МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждения высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра информационной безопасности

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____________ О.Г. Локтионова
«_14_»_______________2017 г.

АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Методические указания к практическим занятиям
для студентов направления подготовки бакалавриата
10.03.01«Информационная безопасность»

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна
Должность: проректор по учебной работе
Дата подписания: 04.10.2022 09:35:31
Уникальный программный ключ:
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

Курск 2017

УДК 621.(076.1)

Составитель: В.П. Добрица

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры
«Информационные системы и технологии» Ю.А. Халин

Алгебра высказываний [Текст] : методические указания к практическим занятиям / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.П. Добрица. – Курск, 2017. – 28 с. – Библиогр.: с. 28.

Содержат сведения и материалы, необходимые для успешного освоения знаний по алгебре высказываний. Указывается порядок выполнения практических занятий, приводятся рекомендации по оформлению результатов работ.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утвержденной учебно-методическим объединением по специальности.

Предназначены для студентов направления подготовки бакалавриата 10.03.01 «Информационная безопасность».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 14.12. Формат 60х84 1/16.
Усл.печ. л. 1,63. Уч.-изд. л. 1,47. Тираж 100 экз. Заказ. Бесплатно. 2470
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

В данных методических рекомендациях изложены материалы по разделу «Алгебра высказываний» курса «Математическая логика и теория алгоритмов».

Рассмотрены следующие темы: высказывания, логические операции, формулы и подформулы алгебры высказываний, таблицы истинности, ДНФ и КНФ, СДНФ и СКНФ, МДНФ, полнота системы булевых функций.

По каждой теме представлены:

1) краткие теоретические положения;
2) перечень вопросов, выносимых на практическое задание;
3) примеры задач, выносимых на практическое занятие;
4) задачи, выносимые на самостоятельную работу студентов.

Данные методические рекомендации предназначены для проведения практических занятий по дисциплине «Математическая логика и теория алгоритмов» для студентов второго курса Юго-Западного государственного университета направления подготовки: информационная безопасность.

По изложенным в данных методических рекомендациях материалам можно рекомендовать преподавателю проведение 6-ти часов практических занятий по следующему плану:

- Формулы алгебры высказываний и их свойства.
  ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ. (2 часа).
- Полнота системы булевых функций. (2 часа).
- Минимизация представления булевых функций (2 часа).

При выполнении практических заданий в каждой задаче выберете задание своего варианта. Вариант определяется по последней цифре номера зачетной книжки. Сделанные выводы обосновать. Отчет по работе должен содержать решения задач с полным обоснованием. Отчет по работе оформить на листах формата А 4. На титульном листе должно быть указано: Университет, факультет, кафедра, предмет, номер практического занятия, группа, исполнитель, проверяющий.

Работа № 1 Формулы и подформулы алгебры высказываний

Цель: изучить понятия высказывания, формулы, подформулы, сложность формулы, типы формул, эквивалентные формулы и эквивалентные преобразования формул.

Вопросы, выносимые на практическое занятие.

1. Понятие высказывания. Истинность высказывания.
2. Формулы и подформулы. Порядок выполнения логических операций. Сложность формулы.
3. Таблицы истинности. Выполнимые, тождественно истинные и невыполнимые формулы.
4. Основные законы логики.
5. Эквивалентные формулы, эквивалентные преобразования формул.
6. Представление высказываний в виде формул алгебры высказываний.

Краткие теоретические сведения.

Высказывание - повествовательное предложение *(утверждение, суждение),* о котором имеет смысл говорить, что оно *истинно (значение 1)* или *ложно (значение 0).*

Табличное задание *логических операций.*

Исходные высказывания		Вид операции							
A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$	$A \mid B$	$A \uparrow B$	$A \oplus B$
0	0	1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0

Формулой алгебры высказываний называется выражение, составленное из переменных высказываний с помощью операций над высказываниями и обращающееся в конкретное высказывание при подстановке вместо переменных высказываний конкретных высказываний.

Подформулой формулы $\mathcal{A}$ называется любое подслово (часть) слова $\mathcal{A}$, которое само являющееся формулой.

Формула алгебры высказываний называется *тавтологией* или *тождественно истинной*, если при любых значениях входящих в нее переменных высказываний она превращается всегда в истинное высказывание.

Формула алгебры высказываний называется *тождественно ложной* или *противоречием*, если она ложна, как бы ни определялись значения переменных высказываний, входящих в эту формулу

Формула алгебры высказываний называется *выполнимой* (разрешимой), если при определенном наборе значений переменных высказываний она превращаться в истинное высказывание.

Под сложностью формулы понимается число, характеризующее число этапов построения формулы. *Сложность формулы* равна максимальной сложности собственных подформул, увеличенная на 1. Простые высказывания имеют сложность 0.

Формулы A и B называются эквивалентными (равносильными). (обозначается $A \equiv B$), если при любых значениях переменных высказываний значение A совпадает со значением B.

Если $\mathcal{V}$ является подформулой формулы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{V}$ эквивалентна $\mathcal{W}$, то формула $\mathcal{F}_1$, полученная из $\mathcal{F}$ заменой подформулы $\mathcal{V}$ на $\mathcal{W}$, эквивалентна формуле $\mathcal{F}$.

Если две формулы эквивалентны $A \equiv B$, то формула $A \leftrightarrow B$ тождественно истинна.

Примеры выполнения заданий

Задача 1. Определите, является ли данное выражение формулой. Если это формула, то выпишите последовательность построения формулы.

Выражение $(A\vee B)(C \to A)$ формулой не является, т.к. выражения $(A\vee B)$ и $(C \to A)$ формулами являются в соответствии с определением, но между ними нет ни какой операции.

Задача 2. Сколькими способами можно расставить скобки в последовательности, чтобы получилась формула. Выписать все возможные получаемые формулы.

В выражении $A \to B\vee C$ можно расставить скобки для получения формулы двумя способами: $((A \to B)\vee C)$ и $(A \to (B\vee C))$. В первом случае первой выполняется операция импликации, а вторая – дизъюнкция. Во второй формуле первой выполняется дизъюнкция, а второй – импликация.

