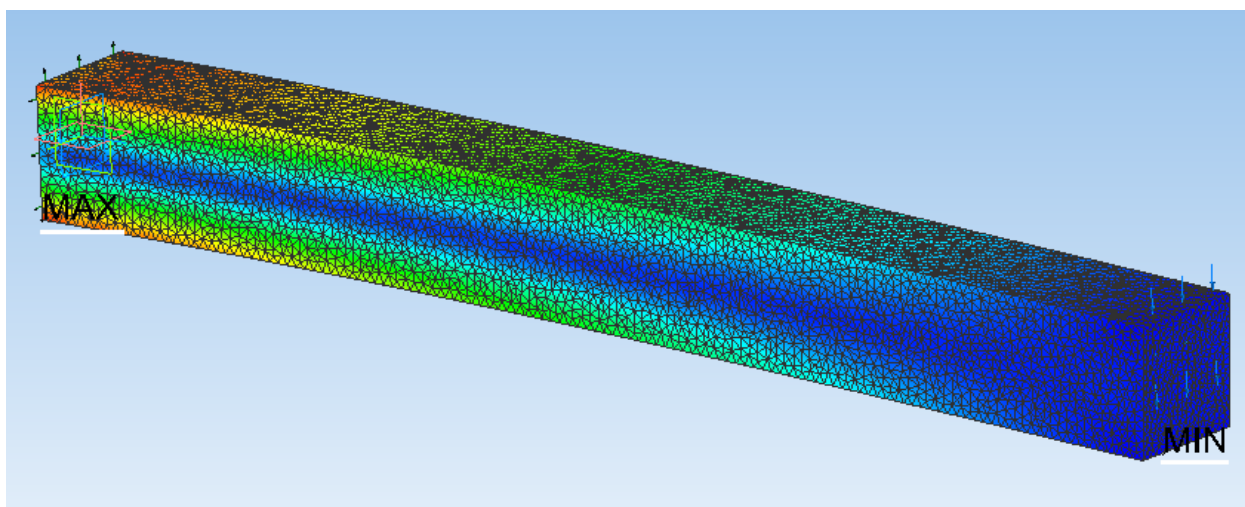


В раскрывающемся списке *Объемные элементы* можно выбрать способ отображения результата: вдоль одной из осей (SX, SY, SZ), на плоскости (SXY, SXZ, SYZ), по всему объему балки SVM.

