

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна  
Должность: проректор по учебной работе  
Дата подписания: 16.06.2023 12:29:29  
Уникальный программный ключ:  
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра информационной безопасности

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебной работе  
О.Г. Локтионова  
« 5 » 03 2019 г.



**ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ**

Методические рекомендации для практических занятий №1,  
№2 по дисциплине «Дискретная математика» для студентов  
направления подготовки бакалавриата 02.03.03 «Математическое  
обеспечение и администрирование информационных систем»

Курск 2019

УДК 621.(076.1)

Составители: В.П. Добрица, К.А. Тезик

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры  
«Информационные системы и технологии» Ю.А. Халин

**Теория множеств:** методические рекомендации по выполнению практических работ / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.П. Добрица, К.А. Тезик. – Курск, 2019. – 24 с.: ил. 7. – Библиогр.: с. 24.

Содержат сведения и материалы по разделу дискретной математики – теория множеств. Указывается порядок выполнения лабораторной работы, правила оформления отчета.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утвержденной учебно-методическим объединением по специальности.

Предназначены для студентов направления подготовки бакалавриата 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 5.03.19 Формат 60x84 1/16.  
Усл.печ. л. 1,40. Уч.-изд. л. 1,26. Тираж 100 экз.

Заказ. 185 Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.  
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

В данных методических рекомендациях изложены материалы по разделу дискретной математики - теория множеств.

В разделе «Теория множеств» рассмотрены следующие темы: множества и операции над множествами; отношения и функции.

По каждой теме представлены:

1. краткие теоретические положения;
2. перечень вопросов, выносимых на практическое задание;
3. примеры задач, выносимых на практическое занятие;
4. задачи, выносимые на самостоятельную работу студентов.

Данные методические рекомендации предназначены для проведения практических занятий по дисциплине «Дискретная математика» для студентов второго курса Юго-Западного государственного университета следующих направлений подготовки: информационная безопасность; инфокоммуникационные технологии и системы связи, информационные системы и технологии.

По изложенным в данных методических рекомендациях материалам можно рекомендовать преподавателю проведение 4-х часов практических занятий по следующему плану:

- множества и операции над множествами (2 часа);
- отношения и функции (2 часа);

При выполнении каждой работы следует приводить все этапы выполняемых рассуждений, необходимый теоретический материал для объяснения проводимых преобразований и вычислений, обоснование делаемых выводов.

На титульном листе привести следующие данные: ЮЗГУ, кафедра, предмет, номер задания, номер варианта, ФИО студента, номер группы, данные о проверяющем.

## Практическое занятие №1

### Множества и операции над множествами

Цель: изучить способы задания множеств, основные операции над множествами, представление множеств в виде кругов Эйлера. Научиться решать задачи по доказательству тождеств, включающих множества.

Вопросы, выносимые на практическое занятие.

1. Понятие множества. Способы задания множеств. Понятие подмножества.
2. Представление множеств в виде кругов Эйлера.
3. Понятия универсального и пустого множеств. Дополнение множества.
4. Основные операции над множествами: объединение множеств, пересечение множеств, разность множеств, симметричная разность множеств.
5. Законы де Моргана.

### Краткие теоретические положения

Под множеством  $A$  будем понимать любое объединение определенных и различных между собой объектов, мыслимое как единое целое. Через  $\in$  обозначается отношение принадлежности, т.е.  $x \in A$  означает, что элемент  $x$  принадлежит множеству  $A$ . Если  $x$  не является элементом множества  $A$ , то это записывается следующим образом  $x \notin A$ .

Через  $\subseteq$  обозначается отношение включения множеств, т.е. запись  $A \subseteq B$  означает, что каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$ . В этом случае  $B$  – надмножество  $A$ .

Множество, не содержащее элементов, называется пустым и обозначается через  $\emptyset$ .

Объединением множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}$

Пересечением множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}$

Разностью множеств  $A$  и  $B$  называются множество  $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}$

Симметричной разностью множества  $A$  и  $B$  называется множество

$$A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Универсальное множество  $U$  - это множество элементов, которые участвуют в данной области рассуждений. Например, если рассматриваются различные множества целых положительных чисел, то универсальное множество - это множество всех натуральных чисел.

Дополнением множества  $A$  называется множества  $\bar{A} = \{x | x \notin A \text{ и } x \in U\}$

Законы де Моргана устанавливают связь между операциями объединения, пересечения и дополнения.

Дополнение объединения есть пересечение дополнений

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Дополнение пересечения есть объединение дополнений

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

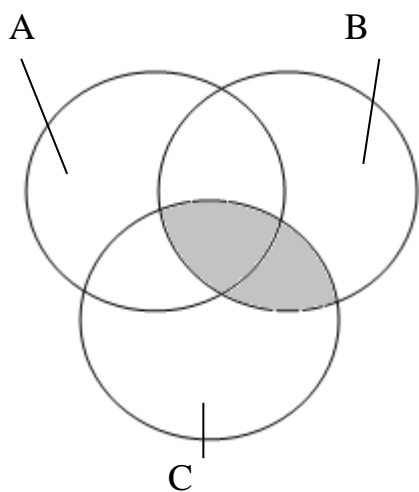
Примеры задач, выносимых на практическое занятие

#### Задача 1

С помощью кругов Эйлера доказать тождество:

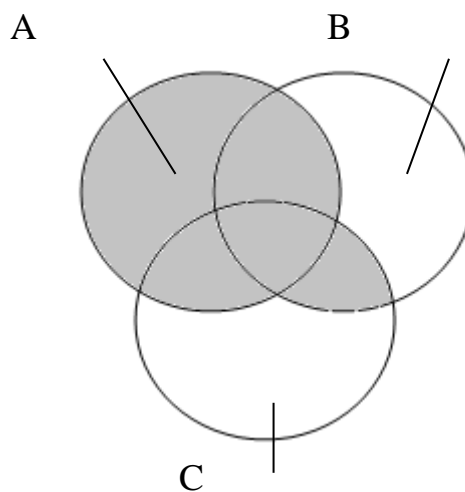
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Левая часть тождества имеет вид:



$B \cap C$  (закрашенная фигура)

Рис 1.



$A \cup (B \cap C)$  (закрашенная фигура)

Рис 2.