Задача 3. Выписать все подформулы данной формулы.

В формуле $((A \to B)\vee C)$ пять подформул: A, B, C, $(A \to B)$ и сама формула, которая является несобственной подформулой. Первые 4 являются собственными подформулами.

Задача 4. Указать тип формулы. Доказать вывод.

Для формулы $((A \to B)\vee C)$ составим таблицу истинности, с помощью которой и определим тип формулы.

A	B	C	$(A \to B)$	$((A \to B)\vee C)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Так как у формулы есть значение 0, то она не является тождественно истинной. А так как есть значения 1, то она является выполнимой.

Задача 5. С помощью таблиц истинности, а так же с помощью эквивалентных преобразований проверить на эквивалентность формулы:

$((A \to B) \vee C)$ и $((A \vee B) \vee C)$.

Для первой формулы таблица истинности составлена в предыдущей задаче, поэтому составим таблицу истинности только для второй формулы.

A	B	C	$(A \vee B)$	$((A \vee B) \vee C)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Формулы принимают значение 0 на разных наборах значений переменных, поэтому они не эквивалентны.

К первой формуле применим эквивалентное преобразование, заменив импликацию через отрицание и дизъюнкцию. В силу ассоциативности дизъюнкции в формулах можно опустить некоторые скобки.

$$((A \to B) \vee C) \equiv ((\neg A \vee B) \vee C) \equiv \neg A \vee B \vee C \not\equiv A \vee B \vee C \equiv ((A \vee B) \vee C)$$

Задача 6. Представьте логическими формулами пословицы и поговорки.

В поговорке «Без труда не вынешь и рыбки из пруда» выделим простые высказывания, обозначив из буквами: А- Человек трудится, В – поймать рыбку в пруду. Тогда пословица примет вид $((\neg A) \to (\neg B))$.

Задача 7. Доказать законы логики. Закон двойного отрицания.

A	¬A	¬¬A	A ↔ ¬¬A
0	1	0	1

1	0	1	1

Задача 8. При каких значениях переменных формула ложна.

Для формулы $(X \vee Y) \to X$ можно составить таблицу истинности и выбрать те наборы простых высказываний, на которых формула имеет значение 0. Но можно эти наборы получить рассуждениями. Импликация ложна только в случае истинности посылки и ложности заключения. Следовательно, $X = 0$, но при этом посылка будет истинной только при Y$= 1$. В данном случае это единственный набор, на котором формула ложна.

Практические задания по вариантам

Задача 1. Определите, является ли данное выражение формулой. Если это формула, то выпишите последовательность построения формулы.

Вариант	Выражение
1	$(A_0\&A_1)A_2\neg A_3$
2	$(A_0\&A_1)\Rightarrow A_5$
3	$((A_3\Rightarrow A_0)\&\neg A_0)$
4	$(((\neg A_0)\Rightarrow A_1)\Rightarrow\neg(A_2\vee A_3))$
5	((X) ⇒(У))&(Z)
6	(X&(У))∨(Z)
7	(¬A⇒B&C)∨(D&¬A⇒C)
8	$((A_0\Rightarrow A_1)\Rightarrow((A_0\neg A_1)\Rightarrow\neg A_1)$
9	$A_0\Rightarrow(\neg A_1\vee(A_1\&)A_2$
10	$A_1\Rightarrow A_2\Rightarrow A_3\Rightarrow\neg A_1\Rightarrow\neg A_2$

Задача 2. Сколькими способами можно расставить скобки в последовательности, чтобы получилась формула. Выписать все возможные получаемые формулы.

Вариант	Выражение
1	$A_1\Rightarrow A_2\Rightarrow A_3\Rightarrow\neg A_1\Rightarrow\neg A_2$
2	$A_0\Rightarrow\neg A_1\vee A_1\&A_2$
3	$\neg A_0\Rightarrow A_1\Rightarrow\neg A_2\vee A_3$

4	$X \Rightarrow Y \& Z$
5	$A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_0 \Rightarrow \neg A_1$
6	$A_0 \& A_1 \Rightarrow A_2 \& \neg A_3$
7	$A_0 \& A_1 \Rightarrow A_5$
8	$A_3 \Rightarrow A_0 \& \neg A_0$
9	$\neg A \Rightarrow B \& C \vee D \& \neg A \Rightarrow C$
10	$X \& Y \vee Z$

Задача 3. Выписать все подформулы данной формулы.

Вариант	Выражение
1	$(((A_0 \Rightarrow A_1) \& (A_1 \Rightarrow A_2)) \Rightarrow (\neg A_0 \vee A_2))$
2	$(\neg A_0 \Rightarrow A_1) \Rightarrow (\neg A_2 \vee A_3)$
3	$((A_0 \Rightarrow \neg A_1) \vee A_1) \& A_2$
4	$((A_0 \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_0 \Rightarrow \neg A_1) \Rightarrow \neg A_1)$
5	$(\neg A \Rightarrow B \wedge C) \vee ((D \wedge \neg A) \Rightarrow \neg C)$
6	$(\neg (A \Rightarrow B) \& C) \vee (((D \& (\neg A)) \Rightarrow C)$
7	$((A \wedge B) \Rightarrow C) \wedge (D \vee (A \Leftrightarrow C))$
8	$(\neg A \Rightarrow B \wedge C) \vee (D \wedge \neg A \Rightarrow \neg C)$
9	$(A_0 \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_0)) \Rightarrow (\neg A_1)$
10	$(((\neg A_0) \Rightarrow A_1) \Rightarrow \neg (A_2 \vee A_3))$

Задача 4. Указать тип формулы. Доказать вывод.