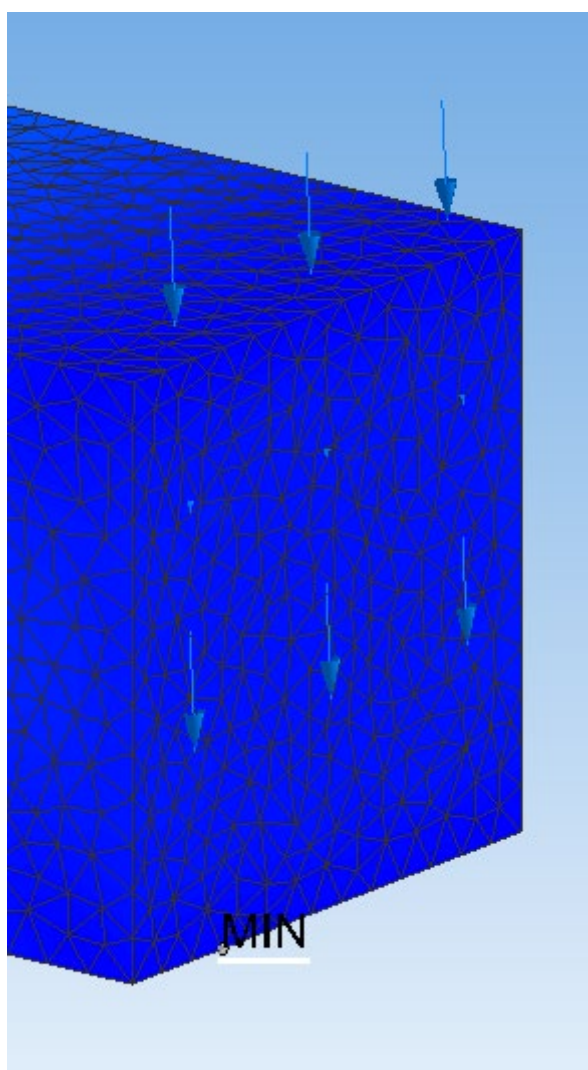


После задания всех параметров нажмите *ОК*. Появляется распределение напряжений по объему балки и значения напряжений от минимального до максимального.