Правая часть тождества имеет вид:

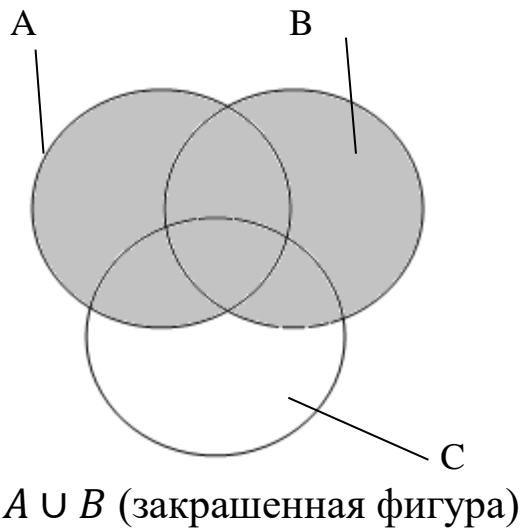


Рис 3.

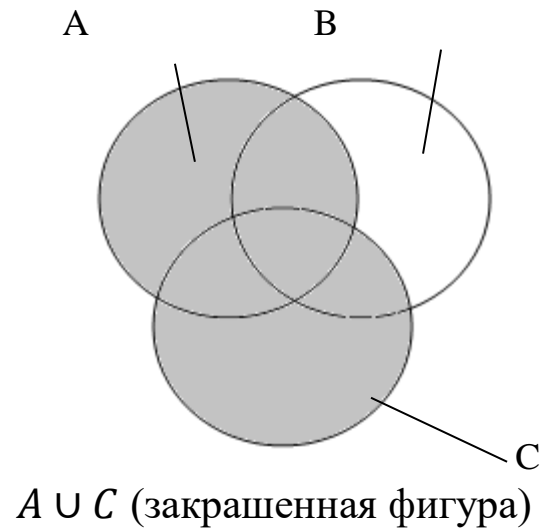
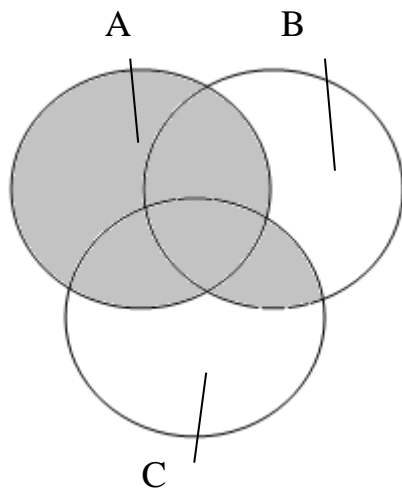


Рис 4.



$(A \cup B) \cap (A \cup C)$  (закрашенная фигура)

Рис 5.

Закрашенные фигуры, изображающие левую и правую части тождества на Рис 2 и Рис 5 одинаковые, что доказывает истинность тождества:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

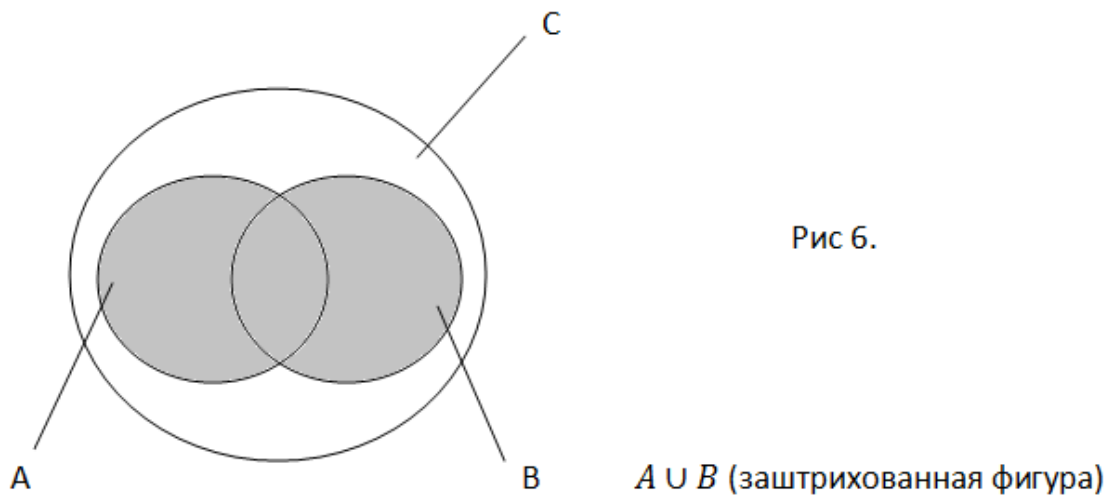
### Задача 2

С помощью кругов Эйлера доказать, что:  $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C$  и  $B \subseteq C$

Знак  $\Leftrightarrow$  означает «тогда и только тогда, когда».

Докажем условие достаточности.

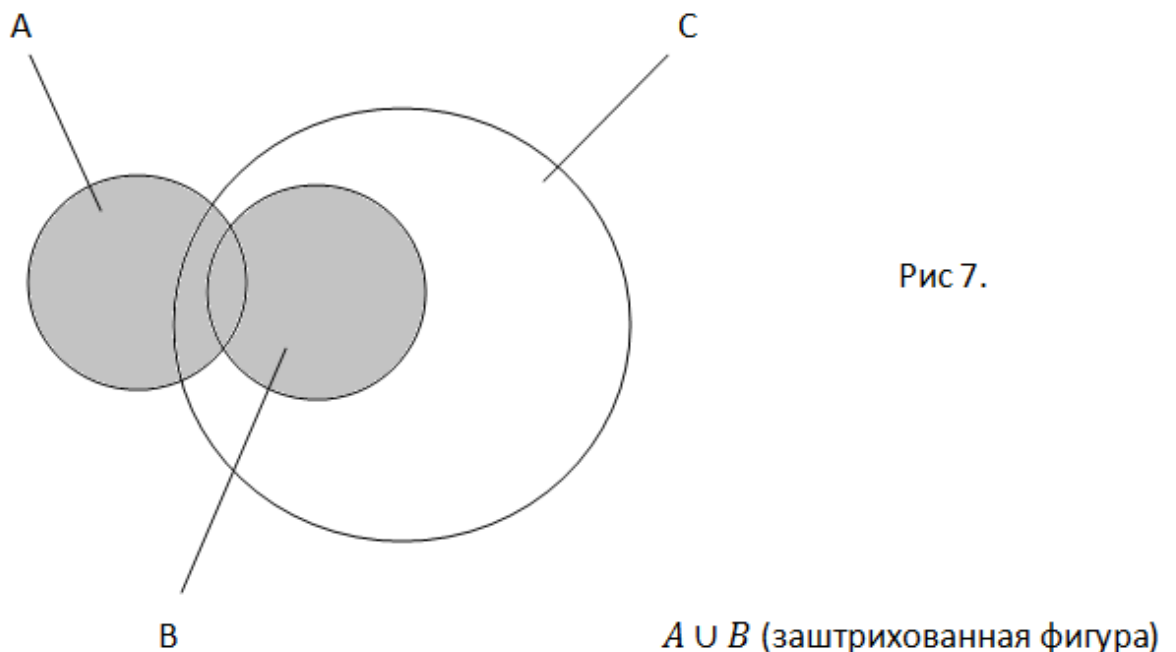
Пусть правая часть тождества выполняется  $A \subseteq C$  и  $B \subseteq C$ , см. рис 6.