Вариант	Выражение
1	$(A \wedge B \Rightarrow C) \wedge (D \vee A \Leftrightarrow C)$
2	$(\neg (A \Rightarrow B) \& C) \vee (((D \& (\neg A)) \Rightarrow C)$
3	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
4	$(A \vee B) \wedge (B \Rightarrow A)$
5	$(A \wedge B \Rightarrow C) \wedge (D \wedge A \Rightarrow C)$
6	$(\neg A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
7	$((A \wedge B) \Rightarrow C) \wedge (D \vee (A \Leftrightarrow C))$
8	$(\neg A \Rightarrow \neg B) \wedge (B \Rightarrow A)$
9	$(\neg A \Rightarrow B \wedge C) \vee ((D \wedge \neg A) \Rightarrow \neg C)$
10	$(\neg A \Rightarrow B \wedge C) \vee (D \wedge \neg A \Rightarrow C)$

Задача 5. С помощью таблиц истинности, а так же с помощью эквивалентных преобразований проверить на эквивалентность формулы.

Вариант	Формулы	
1	$(A\Rightarrow A\wedge C)\vee(B\wedge\neg A)$	$(A\Rightarrow(A\wedge C\Leftrightarrow B))$
2	$(A\Rightarrow A\wedge C)\vee(B\wedge\neg A)$	$(A\Rightarrow(C\Rightarrow B))$
3	$(A\Rightarrow A\wedge C)\vee(B\wedge\neg A)$	$(A\wedge C)\vee(\neg B\vee\neg A\wedge B)$
4	$(A\Rightarrow A\wedge C)\vee(B\wedge\neg A)$	$\neg A\vee B\vee\neg C$
5	$(A\wedge B\Rightarrow\neg B\vee A\wedge C)$	$(\neg B\Leftrightarrow A)\Rightarrow C)$
6	$(A\wedge B\Rightarrow\neg B\vee A\wedge C)$	$(A\mid B)\vee C$
7	$(A\wedge B\Rightarrow\neg B\vee A\wedge C)$	$(A\uparrow C)\mid B$
8	$(A\wedge B\Rightarrow\neg B\vee A\wedge C)$	$B\Rightarrow A\wedge C\vee\neg A\wedge B$
9	$B\Rightarrow A\wedge C\vee\neg A\wedge B$	$(A\Rightarrow(A\wedge C\Leftrightarrow B))$
10	$B\Rightarrow A\wedge C\vee\neg A\wedge B$	$(A\wedge C)\vee(\neg B\vee\neg A\wedge B)$

Задача 6. Представьте логическими формулами пословицы и поговорки.

Вариант	Выражение
1	Без еды не будет и беседы.
2	Без недостатка только Бог, без грязи только вода.
3	Близкому не говори ложь, постороннему не говори правду.
4	Если тебе угощать нечем – хоть говори ласково.
5	Когда грома много – дождя мало.
6	Гнев впереди, ум позади.
7	Доброе слово — половина счастья.
8	Если уважаешь отца, люби и сына; если уважаешь хозяина, корми и его собаку.
9	Кочерга длинная – не обожжешь руки; много родных – люди не обидят.
10	Кто много видит – становится умнее, кто много говорит – становится красноречивее.

Задача 7. Доказать законы логики.

Вариант	Название законов.
1	Закон двойного отрицания. Идемпотентность дизъюнкции.

2	Коммутативный закон конъюнкции. Закон тождества.
3	Коммутативный закон дизъюнкции. Идемпотентность конъюнкции.
4	Ассоциативность конъюнкции. Закон поглощения для дизъюнкции.
5	Ассоциативность дизъюнкции. Закон поглощения для конъюнкции.
6	Дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции. Закон противоречия.
7	Дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции. Свойства единицы.
8	Закон де Моргана - отрицание конъюнкции. Выражение импликации через дизъюнкцию.
9	Закон де Моргана - отрицание дизъюнкции. Выражение импликации через конъюнкцию.
10	Закон исключения третьего. Свойства нуля.

Задача 8. При каких значениях переменных формула ложна.

Вариант	Формула
1	$(((X\Rightarrow(Y\wedge Z))\Rightarrow(\neg Y\Rightarrow\neg X))\Rightarrow\neg Y)$
2	$(((X\vee Y)\vee Z)\Rightarrow((X\vee Y)\wedge(X\vee Z)))$
3	$(((X\vee Y)\wedge((Y\vee Z)\wedge(Z\vee X)))\Rightarrow((X\wedge Y)\wedge Z))$
4	$((X\vee Y)\Rightarrow((\neg X\wedge Y)\vee(X\wedge\neg Y)))$
5	$(((X\Rightarrow Y)\Rightarrow(Y\Rightarrow X))$
6	$((Q\Rightarrow(P\wedge R))\wedge\neg((P\vee R)\Rightarrow Q))$
7	$\neg(X\Rightarrow\neg X)$
8	$(((X\vee Y) \wedge Z)\Rightarrow((X\vee Y)\wedge(X\vee Z)))$
9	$(((X\Rightarrow(Y\wedge Z))\Rightarrow(\neg Y\vee\neg X))\Rightarrow\neg Y)$
10	$(((X\vee Y)\Rightarrow(Y\Rightarrow X))$

РАБОТА №2. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

Цель: изучить понятия булевой функции, дизъюнктивной и конъюнктивной нормальных форм, совершенные формы, представление булевых функций формулами алгебры высказываний.

Вопросы, выносимые на практическое занятие.

1. Понятие булевой функции.
2. Элементарные дизъюнкции и конъюнкции, их свойства.
3. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы.
4. Совершенные нормальные формы.
5. Представление булевых функций формулами алгебры высказываний.

Краткие теоретические сведения.

Элементарной конъюнкцией (дизъюнкцией) называется произвольная конъюнкция (дизъюнкция) формул, каждая из которых есть пропозициональная переменная или отрицание пропозициональной переменной.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется произвольная дизъюнкция элементарных конъюнкций.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется произвольная конъюнкция элементарных дизъюнкций.

ДНФ (КНФ) называется *совершенной* и обозначается СДНФ (СКНФ), если каждая переменная формулы F входит в каждую элементарную конъюнкцию (дизъюнкцию) ровно один раз с отрицанием или без отрицания и дизъюнктивные (конъюнктивные) члены все различны.

ДНФ (КНФ, СДНФ, СКНФ), эквивалентная данной формуле $\mathcal{F}$, называется ДНФ (КНФ, СДНФ, СКНФ) формулы $\mathcal{F}$.