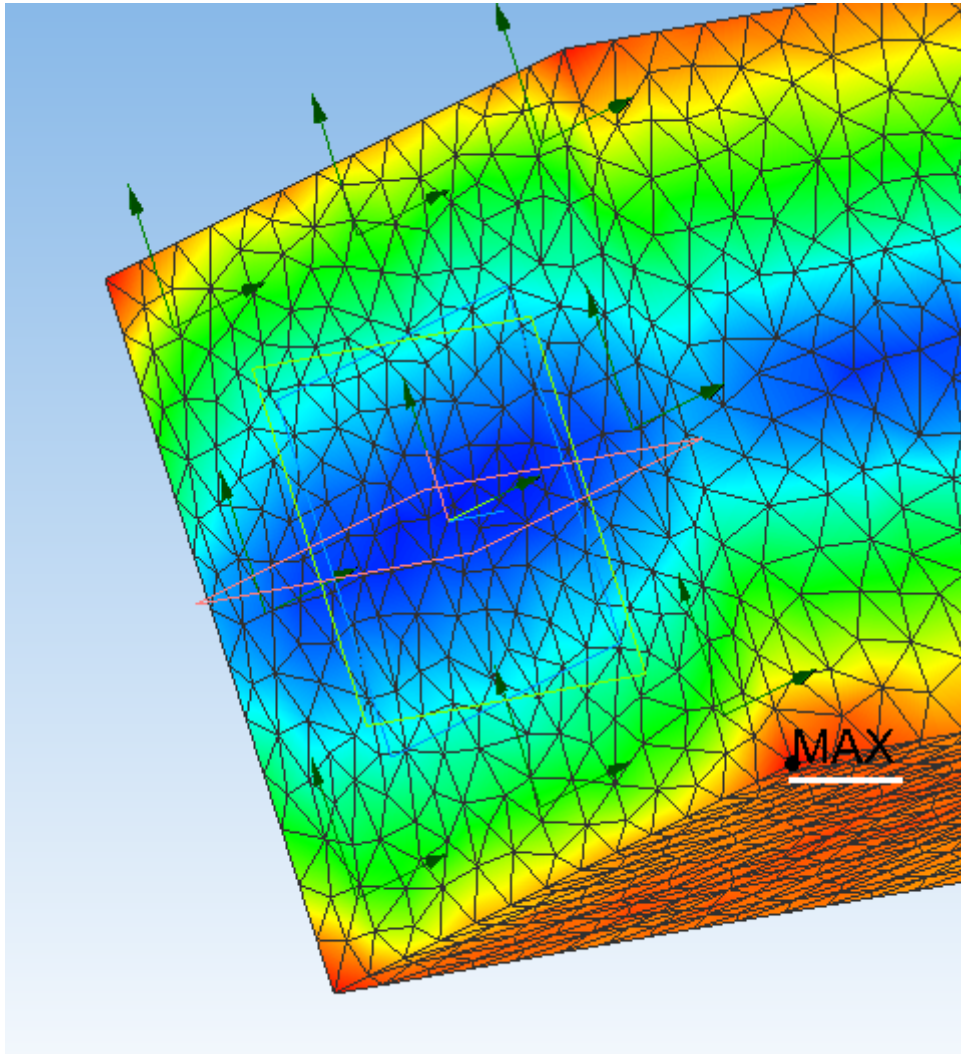




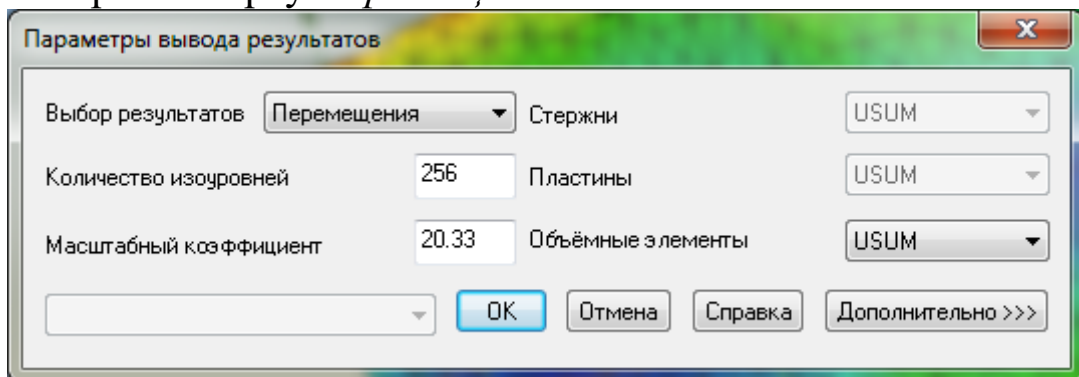
Минимальное напряжение (1,01 МПа) наблюдается в точке, расположенной на нижнем ребре грани, наиболее удаленной от точки закрепления.