Тогда круги Эйлера показывают, что элементы объединения множества  $A$  и  $B$  являются элементами множества  $C$ , то есть  $A \cup B \subseteq C$ .

Докажем это же условие методом доказательства от противного.

Предположим, что правая часть тождества не выполняется, например множества  $A$  не является подмножеством множества  $C$ , см. рис 7.



Мы видим, что не все элементы объединения множества  $A$  и  $B$  являются элементами множества  $C$ , следовательно, утверждение  $A \cup B \subseteq C$  в данном случае является ложным, что и требовалось доказать.

Так как  $A \subseteq A \cup B$  и  $A \cup B \subseteq C$ , то в силу транзитивности отношения включения имеем  $A \subseteq C$ . Аналогично доказывается включение  $B \subseteq C$ .

Таким образом, доказано, что левая часть эквивалентности  $A \cup B \subseteq C$  выполняется тогда и только тогда, когда выполняется правая часть этой эквивалентности, то есть  $A \subseteq C$  и  $B \subseteq C$ .

Тождества, включающие в себя множества, могут быть доказаны не только диаграммами Эйлера, но и аналитическим методом.

### Задача 3

Доказать аналитическим методом следующее тождество:  
 $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$

Пусть элемент  $x \in (A \cap B) \cup (C \cap D)$ .

Отсюда следует, что  $x \in A$  и  $x \in B$  или  $x \in C$  и  $x \in D$

Рассмотрим 2 гипотезы

#### Гипотеза №1

Предположим, что  $x \in A$  и  $x \in B$ . Но если элемент  $x$  принадлежит, например, множеству  $A$ , то он принадлежит объединению множества  $A$  с любым другим множеством. Отсюда следует, что  $x \in (A \cup C)$  и  $x \in (B \cup C)$  и  $x \in (A \cup D)$  и  $x \in (B \cup D)$

А значит, элемент  $x$  лежит в пересечении этих множеств.

#### Гипотеза №2

Пусть  $x \in C$  и  $x \in D$ . Отсюда следует, что:  $x \in (A \cup C)$  и  $x \in (B \cup C)$  и  $x \in (A \cup D)$  и  $x \in (B \cup D)$ .

Итак, при обеих гипотезах доказано включение:  
 $(A \cap B) \cup (C \cap D) \subset (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$

Докажем обратное включение.

Пусть  $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$ , тогда имеем  $x \in (A \cup C)$  и  $x \in (B \cup C)$  и  $x \in (A \cup D)$  и  $x \in (B \cup D)$ . Это равносильно утверждению ( $x \in A$  или  $x \in C$ ) и ( $x \in B$  или  $x \in C$ ) и ( $x \in A$  или  $x \in D$ ) и ( $x \in B$  или  $x \in D$ ).

Если в первом условии выполняется  $x \in A$ , то третье условие выполняется автоматически. А из выполнения второго и третьего условий следует, что  $x \in B$ , или ( $x \in C$  и  $x \in D$ ). Из условий  $x \in A$  и  $x \in B$  следует, что  $x \in A \cap B$ . Условие ( $x \in C$  и  $x \in D$ ) гарантирует, что



$x \in C \cap D$ . Одно из этих условий выполняется обязательно в силу нашего предположения, поэтому имеем  $x \in (A \cap B) \cup (C \cap D)$ .

Второй возможный случай  $x \in C$  из первого условия рассматривается аналогично.

Задачи, выносимые на самостоятельную работу студентов

### ВАРИАНТ 1

1. Доказать: если  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq C$ , то  $A \subseteq C$ .
2. Доказать, что если  $A$  множество корней уравнения  $x^2 - 7x + 6 = 0$  и  $B = \{1, 6\}$ , то  $A=B$ .
3. Доказать, что множество всех корней многочлена  $\Psi(x)=f(x) \times \varphi(x)$  есть объединение множеств корней многочленов  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ .
4. Доказать тождество  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ .
5. Доказать тождество  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ .
6. Доказать тождество  $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ .
7. Доказать, что:  $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B$  и  $A \subseteq C$ .
8. Доказать, что:  $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$ .
9. Доказать тождество:  $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$ .
10. Найти все подмножества множеств  $\emptyset, \{x\}, \{1, 2\}$ .

### ВАРИАНТ 2

1. Доказать:  $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ .
2. Доказать, что  $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ .
3. Доказать, что множество во всех корней многочлена  $\Psi(x)=(f(x))^2+(\varphi(x))^2$  есть пересечение множеств корней многочленов  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ .
4. Доказать тождество:  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ .
5. Доказать тождество:  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .
6. Доказать тождество:  $\overline{\overline{A}} = A$ .
7. Доказать, что:  $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B} \cup C$ .
8. Доказать, что:  $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$ .
9. Доказать тождество  $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$ .

10. Найти все подмножества множеств  $\{2, 3, 4\}$ .