Функция называется *булевой*, если она сама и ее переменные могут принимать только два значения 0 и 1.

Каждая булева функция от n переменных, отличная от константы 0, имеет единственную (с точностью до перестановки дизъюнктивных членов) СДНФ.

Каждая булева функция от n переменных, отличная от константы 1, имеет единственную (с точностью до перестановки конъюнктивных членов) СКНФ.

Преобразование логических выражений к нормальной форме осуществляется путем применения следующих основных правил.

1) Все логические операции, содержащиеся в формуле выразить через основные — конъюнкцию, дизъюнкцию, отрицание по законам логики.
2) Заменить знак отрицания, относящийся к выражениям типа $A \wedge B$ или $A \vee B$, знаками отрицания, относящимися к отдельным переменным высказываниям на основании законов де Моргана.
3) Избавиться от знаков двойного отрицания.
4) Применить, если нужно, к операциям конъюнкции и дизъюнкции свойства дистрибутивности и формулы поглощения.

В алгебре высказываний используется обозначение степени по следующей формуле:

$$X^{\alpha} = \begin{cases} X, \text{если } \alpha = 1, \\ \neg X, \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Элементарная конъюнкция ${X_1}^{\alpha_1}{X_2}^{\alpha_2} \dots {X_n}^{\alpha_n}$ принимает значение 1 тогда и только тогда, когда $X_i = \alpha_i$.

Элементарная дизъюнкция ${X_1}^{\alpha_1} \vee {X_2}^{\alpha_2} \vee \dots \vee {X_n}^{\alpha_n}$ принимает значение 0 тогда и только тогда, когда $X_i = \neg\alpha_i$.

На основании этих фактов СДНФ (СКНФ) может находиться по таблице истинности.

Для нахождения СДНФ в таблице истинности выбираются строки, где формула истинна. По ним составляются элементарные конъюнкции в соответствии с указанным свойством. Их дизъюнкция и даст СДНФ.

Для нахождения СКНФ в таблице истинности формулы выбираются строки, где формула ложна. По ним составляются элементарные дизъюнкции в соответствии с указанным выше свойством. Их конъюнкция и даст СКНФ.

Для булевой функции сначала составляется таблица истинности. При составлении форм по таблицам истинности они сразу получаются совершенными.

Практические задания по вариантам

Задача 1.

№ варианта	Задание
1	Среди данных формул указать ДНФ. 1) $(A\wedge B)\vee(C\wedge D)$; 2) $(A\vee B)\wedge(C\vee D)$; 3) $(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$; 4) $(A\vee B)\wedge(A\vee C)$; 5) $(A\vee C)\wedge(A\vee\neg B\vee\neg C)$.
2	Среди данных формул указать КНФ. 1) $(A\wedge B)\vee(C\wedge D)$; 2) $(A\vee B)\wedge(C\vee D)$; 3) $(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$; 4) $(A\vee B)\wedge(A\vee C)$; 5) $(A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge\neg B\wedge\neg C)$.
3	Среди данных формул указать ДНФ. 1) $(A\wedge B)\vee(C\Rightarrow D)$; 2) $(A\vee B)\wedge(C\vee D)$; 3) $(A\wedge B)\vee(A\mid C)$; 4) $(A\vee B)\wedge(A\vee C)$; 5) $(A\wedge B\wedge C)\vee(A\Rightarrow B\wedge\neg C)$.
4	Среди данных формул указать КНФ. 1) $(A\wedge B)\vee(C\wedge D)$; 2) $(A\vee B)\wedge(C\mid D)$; 3) $(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$; 4) $(A\uparrow B)\wedge(A\vee C)$; 5) $(A\vee C)\wedge(A\vee\neg B\Rightarrow\neg C)$.
5	Среди данных формул указать ДНФ. 1) $(A\wedge B)\vee(C\wedge\neg D)$; 2) $(A\vee B)\wedge(C\vee D)$; 3) $(A\wedge B)\vee(A\mid C)$; 4) $(A\vee C)\wedge(A\vee\neg B\vee\neg C)$; 5) $(A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge\neg B\wedge\neg C)$.
6	Среди данных формул указать КНФ. 1) $(A\vee B)\wedge(C\vee\neg D)$; 2) $(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$; 3) $(A\vee B)\wedge(A\mid C)$; 4) $(A\vee C)\wedge(A\vee\neg B\vee\neg C)$; 5) $(A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge\neg B\wedge\neg C)$.
7	Среди данных формул указать ДНФ. 1) $(A\mid B)\vee(C\wedge D)$; 2) $(A\vee B)\wedge(C\vee D)$; 3) $(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge C)$; 4) $(A\vee C)\wedge(A\vee\neg B\vee\neg C)$; 5) $(A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge\neg B\wedge\neg C)$.
8	Среди данных формул указать ДНФ. 1) $(A\wedge B)\vee(C\wedge D)$; 2) $(A\vee B)\wedge(A\vee C)$; 3) $(A\wedge B)\vee(A\mid C)$; 4) $(A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge\neg B\wedge\neg C)$; 5) $(A\vee B)\wedge(C\vee D)$.
9	Среди данных формул указать КНФ. 1) $(A\vee C)\wedge(A\vee\neg B\Rightarrow\neg C)$; 2) $(A\wedge B)\vee(C\wedge\neg D)$; 3) $(A\uparrow B)\wedge(A\vee C)$; 4) $(A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge\neg B\wedge\neg C)$; 5) $(A\vee B)\wedge(C\vee D)$.
10	1) $(A\vee B)\wedge(A\mid C)$; 2) $(A\wedge B)\vee(A\mid C)$; 3) $(A\vee C)\wedge(A\vee\neg B\Rightarrow\neg C)$; 4) $(A\vee B)\wedge(A\vee C)$;

	5) (A∧B)∨(A∧C).

Задача 2.