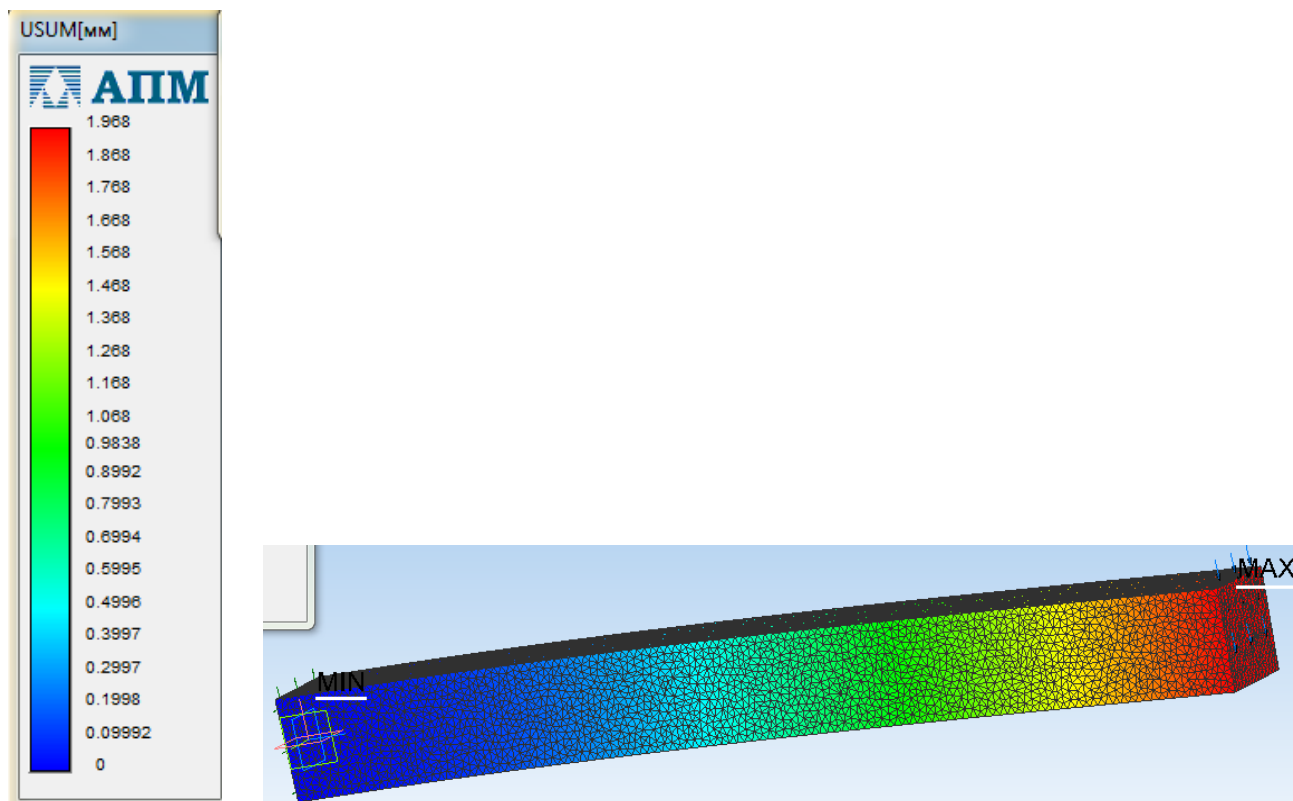


Максимальное напряжение (58,25 МПа) наблюдается в нижней вершине прямоугольника, принадлежащей закрепленной грани.

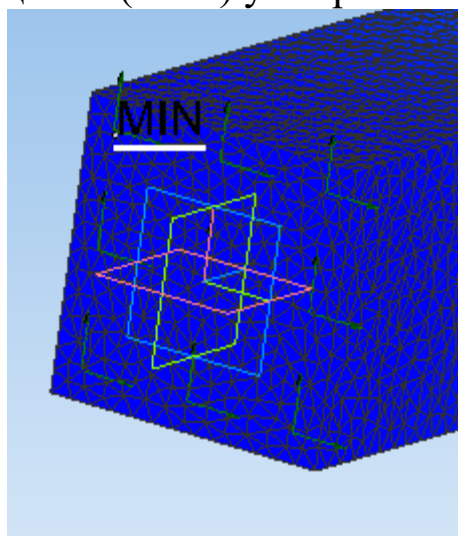


Постройте карту *Перемещений*.