### ВАРИАНТ 3

1. Доказать:  $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$ .
2. Доказать, что  $\{\{1,2\}, \{2,3\}\} \neq \{1,2,3\}$ .
3. Доказать, что множество всех корней многочлена  $\Psi(x)=f(x) \cdot \varphi(x)$  есть объединение множеств корней многочленов  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ .
4. Доказать тождество  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .
5. Доказать тождество:  $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ .
6. Доказать тождество  $A \cup (\bar{A}) = U$ .
7. Доказать, что  $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap (\bar{B}) \subseteq C$ .
8. Доказать, что  $A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C) \subseteq (B \setminus C)$ .
9. Доказать тождество  $A \div (A \div B) = B$ .
10. Доказать, что множество из  $n$  элементов имеет  $2^n$  подмножеств.

### ВАРИАНТ 4

1. Доказать:  $A \setminus B \subseteq A$ .
2. Существуют ли такие множества  $A$ ,  $B$  и  $C$ , что  $A \cap B \neq \emptyset$ ,  $A \cap C \neq \emptyset$ ,  $(A \cap B) \setminus C \neq \emptyset$ .
3. Доказать, что множество во всех корней многочлена  $\Psi(x)=(f(x))^2+(\varphi(x))^2$  есть пересечение множеств корней многочленов  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ .
4. Доказать тождество  $(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup A = A$ .
5. Доказать тождество  $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ .
6. Доказать тождество  $A \cap (\bar{A}) = \emptyset$ .
7. Доказать, что  $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$ .
8. Доказать, что  $A \subseteq B \Rightarrow (C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$ .
9. Доказать тождество  $A \cup B = (A \div B) \div (A \cap B)$ .
10. Доказать, что множество из  $n$  элементов имеет  $2^n$  подмножеств.

### ВАРИАНТ 5

1. Доказать, что  $A \setminus A = \emptyset$ .
2. Существуют ли такие множества  $A$ ,  $B$  и  $C$ , что  $A \cap B \neq \emptyset$ ,  $A \cap C \neq \emptyset$ ,  $(A \cup B) \setminus C \neq \emptyset$ .

3. Пусть  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  характеристические функции множеств  $A$  и  $B$  соответственно. Доказать, что функция  $\Psi(x) = \text{sgn}(f(x) + \varphi(x))$  является характеристической для множества  $A \cup B$ .
4. Доказать тождество  $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ .
5. Доказать тождество  $B \setminus (A \setminus B) = B$ .
6. Доказать, что  $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \cap A = B$ .
7. Доказать тождество  $A \cup B = (A \dot{-} B) \cup (A \cap B)$ .
8. Доказать, что  $A \cap B = B \Rightarrow (C \setminus A) \subseteq (C \setminus B)$ .
9. Какие соотношения между произвольными двумя множествами могут быть?
10. Есть ли подмножества в пустом множестве?

#### ВАРИАНТ 6

1. Когда выполняется включение  $A \dot{-} B \subseteq A$ ?
2. Существуют ли такие множества  $A$ ,  $B$  и  $C$ , что  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \cap C \neq \emptyset$ ,  $(A \cap B) \setminus C \neq \emptyset$ .
3. Пусть  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  характеристические функции множеств  $A$  и  $B$  соответственно. Доказать, что функция  $\Psi(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$  является характеристической для множества  $A \cap B$ .
4. Выполняется ли равенство  $(A \dot{-} B) \cap B = \emptyset$ ?
5. Доказать тождество  $A \setminus (B \setminus A) = A$ .
6. Доказать, что  $(A \dot{-} B) \cup B = A \Leftrightarrow B \cup A = A$ .
7. Доказать тождество  $\emptyset = (A \dot{-} B) \cap (A \cap B)$ .
8. Доказать, что  $A \cup B = B \Rightarrow (C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$ .
9. Указать все подмножества пустого множества.
10. Найти все подмножества множеств  $\{\emptyset\}$ .

#### ВАРИАНТ 7

1. Доказать, что  $A \dot{-} A = \emptyset$ .
2. Существуют ли такие множества  $A$ ,  $B$  и  $C$ , что  $A \cap B \neq \emptyset$ ,  $A \cap C = \emptyset$ ,  $(A \cap B) \setminus C \neq \emptyset$ .
3. Пусть  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  характеристические функции множеств  $A$  и  $B$  соответственно. Доказать, что функция  $\Psi(x) = (f(x))^2 \cdot (\varphi(x))^2$  является характеристической для множества  $A \cap B$ .
4. Доказать тождество  $(A \dot{-} B) \dot{-} B = A$ .

5. Доказать тождество  $A \cap (B \cup A) = A$ .
6. Доказать, что  $(A \cap B) \cup B = A \Leftrightarrow B = A$ .
7. Доказать, что  $A \cap B = A \Rightarrow (C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$ .
8. Доказать тождество  $B \cup A = (A \dot{\cup} B) \dot{\cup} (A \cap B)$ .
9. Сколько подмножеств у пятиэлементного множества?
10. Указать все собственные подмножества множества
11.  $\{x, y\}$ .

#### ВАРИАНТ 8

1. Существуют ли множества  $A, B, C$  такие, что выполняются условия
2.  $A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset, (A \cap B) \setminus C \neq \emptyset$ ?
3. Доказать, что  $A \dot{\cup} A = \emptyset$ .
4. Пусть  $f(x), \varphi(x)$  характеристические функции множеств  $A$  и  $B$  соответственно. Доказать, что функция  $\Psi(x) = \text{sgn}((f(x))^2 + (\varphi(x))^2)$  является характеристической для множества  $A \cup B$ .
5. Доказать, что множество  $\{\{1,2\}, 3\}$  неравно множеству  $\{1,2,3\}$ .
6. Существуют ли такие множества  $A, B$  и  $C$ , что  $A \cap B \neq \emptyset, A \cap C = \emptyset, (A \cap B) \setminus C \neq \emptyset$ .
7. Доказать, что  $(A \dot{\cup} B) \cup B = A \Leftrightarrow B \cap A = B$ .
8. Доказать, что  $A \cup B = B \Rightarrow (C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$ .
9. Доказать, что  $A \setminus (B \setminus A) = A$ .
10. Указать все собственные подмножества пустого множества.
11. Сколько подмножеств у четырёхэлементного множества?

## Практическое занятие №2

### Отношения и функции

Цель: Изучить определения декартова бинарного соответствия, функции, композиции соответствий. Научиться решать задачи по доказательству тождеств, включающих декартово произведение множеств и композиции соответствий.