№ варианта	Задание
1	Докажите, не прибегая к таблице истинности, что следующая формула не является тождественно истинной: $(Y \vee Z) \Rightarrow ((X \vee Y) \Rightarrow (X \wedge Z))$.
2	Доказать, что формула от *n* переменных является тождественно истинной формулой тогда и только тогда, когда ее СДНФ содержит 2^n попарно не эквивалентных элементарных конъюнкций .
3	Доказать, что формула от *n* переменных является тождественно ложной формулой тогда и только тогда, когда ее СКНФ содержит 2^n попарно не эквивалентных элементарных дизъюнкций.
4	Упростить выражение $\neg((X \Rightarrow У) \wedge (У \Rightarrow \neg X))$.
5	Выразить функцию X|Y через импликацию и отрицание.
6	Докажите, не прибегая к таблице истинности, что следующая формула не является тождественно истинной: $\neg((X \Rightarrow У) \wedge (У \Rightarrow \neg X))$.
7	Упростить выражение $(Y \vee Z) \Rightarrow ((X \vee Y) \Rightarrow (X \wedge Z))$.
8	Докажите, не прибегая к таблице истинности, что следующая формула не является тождественно истинной: (A∧B∧C)∨(A∧¬B∧¬C).
9	Упростить выражение (A∧B∧C)∨(A∧¬B∧¬C).
10	Докажите, не прибегая к таблице истинности, что следующая формула не является тождественно истинной: (A↑B) ∧(A∨C).

Задача 3.

Приведите данные логические выражения к конъюнктивной и дизъюнктивной нормальной формам (КНФ и ДНФ). Докажите равносильность полученных формул.

№ варианта	Исходные формулы.
1	• $((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (Z \Rightarrow Y)) \Rightarrow X$; • $(\overline{X} \to Z) \sim (\overline{Z} \mid У)$.
2	• $(X \wedge Y) \vee (\neg Y \wedge Z)$; • $(X \to \overline{Z})\ \overline{\oplus}\ (\overline{У} \mid Z)$.
3	• $(X \wedge Y) \vee (\neg Y \wedge Z)$;

	• $(\overline{Z} \to \overline{X}) \sim (Z \to \text{У})$.
4	• $(X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee Z \vee X) \vee X$; • $(Z \to X) \oplus (\overline{\text{У}} \to Z)$.
5	• $(X \mid \text{У}) \to (\text{У} \sim \overline{Z})$; • $(X \sim \overline{\text{У}}) \mid (Z \to \overline{\text{У}})$.
6	• $(\text{У} \mid X) \to (\overline{\text{У}} \mathbin{\overline{\sim}} Z)$; • $(\overline{X} \oplus \text{У}) \mid (\overline{Z} \to \text{У})$.
7	• $(\overline{X} \mid \text{У}) \to (\text{У} \sim Z)$; • $(\overline{X} \to \overline{\text{У}}) \oplus (\text{У} \mid Z)$.
8	• $(\overline{X} \mid \overline{\text{У}}) \to (\overline{\text{У}} \sim \overline{Z})$; • $(X \to \text{У}) \to (\overline{\text{У}} \oplus \overline{Z})$.
9	• $(X \sim \text{У}) \mid (\text{У} \to \overline{Z})$; • $(X \to \text{У}) \sim (\overline{Z} \mid \overline{Z})$.
10	• $(\overline{X} \oplus \text{У}) \mid (\overline{\text{У}} \to Z)$; • $(\overline{X} \oplus \text{У}) \mid (\overline{Z} \to \text{У})$.

Задача 4.

Построить совершенные нормальные формы.

№ варианта	Содержание задачи.
1	Построить СДНФ для функции от трех переменных, которая равна 1 тогда и только тогда, когда две или три переменные равны 0.
2	Построить СДНФ (от трех переменных), которая равна 1 тогда и только тогда, когда ровно две переменные равны 1.
3	Построить СДНФ от трех переменных, которая равна 1 тогда и только тогда, когда одна или три переменные равны 1.
4	Построить СДНФ от трех переменных, которая равна 1 тогда и только тогда, когда две или три переменные равны 1.
5	Построить СКНФ от трех переменных, которая равна 0 тогда и только тогда, когда одна или три переменные равны 1.
6	Найти СКНФ от трех переменных, которая эквивалентна функции равной 1 тогда и только тогда, когда одна или три переменные равны 0.
7	Построить СДНФ от трех переменных, которая равна 1 тогда и только тогда, когда ровно две переменные равны 0.
8	Построить СКНФ от трех переменных, которая равна 0 тогда и только тогда, когда ровно две переменные равны 1.
9	Построить СКНФ от трех переменных, которая истинна в том и только в том случае, когда ровно две переменные

	ложны.
10	Построить СКНФ от трех переменных, которая принимает такое же значение, как и большинство переменных.

Задача 5.

Построить формулу алгебры высказываний, обладающую следующей функцией истинности:

№ варианта	Функция истинности
1	f(0,0,0)=f(1,1,0)=f(0,1,0)=f(0,1,1)=0
2	f(1,1,1)=f(1,0,0)=f(0,0,1)=f(1,0,1)=1
3	f(0,0,0)=f(1,1,0)=f(0,1,0)=f(0,1,1)= 1
4	f(1,1,1)=f(1,0,0)=f(0,0,1)=f(1,0,1)= 0
5	f(0,0,0)=f(1,1,0)=f(0,1,0)=f(0,1,1)=1
6	f(1,1,1)=f(1,0,0)=f(0,0,1)=f(1,0,1)=0
7	f(0,0,0)=f(1,1,0)=f(0,1,0)=f(0,1,1)= 0
8	f(1,1,1)=f(1,0,0)=f(0,0,1)=f(1,0,1)= 1
9	f(0,0,1)=f(1,1,0)=f(0,1,0)=f(0,1,1)=0
10	f(1,1,0)=f(1,0,0)=f(0,0,1)=f(1,0,1)=1

РАБОТА №3. Минимизация дизъюнктивных нормальных форм. Контактные схемы.

Цель: освоить алгоритм Квайна приведения ДНФ к минимальной дизъюнктивной нормальной форме, реализовывать булевы функции контактными схемами.

Вопросы, выносимые на практическое занятие.