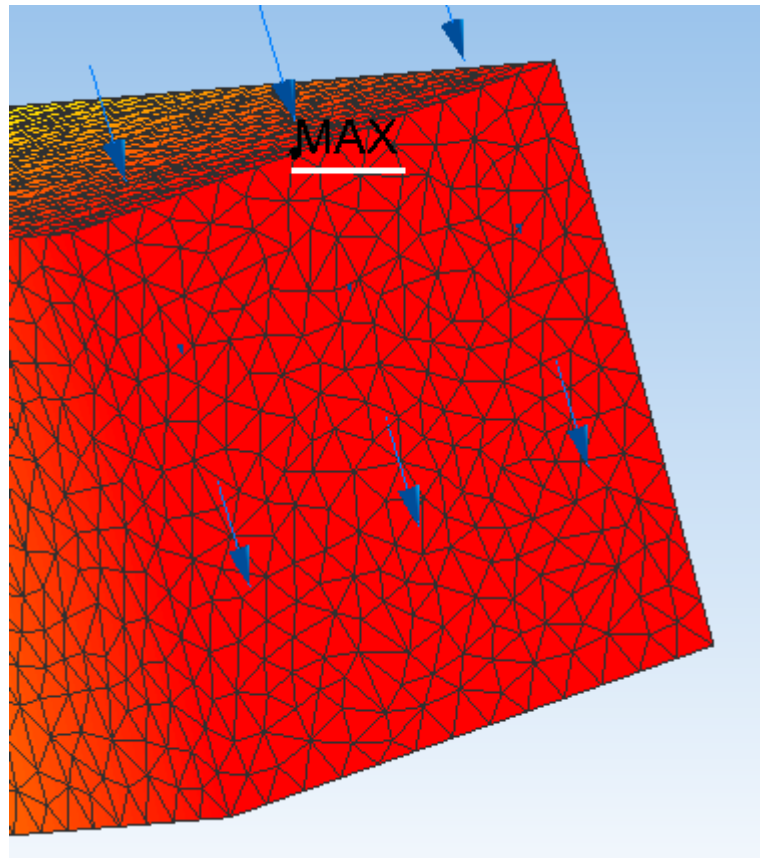




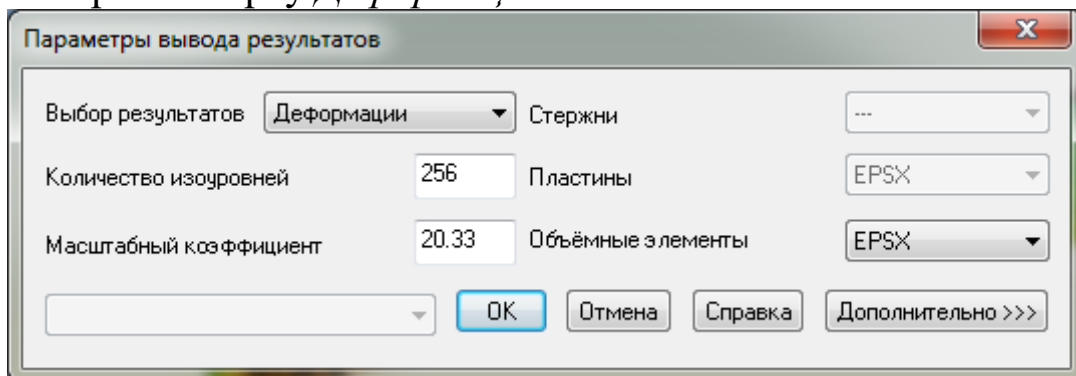
Минимальное перемещение (0 мм) у закрепленной грани,