Вопросы, выносимые на практическое занятие.

Декартово произведение множеств.

Степень множества.

Понятие бинарного соответствия. Область определения и область значения бинарного соответствия. Понятия образа и прообраза.

Понятие функции. Недоопределённые (частично определённые) и всюду определённые функции, однозначные (1-1) функции. Понятие подстановки множества.

Композиция соответствий.

Сравнение бесконечных множеств по мощности.

### Краткие теоретические положения

Декартовым произведением множеств  $A$  и  $B$  называются множество всех пар  $(x, y)$ , где  $x$  – элемент множества  $A$ , а  $y$  – элемент множества  $B$ . Формально операция декартова произведения множеств  $A$  и  $B$  определяется следующим образом:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ и } y \in B\}.$$

Если в декартовом произведении  $n$  множеств  $A_1, A_2 \dots A_n$ , то можно записать  $M = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ .

Если в этом произведении принять  $A_1 = A_2 \dots = A_n = A$ , то получим  $A^n$ , где  $A^n$  является степенью множества  $A$ .

Бинарным соответствием между элементами множеств  $A$  и  $B$  называется любое множество  $R$  декартова произведения  $A \times B$ , то есть  $R \subseteq A \times B$ .

Областью определения бинарного соответствия  $R$  называется множество вида:  $\delta_R = \{x | \text{существует } y \text{ такое, что } (x, y) \in R\}$ .

Областью значений бинарного соответствия называется множество

$$\rho_R = \{y | \text{существует } x \text{ такое, что } (x, y) \in R\}$$

Обратным соответствием для бинарного соответствия  $R$  называют множество вида:  $R^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in R\}$ .

Пусть даны множества  $X$  и  $Y$ .

Бинарное соответствие  $R$  является функцией, если каждому элементу  $x \in X$  соответствует не более одного элемента  $y \in Y$ , что выполняется отношение  $(y, x) \in R$ . Это по другому можно записать следующим образом:  $x \in R$  у или  $y=R(x)$ . Значение функции  $y \in Y$  называют образом элемента  $x \in X$ , а сам элемент  $x \in X$  – прообразом элемента  $y$ .

Функция  $y=F(x)$  называется всюду определённой, если каждому элементу  $x \in X$  соответствует некоторый элемент  $y \in Y$ , в противном случае функция является недоопределённой (частично определённой).

Функция называется разнозначной (1-1) функцией, если для любых элементов  $x_1, x_2, y$  из того, что  $y=f(x_1)$  и  $y=f(x_2)$ , следует  $x_1 = x_2$ .

Говорят, что функция  $f:A \rightarrow B$  осуществляет взаимно-однозначное соответствие между  $A$  и  $B$ , если  $\delta f = A, \rho f = B$  и  $f$  является 1-1 функцией.

Взаимно-однозначное соответствие  $f:A \rightarrow A$  называется подстановкой множества  $A$  и обозначается  $i_A$ .

Композицией соответствий  $R_1 \subseteq A \times B$  и  $R_2 \subseteq B \times C$  называется соответствие:

$$R_1 \circ R_2 = \{(x, y) | \text{существует } z \text{ такое, что } (x, z) \in R_1 \text{ и } (z, y) \in R_2\}$$

Пример:  $R_1 = \{(1,2), (2,4), (3,6)\};$

$R_2 = \{(1,3), (2,6), (3,9), (4,12)\}$

$R_1 \circ R_2 = \{(1,6), (2,12)\}$

$(x=1, y=6, z=2) \quad (x=2, y=12, z=4)$

Примеры задач, выносимых на практическое занятие

Задача 1

Доказать тождество

$$(A \cap B) \times (C \cap D) \subset (A \times C) \cap (B \times D).$$

Пусть  $z \in (A \cap B) \times (C \cap D) \Rightarrow z = (x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) \Rightarrow x \in (A \cap B)$  и  $y \in (C \cap D) \Rightarrow x \in A$  и  $x \in B$  и  $y \in C$  и  $y \in D$

$C$  и  $y \in D \Rightarrow (x \in A$  и  $y \in C)$  и  $(x \in B$  и  $y \in D) \Rightarrow (x,y) \in A \times C$  и  $(x,y) \in B \times D \Rightarrow (x,y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$ .

### Задача 2

Доказать тождество

$$R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3 .$$

$(x,y) \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3) \Leftrightarrow$   
 существует  $z$  такое, что  $(x,z) \in R_1$  и  $(z,y) \in R_2 \circ R_3 \Leftrightarrow$   
 существуют  $z, v$  такие, что  $(x,z) \in R_1$  и  $(z,v) \in R_2$  и  $(v,y) \in R_3 \Leftrightarrow (x,v) \in (R_1 \circ R_2)$  и  $(v,y) \in R_3 \Leftrightarrow (x,y) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3 .$

### Задача 3

Найти  $\delta_R, \rho_R, R^{-1}, R \circ R, R \circ R^{-1}$  для отношения  $R = \{(x,y) | x, y \in D \text{ и } 2x \geq 3y\}$ .

а) Область определения бинарного соответствия  $R$  – это множество первых элементов пар  $(x,y)$  из этого соответствия. Так как для каждого  $x \in D$  существует такое  $y = \frac{2}{3}x \in D$ , что  $(x,y) \in R$ . Следовательно  $\delta_R = D$ .

б) Область значений бинарного соответствия  $R$  – это множество вторых элементов пар  $(x,y)$  из этого соответствия. Так как для каждого  $y \in D$  существует такое  $x = \frac{3}{2}y \in D$ , что  $(x,y) \in R$ , то  $\rho_R = D$ .

в) В обратном соответствии  $R^{-1}$  элементы  $x$  и  $y$  в парах из соответствия  $R$  меняются местами. Пусть  $(x,y) \in R$ , где  $x, y \in D$  и  $2x \geq 3y$ . Тогда  $(y,x) \in R^{-1}$ , где  $y, x \in D$  и  $3y \leq 2x$ . Если первую координату обозначить через  $x$ , а вторую через  $y$ , то  $R^{-1} = \{(x,y) | x, y \in D \text{ и } 2y \geq 3x\}$ .