1. Сокращенные и тупиковые нормальные формы.
2. Минимизация дизъюнктивной нормальной формы по методу Квайна.
3. Элементарные импликанты и ядро МДНФ.
4. Реализация булевых функций контактными схемами.

Краткие теоретические сведения.

ДНФ называется *сокращенной*, если она не совпадает с эквивалентной ей СДНФ и не содержит одинаковых элементарных конъюнкций.

Если ДНФ уже больше нельзя сократить по законам логики, то она называется *тупиковой* (ТДНФ).

Каждый дизъюнкт в тупиковой ДНФ, представляющий собой элементарную конъюнкцию *K*, которая может принимать значение 1 на нескольких наборах значений переменных, на которых исходная функция *f* принимает значение 1. Импликация $K \Rightarrow f$ является тождественно истинной. В соответствии с этим иногда *K* называют *элементарной импликантой*.

Дизъюнктивная форма, содержащая наименьшее число элементарных импликант, называется *минимальной дизъюнктивной нормальной формой* (МНДФ).

Метод Квайна получения МДНФ.

Рассмотрим булеву функцию f, заданную равенствами:
f (0,0,1,1)= f (0,1,0,1)= f (0,1,1,1)= f (1,0,1,1)= f (0,1,0,0)=
=f (0,1,1,0)= f (1,0,1,0)= f (1,1,0,0)=1

Для этой функции СДНФ является выражение:

$$\neg x_1 \cdot \neg x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee \neg x_1 \cdot x_2 \cdot \neg x_3 \cdot x_4 \vee \neg x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee$$
$$x_1 \cdot \neg x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee \neg x_1 \cdot x_2 \cdot \neg x_3 \cdot \neg x_4 \vee \neg x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \neg x_4 \vee$$

$$x_1 \cdot \neg x_2 \cdot x_3 \cdot \neg x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \neg x_3 \cdot \neg x_4$$

Эту формулу можно получить исходя из наборов значений переменных, что равносильно преобразованиям по законам логики. Так наборы (0,0,1,1) и (1,0,1,1) различаются по значениям только одной переменной x_1. Это означает, что независимо от значения первой переменной при фиксированных значениях других переменных, значение функции будет равно 1. Тогда эти наборы можно объединить, ставя прочерк вместо первой переменной: (_,0,1,1). Проводя подобные объединения по всем наборам, мы получим следующие наборы с прочерками, которые больше не сокращаются.

(_,0,1,1), (_,1,0,0), (0,_,1,1), (0,1,_,_), (1,0,1,_).

Соответствующая таблица Квайна:

Элементарные импликанты	Сокращенные наборы	Наборы значений переменных, определяющие 1 булевой функции							
		0100	0011	0101	1010	0100	0110	0111	1011
$x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	_100	1				1			
$\overline{x_2}\,x_3x_4$	_011		1						1
$\overline{x_1}\,x_3x_4$	0_11		1					1	
$\overline{x_1}\,x_2$	01_ _	1		1		1	1	1	
$x_1\,\overline{x_2}\,x_3$	101_				1				1

Совокупность элементарных импликант, которые входят в любую минимальную дизъюнктивную нормальную форму, называется *ядром* этой формы. В таблице их определяют по столбцам, в которых только одна 1. В приведенной таблице разным цветом выделены столбцы, которые определяются элементарными импликантами из ядра.

По таблице получаем две различные минимальные дизъюнктивные нормальные формы.

1) $\overline{x_1}\,x_2 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_2}\,x_3x_4$; 2) $\overline{x_1}\,x_2 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_1}\,x_3x_4$.

Контакт ——A , соответствующий высказыванию A разомкнут, если высказывание A ложно. и замкнут, если это высказывание истинно.

Дизъюнкция высказываний A∨B реализуется параллельным соединением блоков A и B. Конъюнкция A∧B реализуется последовательным соединением контактов A и B.

Для реализации булевой функции контактной схемой сначала строится эквивалентная ей *булева формула* (формула алгебры высказываний, содержащая только три операции ∨, ∧, ¬), а потом строится контактная схема, реализующая эту формулу. Обычно для этого выбирают минимальную дизъюнктивную нормальную форму.

Функция f* называется *двойственной* к функции f, если для любого набора значений переменных выполняется равенство

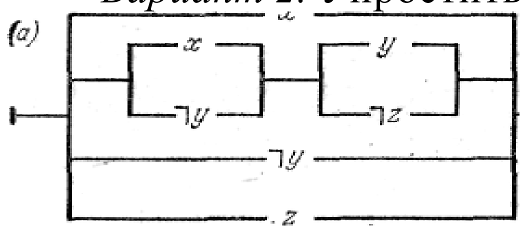
$$f^*(x_1, \cdots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \cdots, \neg x_n).$$

Практические задания по вариантам

Задача 1.

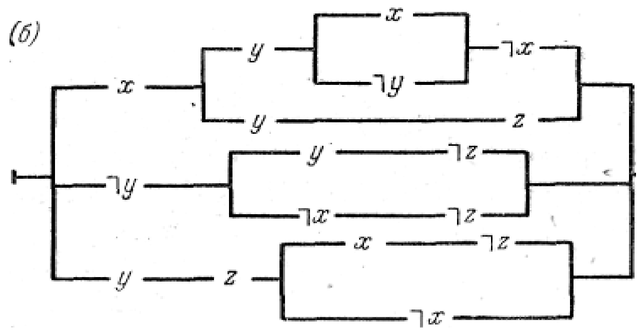
Вариант 1. Из контактов *x, y, z* составить схему так, чтобы, она замкнулась тогда и только тогда, когда замкнуты какие-нибудь два из трех контактов *x, y, z*.

Вариант 2. Упростить контактную схему:



Вариант 3. Исходя из эквивалентности (P⊕Q)~((P∨Q)∧(¬P∨¬Q)), найти схему реализации операции ⊕.

Вариант 4. Упростить контактную схему:



Вариант 5. Составить контактную схему голосования по большинству голосов при 5 голосующих.