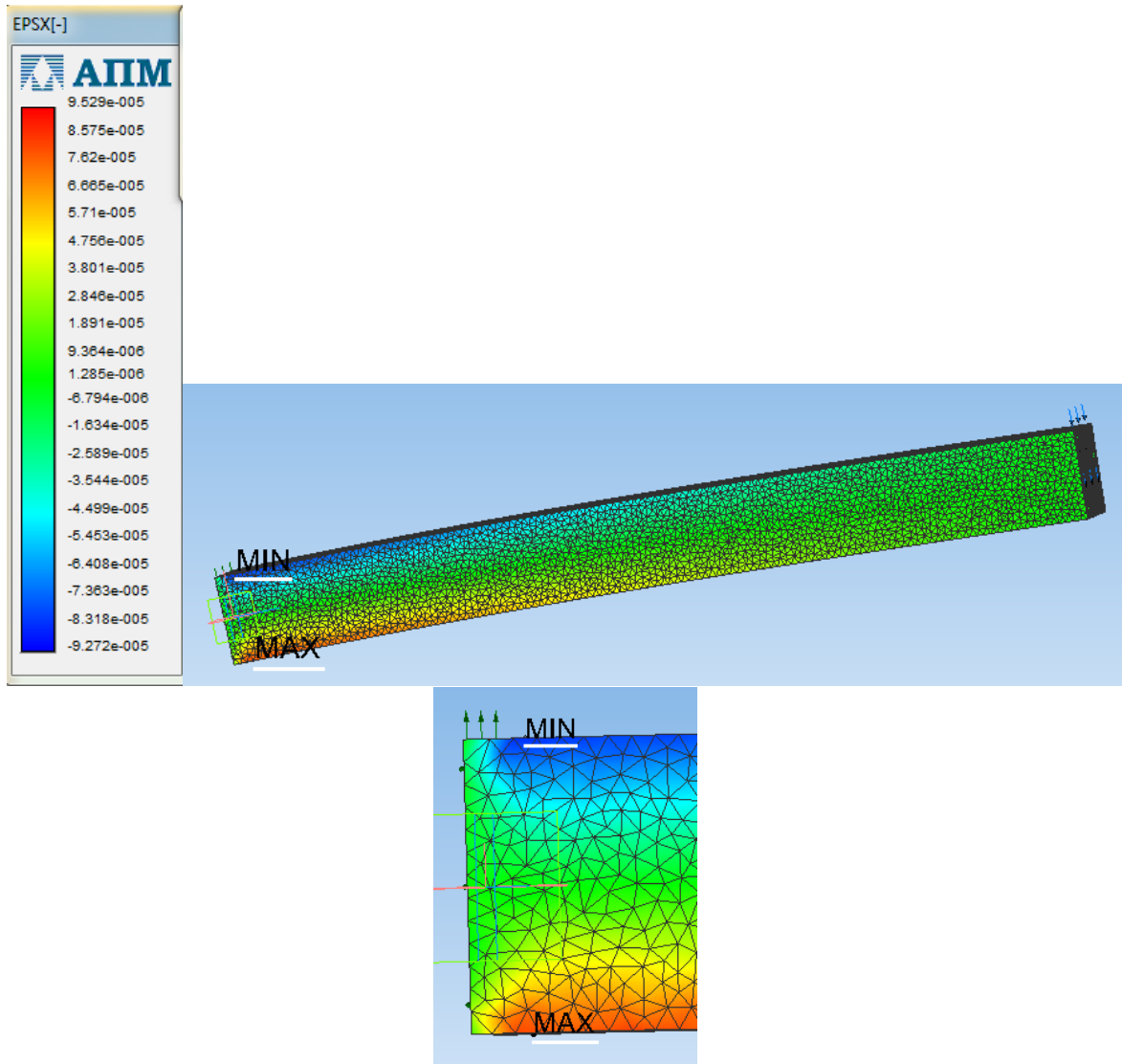
а максимальное перемещение (1,968 мм) – у верхнего ребра грани, к которой приложена распределенная сила.



Постройте карту *Деформаций*.



Минимальная деформация наблюдается в области верхней грани балки, наиболее близко расположенной от места закрепления, а максимальная деформация – в такой же области только нижней грани балки.



Контрольные вопросы

1. Опишите последовательность действий при построении трехмерной модели балки.
2. К какой грани балки прикладывается внешняя сила, как она направлена?
3. Прочностные расчеты проводятся на растяжение-сжатие, изгиб или кручение?
4. Какая грань балки фиксируется?
5. Какие карты результатов можно построить после проведения прочностных расчетов?
6. Как распределяются по балке напряжения, деформации и перемещения?

Рекомендуемый список литературы

1. Локтионова, О.Г. Лекции по теоретической механике: учебное пособие / О.Г. Локтионова, С.Ф. Яцун, О.В. Емельянова; Юго-Зап. Гос. Ун-т. Курск, 205.-188с.
2. Основы механики : учебное пособие / С. Ф. Яцун [и др.]. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : ИНФРА-М, 2021. - 248 с.
3. Яцун, С.Ф. Основы функционирования технических систем : учебное пособие / С. Ф. Яцун, А. Н. Рукавицын, Е. Н. Политов ; Юго-Западный государственный университет. - Курск : Университетская книга, 2019. - 195 с.
4. Манжосов, В.К. Механика [Электронный ресурс]: учебно-практическое пособие / В.К. Манжосов, О.Д. Новикова, А.А. Новиков; Ульяновск : УлГТУ, 2012. - 342 с. : ил., табл., схем. - Библ. в кн. - Университетская библиотека online: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=363451>
5. Большаков В.П., Бочков А.Л. Основы 3D-моделирования. – Питер. – 2012. - 304 с.