д) Композицией  $R \circ R$  является соответствие  $R \circ R =$

$\{(x,y) | \text{существует } z \text{ такое, что } (x,z) \in R \text{ и } (z,y) \in R\}$   
 А это значит, что:  $2x \geq 3z$  и  $2z \geq 3y$  исходя из условия, заданного для соответствия  $R$ . Отсюда  $4x \geq 6z$  и  $6z \geq 9y$ , или  $\frac{4}{6}x \geq z$  и  $z \geq \frac{9}{6}y$ .

Из этого следует, что если второй элемент пары  $(x,z)$  равен первому элементу пары  $(z,y)$  по определению

композиции, то  $\frac{4}{6}x \geq \frac{9}{6}y$  или  $4x \geq 9y$ .

Итак:  $R \circ R = \{(x, y) | (x, y) \in D \text{ и } 4x \geq 9y\}$ .

е) По определению композиции

$R \circ R^{-1} =$

$\{(x, y) | \text{существует } z \text{ такое, что } (x, z) \in R \text{ и } (z, y) \in R^{-1}\}$

Если  $(x, z) \in R$ , то по условию:  $2x \geq 3z$ , т.е.  $x \geq \frac{3}{2}z$ .

Если  $(z, y) \in R^{-1}$ , то из результатов решения (см. пункт в)) имеем  $2x \geq 3z$ , или  $y \geq \frac{3}{2}z$ .

Итак:  $x \geq \frac{3}{2}z$ ;  $y \geq \frac{3}{2}z$ . Отсюда следует, что числа  $x$  и  $y$  не связаны между собой никакой зависимостью, т.к. для любой пары действительных чисел  $(x, y)$  можно подобрать  $z$  такое, что  $x \geq \frac{3}{2}z$ ,  $y \geq \frac{3}{2}z$ . Например,  $z = \min\{\frac{2}{3}x, \frac{2}{3}y\}$ .

Следовательно, композиция  $R \circ R^{-1} = D \times D = D^2$ .

#### Задача 4

Доказать, что если  $f$  есть функция из  $A$  в  $B$  и  $g$  - функция из  $B$  в  $C$ , то  $f \circ g$  является функцией из  $A$  в  $C$ .

Пусть  $f$  - есть функция из  $A$  в  $B$ , следовательно, для каждого элемента  $x \in A$  существует только 1 элемент  $y \in B$ , что  $y = f(x)$ .

Пусть  $g$  - есть функция из  $B$  в  $C$ , следовательно, для каждого  $y \in B$  существует только 1 элемент  $z \in C$  такой, что  $z = g(y)$ .

Следовательно, для каждого значения  $x$  существует только одна пара  $(x, z) \in f \circ g$ , где  $(x, y) \in f$  и  $(y, z) \in g$ .

А это значит, что композиция  $f \circ g$  отображает элемент  $x \in A$  только на 1 элемент  $z \in C$ , то есть  $z = (f \circ g)(x)$ .

Отсюда следует, что композиция  $f \circ g$  есть функция из  $A$  в  $C$ .



Доказать, что существуют  $A, B$  такие, что  $A \times B \neq B \times A$ .

1. Найти геометрическую интерпретацию следующего множества  $(a, b] \times [c, d)$ , где  $(a, b]$  и  $[c, d)$  – полуинтервалы действительной прямой  $D$ .
2. Доказать, что если  $A, B, C$  и  $D$  не пусты, то  $A \subseteq B$  и  $C \subseteq D \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times D$ .
3. Доказать, что  $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$ .
4. При каких множествах  $A, B, C$  и  $D$  получается равенство?
5. Доказать, что  $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$ .
6. Найти  $\delta_R, \rho_R, R^{-1}, R \circ R, R \circ R^{-1}, R^{-1} \circ R$  для отношения:  
 $R = \{(x, y) | x, y \in N \text{ и } x \text{ делит } y\}$ .
7. Доказать, что  $\delta_R = \emptyset \Leftrightarrow R = \emptyset \Leftrightarrow \rho_R = \emptyset$ .
8. Доказать, что если  $B \neq \emptyset$ , то  $\delta_{A \times B} = A$ .
9. Доказать, что для любых бинарных отношений:  $R \cup R = R \cap R = R$ .
10. Пусть  $A$  и  $B$  – конечные множества, состоящие из  $m$  и  $n$  элементов соответственно. Сколько существует бинарных соответствий между элементами множеств  $A$  и  $B$ ?
11. Пусть  $\varphi: A \rightarrow A$  – подстановка множества  $A$ . Доказать, что  $\varphi^{-1}$  – подстановка множества  $A$ .

## ВАРИАНТ 2

1. Доказать, что можно установить взаимно-однозначное соответствие между множествами  $A \times B$  и  $B \times A$ .
2. Найти геометрическую интерпретацию следующего множества  $[a, b) \times [c, d)$ , где  $[a, b)$  и  $[c, d)$  – полуинтервалы действительной прямой  $D$ .
3. Доказать, что если  $A, B, C$  и  $D$  не пусты, то  $A \subseteq B$  и  $C \subseteq D \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times D$ .
4. Пусть  $A, B, C, D \neq \emptyset$  и  $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D$ . Доказать, что  $A = B = C = D$ .
5. Доказать, что:  $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ .
6. Найти  $\delta_R, \rho_R, R^{-1}, R \circ R, R \circ R^{-1}, R^{-1} \circ R$  для отношения:  
 $R = \{(x, y) | x, y \in N \text{ и } y \text{ делится на } x\}$ .

7. Доказать, что  $\delta_{R^{-1}} = \rho_R, \rho_{R^{-1}} = \delta_R$ .
8. Доказать, что если  $B \neq \emptyset$ , то  $\delta_{A \times B} = A$ .
9. Доказать, что для любых бинарных отношений:  
 $(R^{-1})^{-1} = R$ .
10. Пусть  $A$  и  $B$  – конечные множества, состоящие из  $m$  и  $n$  элементов соответственно. Сколько имеется функций из  $A$  в  $B$ ?
11. Пусть  $\varphi: A \rightarrow B$  – взаимно однозначное соответствие. Доказать, что:  $\varphi^{-1}$  – взаимно однозначное соответствие между  $B$  и  $A$ .