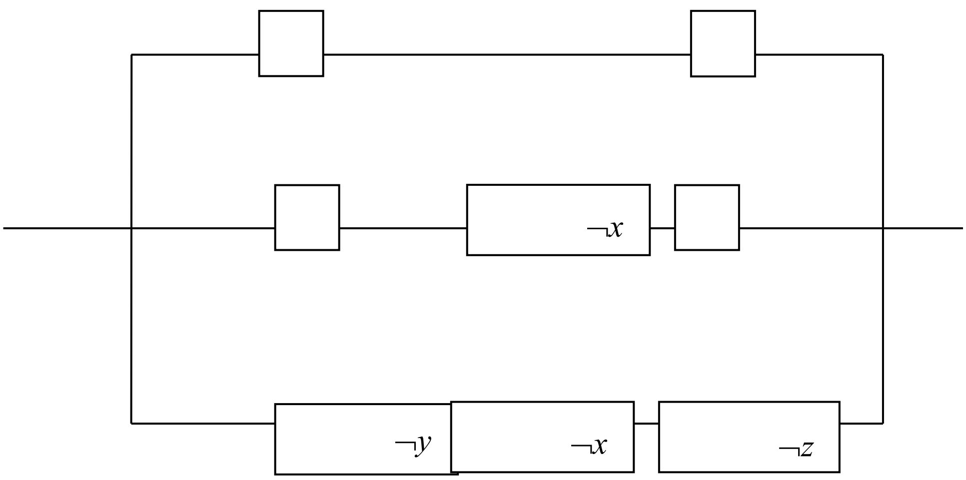
Вариант 6. Составить электрическую схему освещения помещения с тремя входами, обеспечивающую включение и выключение света при входе или выходе через любой вход/выход.

Вариант 7. Составить контактную схему, реализующую стрелку Пирса.

Вариант 8. Составить контактную схему, реализующую штрих Шеффера.

Вариант 9. Составить контактную схему, реализующую формулу $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z)$.

Вариант 10. Упростить схему:



Задача 2. Найдите сокращенные, все тупиковые и минимальные ДНФ булевой функции методом Квайна:

№ варианта	Задание булевой функции.
1.	$f(0,0,0)=f(1,0,0)=f(1,1,1)=0$
	$f(0,0,1)=f(1,1,0)=f(1,0,1)=0$
2.	$f(0,0,0)=f(0,0,1)=f(1,1,1)=0$
	$f(0,1,0)=f(1,0,1)=f(1,0,1)=0$
3.	$f(1,0,0)=f(0,0,1)=f(1,0,1)=f(1,1,1)=0$
	$f(0,0,0)=f(0,1,1)=f(1,0,1)=f(1,1,1)=0$
4.	$f(0,1,0)=f(1,0,0)=f(1,0,1)=f(0,0,1)=f(1,1,1)=1$
	$f(0,1,0)=f(0,1,1)=f(1,0,0)=f(1,1,0)=1$
5.	$f(0,0,0)=f(0,0,1)=f(1,0,1)=f(1,1,1)=0$
	$f(0,0,0)=f(0,0,1)=f(1,0,0)=f(1,1,0)=f(1,1,1)=1$
6.	$f(0,0,1)=f(1,1,0)=f(1,0,1)=f(1,1,1)=1$
	$f(0,0,0)=f(0,0,1)=f(0,0,1)=f(1,0,1)=f(1,1,1)=1$
7.	$f(0,0,1)=f(0,1,0)=f(1,0,1)=f(1,1,0)=f(1,1,1)=1$
	$f(0,1,0)=f(1,0,0)=f(1,0,1)=0$
8.	$f(0,1,1)=f(1,0,0)=f(1,1,0)=0$
	$f(0,0,0)=f(0,0,1)=f(1,0,1)=f(1,1,1)=1$
9.	$f(0,0,0)=f(1,1,0)=f(1,1,1)=0$
	$f(0,0,1)=f(1,1,0)=f(1,1,1)=0$
10.	$f(0,0,0)=f(1,0,1)=f(1,1,1)=0$
	$f(0,1,0)=f(1,0,1)=f(1,1,1)=0$

Задача 3. Найти минимальную ДНФ для функции из задачи 5 лабораторной работы №2 с помощью карт Карно

Задача 4. Для данных булевых функций построить двойственные функции.

Вариант	Булевы функции
1	$\Rightarrow, \neg$
2	$\Leftrightarrow, \vee$
3	$\mid, \wedge$
4	$\uparrow, \neg$
5	$\Leftrightarrow, \mid$
6	$\Rightarrow, \uparrow$

7	$\neg$, $\Leftrightarrow$
8	$\mid$, $\neg$
9	$\Rightarrow$, $\uparrow$
10	$\vee$, $\wedge$

РАБОТА №4. **Полнота системы булевых функций.**

Цель: изучить понятия высказывания, формулы, подформулы, сложность формулы, типы формул, эквивалентные формулы и эквивалентные преобразования формул.

Вопросы, выносимые на практическое занятие.

1. Замкнутые классы. Классы T_0 и T_1.
2. Класс самодвойственных булевых функций.
3. Класс монотонных булевых функций.
4. Полиномы и алгебра Жегалкина.
5. Класс линейных булевых функций.
6. Полнота системы булевых функций.
7. Теорема Поста о полноте системы булевых функций.

Краткие теоретические сведения.

Подмножество К множества булевых функций называется *замкнутым классом* булевых функций, если суперпозиция функций из этого множества снова лежит в этом множестве.

Класс булевых функций, сохраняющих 0:

$$\mathrm{T}_0 = \{f|\ f - \text{булева функция и } f(0,\dots,0) = 0\}$$

Класс булевых функций, сохраняющих 1:

$$\mathrm{T}_1 = \{f|f - \text{булева функция и } f(1,\dots,1) = 1\}.$$

Функция f* называется *двойственной* к функции f, если для любого набора значений переменных выполняется равенство

$f^*(x_1,\cdots,x_n) = \neg f(\neg x_1,\cdots,\neg x_n)$.