### ВАРИАНТ 3

1. Доказать, что можно установить взаимно однозначное соответствие между множествами:  
 $A \times (B \times C)$  и  $(A \times B) \times C$ .
2. Найти геометрическую интерпретацию следующего множества:  $[a, b]^2$ , где  $[a, b]$  – отрезок действительной прямой  $D$ .
3. Доказать, что если  $A, B, C$  и  $D$  не пусты, то  $A=B$  и  $C=D \Leftrightarrow A \times C = B \times D$ .
4. Пусть  $A, B \neq \emptyset$  и  $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D$ . Доказать, что  $A=B=C=D$ .
5. Доказать, что  $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ .
6. Найти  $\delta_R, \rho_R, R^{-1}, R \circ R, R \circ R^{-1}, R^{-1} \circ R$  для отношения:  
 $R = \{(x, y) | x, y \in D \text{ и } x + y \leq 0\}$ .
7. Доказать, что  $\delta_{(R_1 \circ R_2)} = R_1^{-1}(\rho_{R_1} \cap \delta_{R_2})$ .
8. Доказать, что если  $A \neq \emptyset$ , то  $\rho_{A \times B} = B$ .
9. Доказать, что для любых бинарных отношений имеет место равенство  
 $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$ .
10. Пусть  $A$  и  $B$  – конечные множества, состоящие из  $m$  и  $n$  элементов соответственно. Сколько имеется 1-1 функций из  $A$  в  $B$ ?
11. Пусть  $\varphi: A \rightarrow B$  – взаимно однозначное соответствие. Доказать, что:  $\varphi^{-1} \circ \varphi = i_A$

### ВАРИАНТ 4

1. Доказать, что существуют множества  $A, B$  и  $C$  такие, что:  
 $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$ .
2. Найти геометрическую интерпретацию следующего множества:  $[a, b]^3$ , где  $[a, b]$  – отрезок действительной прямой  $D$ .
3. Доказать, что если множества  $A, B, C$  и  $D$  не пусты, то:  
 $A=B$  и  $C=D \Leftrightarrow A \times C = B \times D$ .
4. Доказать, что:  
 $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$ .  
 При каких множествах  $A, B, C$  и  $D$  получается равенство?
5. Доказать, что:  
 $A \times B = (A \times D) \cap (C \times B)$ , где  $A \subseteq C$  и  $B \subseteq D$ .
6. Найти  $\delta_R, \rho_R, R^{-1}, R \circ R, R \circ R^{-1}, R^{-1} \circ R$  для отношения:  
 $R = \{(x, y) | x, y \in D \text{ и } x - y \leq 0\}$ .
7. Доказать, что  $\rho_{(R_1 \circ R_2)} = R_2(\rho_{R_1} \cap \delta_{R_2})$ .
8. Доказать, что если  $A \neq \emptyset$ , то  $\rho_{A \times B} = B$ .
9. Доказать, что для любых бинарных отношений имеет место равенство:  
 $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$ .
10. Пусть  $A$  и  $B$  – конечные множества, состоящие из  $m$  и  $n$  элементов соответственно. При каких значениях  $m$  и  $n$  существуют взаимно однозначное соответствие между  $A$  и  $B$ ?
11. Доказать, что объединение двух функций  $f_1$  и  $f_2$  из  $A$  в  $B$  является функцией из  $A$  в  $B$  тогда и только тогда, когда  $f_1 = f_2$ .

#### ВАРИАНТ 5

1. Доказать, что существуют множества  $A, B$  и  $C$  такие, что:  
 $A \times ((B \times C) \times D) \neq (A \times B) \times (C \times D)$ .
2. Найти геометрическую интерпретацию следующего множества:  $[2, 4] \times [1, 4]$ , где  $[2, 4]$  – полуинтервал, а  $[1, 4]$  – отрезок действительной прямой  $D$ .
3. Доказать равенство  $\emptyset \times B = A \times \emptyset$ .
4. Доказать, что  $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ .
5. Доказать, что:  
 $A \times B = (A \times D) \cap (C \times B)$ , где  $A \subseteq C$  и  $B \subseteq D$ .

6. Найти  $\delta_R$ ,  $\rho_R$ ,  $R^{-1}$ ,  $R \circ R$ ,  $R \circ R^{-1}$ ,  $R^{-1} \circ R$  для отношения:  
 $R = \{(x, y) \mid x, y \in D \text{ и } x \cdot y \leq 0\}$ .
7. Доказать, что:  $\delta_{R^{-1}} = \rho_R$ ,  $\rho_{R^{-1}} = \delta_R$ .
8. В каком случае имеет место равенство  $\rho_{A \times B} = B$ ? Ответ обосновать.
9. Доказать, что для любых бинарных отношений имеет место равенство:  $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$ .
10. Пусть  $A$  конечное множество. При каких значениях  $m$  и  $n$  имеет место равенство  $A^n = A^m$ ?
11. Пусть  $f_1$  и  $f_2$  функции из  $A$  в  $B$ . Доказать, что их пересечение будет функциональным соответствием.

### ВАРИАНТ 6

1. Доказать, что существуют множества  $A, B$  и  $C$  такие, что:  
 $(A \times (B \times C)) \times D \neq (A \times B) \times (C \times D)$ .
2. Найти геометрическую интерпретацию следующего множества:  $(2, 4] \times [1, 4]$ , где  $(2, 4]$  - полуинтервал, а  $[1, 4]$  - отрезок действительной прямой  $D$ .
3. При каких множествах  $A, B, C$  выполняется равенство  $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ ?
4. Доказать, что  $(A \setminus C) \times (B \setminus D) \subseteq (A \times B) \setminus (C \times D)$ .
5. Доказать, что:  $(A \div B) \times C = (A \times C) \div (B \times C)$ .
6. Найти  $\delta_R$ ,  $\rho_R$ ,  $R^{-1}$ ,  $R \circ R$ ,  $R \circ R^{-1}$ ,  $R^{-1} \circ R$  для отношения:  
 $R = \{(x, y) \mid x, y \in D \text{ и } x \cdot y \geq 0\}$ .
7. Доказать, что:  
 $\delta_R \neq \emptyset \Leftrightarrow R \neq \emptyset \Leftrightarrow \rho_R \neq \emptyset$ .
8. В каком случае имеет место равенство  $\delta_{A \times B} = A$ ? Ответ обосновать.
9. Доказать, что для любых бинарных отношений имеет место равенство:  $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$ .
10. Пусть  $A$  конечное множество. При каких значениях  $m$  и  $n$  имеет место равенство  $|A|^n = |A|^m$ ?
11. Пусть  $f_1$  и  $f_2$  функции из  $A$  в  $B$ . Будет ли их объединение функциональным соответствием?

## ВАРИАНТ 7

1. Доказать, что существуют множества  $A, B$  и  $C$  такие, что:  
 $(A \times (B \times C)) \times D \neq A \times (B \times (C \times D))$ .
2. Найти геометрическую интерпретацию следующего множества:  $(2,4) \times [3, 4]$ , где  $(2, 4)$  - интервал, а  $[3, 4]$  – отрезок действительной прямой  $D$ .
3. При каких множествах  $A, B$  выполняется равенство  $A \times B = B \times A$ ?
4. Доказать, что  $(A \div C) \times (B \div D) \subseteq (A \times B) \div (C \times D)$ .
5. Доказать, что:  $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ .
6. Найти  $\delta_R, \rho_R, R^{-1}, R \circ R, R \circ R^{-1}, R^{-1} \circ R$  для отношения:  
 $R = \{(x, y) \mid x, y \in D \text{ и } x - y = 0\}$ .
7. Существует ли отношение  $R$  такое, что  $\delta_R \neq \emptyset$  и  $\rho_R = \emptyset$ ?
8. Найти условия на множества  $A$  и  $B$ , чтобы выполнялось равенство  
 $\delta_{A \times B} = \rho_{A \times B}$ .
9. Доказать, что для любых бинарных отношений имеет место равенство  
 $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$ .
10. Пусть  $A$  бесконечное множество. При каких натуральных значениях  $m$  и  $n$  имеет место равенство  $|A|^n = |A|^m$ ?
11. Доказать, что пересечение двух функций  $f_1$  и  $f_2$  из  $A$  в  $B$  является функцией из  $A$  в  $B$  тогда и только тогда, когда  $f_1 = f_2$ .

## ВАРИАНТ 8

1. Доказать, что существуют множества  $A, B$  и  $C$  такие, что:  
 $(A \times (B \times C)) \times D = A \times (B \times (C \times D))$ .
2. Найти геометрическую интерпретацию следующего множества:  $(2,4) \times [3, 5)$ , где  $(2, 4)$  - интервал, а  $[3, 5)$  – полуинтервал действительной прямой  $D$ .
3. Доказать, что если множества  $A, B, C$  не пусты, то:  
 $A=B$  и  $C=D \Leftrightarrow A \times C = B \times D$ .
4. Доказать, что  $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ .
5. Найти множество  $(A \setminus B) \times C$ , если  $A = \{2, 5\} \cup (3, 4]$ ,  $B = [1, 3]$  и  $C=6$ .

6. Найти  $\delta_R$ ,  $\rho_R$ ,  $R^{-1}$ ,  $R \circ R$ ,  $R \circ R^{-1}$ ,  $R^{-1} \circ R$  для отношения:  
 $R = \{(x, y) \mid x, y \in D \text{ и } x \cdot y = 0\}$ .
7. Существует ли отношение  $R \neq \emptyset$  такое, что  $\delta_R = \emptyset$  и  $\rho_R = \emptyset$ ?
8. В каком случае имеет место неравенство  $\delta_{A \times B} \neq A$ ?  
 Ответ обосновать.
9. Доказать, что для любых бинарных отношений имеет место равенство:  $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$ .
10. Пусть  $A$  бесконечное множество. При каких натуральных значениях  $m$  и  $n$  имеет место равенство  $A^n = A^m$ ?
11. Пусть  $f_1$  и  $f_2$  функции из  $A$  в  $B$ . Будет ли их разность  $f_1 \setminus f_2$  функциональным соответствием?

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

### ОСНОВНАЯ:

1. Шевелев Ю. П. Дискретная математика. Учебное пособие - Спб.: Изд-во «Лань», 2008.
2. Просветов Г. И. Дискретная математика : задачи и решения: учебное пособие. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.
3. Данилов В. Г., Дубнов В. Л., Лакерник А. Р., Райцин А. М. Дискретная математика. Учебное пособие для вузов. - М.: Горячая линия - Телеком, 2008.
4. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика. - М.; Спб., Киев: Вильямс, 2003.
5. Кузнецов О. П. Дискретная математика для инженера. - СПб: Изд-во «Лань», 2005.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ:

1. Ерусалимский Я. М. Дискретная математика. - М.: Вузовская книга, 2000.
2. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика: Учеб. Для вузов/ Под ред. В.С.Зарубина, А.П.Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.
3. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов. М.: Техносфера, 2003.
4. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. Спб: Питер, 2001.
5. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Элементы дискретной математики. Учебник для вузов. - М.:ИНФРА-М, Новосибирск.: Изд-во НГТУ, 2002.
6. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику: Учебное пособие для вузов/ Под ред. А.А.Садовниченко, - М.:Высш.шк.. 2002.
7. Москинова Г.И. Дискретная математика: Учебное пособие. - М.: Логос, 2000.
8. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. - М., Наука, 2000.

9. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. - М., Наука. 1975.
10. Косточка А.В. Дискретная математика. Ч.2. Новосибирск, НГУ, 1996.
11. Косточка А.В., Соловьева Ф.И. Дискретная математика. Ч.1. Новосибирск, НГУ, 1995.
12. Матросов В.А., Стеценко В.А. Лекции по дискретной математике. - М., МИГУ, 1997.
13. Ежов И.Г.Г, Скороход А.В., Ядренко М.М. Элементы комбинаторики. - М., Наука, 1977.
14. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. Уч. пособие., - М., Наука. 1977.
15. Гордеев Э.Н., Нурлыбаев А.Н, Задачи по дискретной математике. Алма-Ата, КазГУ, 1986.
16. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Под ред. С.В. Яблонского, О.Б. Лупанова. Т. 1. - М., Наука. 1974.
17. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. - М., Наука, 1969.
18. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. - М., Наука, 1975.
19. Методические разработки по курсу «Элементы дискретной математики». Составитель А.В. Яблонский, МГУ, - М., 1971.
20. Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики: Учебное пособие. - М.: Изд-во МАИ. 1992.