Функция f называется *самодвойственной*, если она двойственна сама себе, т.е. выполняется равенство $f^*(x_1,\cdots,x_n) = f(x_1,\cdots,x_n)$.

Класс самодвойственных функций:

$$S = \{f|\ f = f^*, f - \text{булева функция}\}.$$

Будем говорить, что наборы из 0 и 1 связаны знаком неравенства $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) \preccurlyeq (\beta_1,\cdots,\beta_n)$, если при любом i выполняется неравенство $\alpha_i \le \beta_i$.

Булева функция называется *монотонной*, если тождественно истинна импликация: $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) \preccurlyeq (\beta_1,\cdots,\beta_n) \Rightarrow f(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \le f(\beta_1,\dots,\beta_n)$.

Класс монотонных функций:

$$\mathrm{M} = \{f |\ f - \text{монотонная булева функция}\}.$$

Сумма по модулю 2 произведений переменных и, быть может, 1 называется *полиномом Жегалкина*.

Множество булевых функций, рассматриваемых с операциями умножения (конъюнкции) и сложения по модулю 2 (исключающее «или») называется *алгеброй Жегалкина*.

Теорема. *Для операций алгебры Жегалкина выполняются следующие свойства:*

1) $x \oplus y = y \oplus x$ *,*

2) $x \cdot y = y \cdot x$ *,*

3) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$*,*

4) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$*,*

5) $(x \oplus x) = 0$*,*

6) $x \cdot (y \oplus z) = x \cdot y \oplus x \cdot z$*.*

Отметим связь операций алгебры Жегалкина с другими логическими операциями.

Теорема.

$(x \oplus 1) = \neg x$,

$(x \cdot y \oplus x \oplus y) = x \vee y$.

Поэтому, ели $x \cdot y = 0$, то дизъюнкция совпадает со сложением $\oplus$.

Для каждой булевой функции $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \cdots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ существует эквивалентный ей полином Жегалкина $\mathrm{P}^\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \cdots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$. Для этого достаточно для этой булевой функции найти ей эквивалентную СДНФ, затем конъюнкцию заменить на умножение, а дизъюнкцию на сложение по модулю 2 и в полученном выражении раскрыть скобки и привести подобные с учетом свойств алгебры Жегалкина.

Класс всех линейных булевых функций.

$$L = \left\{f \middle|\ f - \text{булева функция и } P^f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_i \oplus \gamma \text{, где } \alpha_i, \gamma \in \{0,1\}\right\}.$$

Теорема. Классы T_0, T_1, S, M, L являются замкнутыми.

Множество булевых функций $\sum$ является *функционально полным*, если любую булеву функцию можно получить суперпозициями функций из $\sum$.

Теорема Поста (о полноте) Система $\sum = \{\mathrm{f} | \mathrm{f} - \text{булева функция}\}$ некоторых булевых функций полна, если существуют функции из этой системы $\mathrm{f}_0, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4 \in \sum$, быть может не все различные, что

$f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, f_2 \notin S, f_3 \notin M, f_4 \notin L$.

Практические задания по вариантам

Задача 1. Среди данного набора функций указать а) монотонные, б) самодвойственные, в) линейные, г) сохраняющие 0, д) сохраняющие 1.

Вариант.	Набор булевых функций.
1	$\wedge, \neg, \vert$
2	$\vee, \vert, \Rightarrow$
3	$\Leftrightarrow, \neg, \vee$
4	$\Leftrightarrow, \uparrow, \vee$
5	$\Rightarrow, \vert, \neg$
6	$\uparrow, \vee, \neg$
7	$\Rightarrow, \uparrow, \Leftrightarrow$
8	$\Rightarrow, \wedge, \vee$
9	$\uparrow, \vert, \neg$
10	$\wedge, \Rightarrow, \vert$

Задача 2. Для указанной формулы найти эквивалентный полином Жегалкина.

Вариант.	Вид булевой функций.
1	$(x \vert y) \Rightarrow z$
2	$(x \Rightarrow y) \wedge z$
3	$(x \vee y) \wedge (z \Rightarrow x)$
4	$(x \uparrow y) \vee z$

5	$(x\|y)\uparrow z$
6	$(x\uparrow y)\Leftrightarrow z$
7	$(x\Leftrightarrow y)\uparrow z$
8	$(x\Rightarrow y)\|z$
9	$(x\Rightarrow y)\Leftrightarrow(x\vee y)$
10	$(x\uparrow y)\Rightarrow(x\|y)$

Задача 3. Для указанного полинома Жегалкина указать эквивалентную булеву формулу.

Вариант.	Вид полинома Жегалкина.
1	$x\oplus yz$
2	$xy\oplus xz\oplus x$
3	$xyz\oplus 1$
4	$xyz\oplus y\oplus 1$
5	$xy\oplus yz\oplus x$
6	$xz\oplus yz\oplus y\oplus 1$
7	$xy\oplus xz\oplus x\oplus z\oplus 1$
8	$xy\oplus x\oplus z\oplus 1$
9	$xz\oplus yz\oplus y\oplus z\oplus 1$
10	$xyz\oplus x\oplus y\oplus z\oplus 1$

Задача 4. Придумать примеры функций: а) немонотонную, б) не самодвойственную, в) нелинейную, г) не сохраняющую 0, д) не сохраняющую 1. Привести обоснование.

Задача 5. Является ли данный набор булевых функций функционально полным? В каждом варианте даны два набора.

№ варианта	Набор булевых функций.
1.	$\Leftrightarrow,\neg$
	$\uparrow$
2.	$\Rightarrow,\neg$
	$\|$
3.	$\wedge,\neg$
	$\Rightarrow$
4.	$\vee,\neg$
	$\Leftrightarrow$
5.	$\Rightarrow,\wedge$

	$\neg$
6.	$\Rightarrow, \vee$
	$\wedge$
7.	$\Leftrightarrow, \wedge$
	$\vee$
8.	$\Leftrightarrow, \vee$
	$\uparrow, \neg$
9.	$\wedge, \vee$
	$\mid, \neg$
10.	$\Rightarrow, \Leftrightarrow$
	$\uparrow, \mid$