0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра нанотехнологий, микроэлектроники, общей и прикладной физики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
____________О.Г. Локтионова
«_15_» _02_________ 2021 г.

КВАНТОВАЯ ФИЗИКА.

Методические указания к выполнению практических работ для студентов специальности 30.05.03 Медицинская кибернетика.

Курск 2021

УДК 535

Составители: Л.И.Рослякова

Рецензент
Кандидат физико-математических наук Пауков В.М.

Квантовая физика: методические указания к выполнению практических работ для студентов специальности 30.05.03 Медицинская кибернетика / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.:Л.И.Рослякова. - Курск, 2021. 61с.: ил.27, Библиогр.: с.61.

Содержат краткое теоретическое введение, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения по всем темам дисциплины «Квантовая физика».

Методические указания соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (ФГОС), учебному плану и рабочей программе дисциплины «Квантовая физика» студентов специальности 30.05.03 Медицинская кибернетика.

Предназначены для студентов дневной формы обучения направления подготовки 30.05.03 Медицинская кибернетика.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60 х 84 1/16.
Усл. печ. л. 3,8 . Уч.-изд. л. 3.68. Тираж 50 экз. Заказ . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ И ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Методические указания предназначены для использования на практических занятиях и для самостоятельной работы студентов.

Решение задачи необходимо сопровождать краткими, но исчерпывающими пояснениями; в тех случаях, когда это необходимо, дать чертеж, выполненный с помощью чертежных принадлежностей. Решить задачу надо в общем виде, т.е. выразить искомую величину в буквенных обозначениях величин, заданных в условии задачи. При таком способе решения не производятся вычисления промежуточных величин. После получения расчетной формулы для проверки правильности полученного результата следует применить правило размерности. Числовые значения величин при подстановке их в расчетную формулу следует выражать только в единицах системы СИ. При подстановке в расчетную формулу, а также при записи ответа числовые значения величин следует записывать как произведение десятичной дроби на соответствующую степень десяти. Вычисления по расчетной формуле надо проводить с соблюдением правил приближенных вычислений. Это относится и к случаю, когда результат получен с применением калькулятора или ЭВМ.

Практическое занятие № 1 «Интерференция света»

Краткое теоретическое введение

• Скорость света в среде

$v=c/n,$

где c — скорость света в вакууме; n — абсолютный показатель преломления среды.

• Оптическая длина пути световой волны

$L=nl,$

где l — геометрическая длина пути световой волны в среде с показателем преломления n.

3. Оптическая разность хода двух световых волн

$\Delta=L_1—L_2.$

• Оптическая разность хода световых волн, отраженных от верхней и нижней поверхностей тонкой плоскопараллельной пластинки или пленки, находящейся в воздухе (рис. 30.1, *а),*

$\Delta=2d\sqrt{n^2-\sin^2\varepsilon_1}+\lambda/2$, или $\Delta=2dn\cos\varepsilon_2' + \lambda/2,$ где d — толщина пластинки (пленки); ε_1 — угол падения; ε_2' — угол преломления.

Второе слагаемое в этих формулах учитывает изменение оптической длины пути световой волны на $\lambda/2$ при отражении ее от среды оптически более плотной.

В проходящем свете (рис. 30.1, *б)* отражение световой волны происходит от среды оптически менее плотной и дополнительной разности хода световых лучей не возникает.

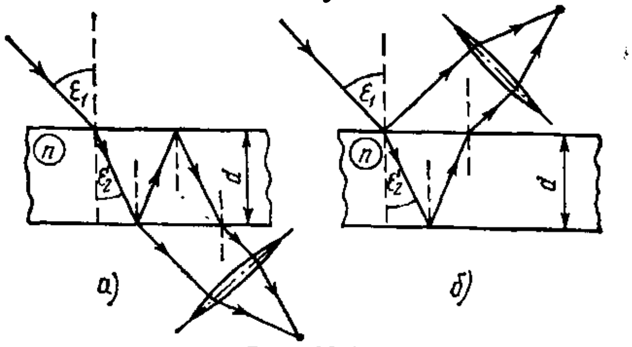


Рис. 30.1

• Связь разности фаз $\Delta\varphi$ колебаний с оптической разностью хода волн

$\Delta\varphi=2\pi\Delta/\lambda$..

• Условие максимумов интенсивности света при интерференции

$\Delta=\pm k\lambda$ $(k=0,1,2,3, \ldots)$.

• Условие минимумов интенсивности света при интерференции

$\Delta=\pm(2k+1)\ (\lambda/2)$.

• Радиусы светлых колец Ньютона в отраженном свете (или темных в проходящем)

$$r_k=\sqrt{(2k-1)R(\lambda/2)}\ .$$

где k — номер кольца (k=1, 2, 3, …); R — радиус кривизны поверхности линзы, соприкасающейся с плоскопараллельной стеклянной пластинкой.

Радиусы темных колец в отраженном свете (или светлых в проходящем)

$$r_k=\sqrt{kR\lambda}\ .$$

Примеры решения задач

Пример 1. В точку A экрана от источника S_1 монохроматического света длиной волны λ=0,5мкм приходят два луча: непосредственно от источника луч S_1A, перпендикулярный экрану, и луч S_1BA,отраженный в точке B от зеркала, параллельного лучу S_1A (рис. 30.2). Расстояние l_1 экрана от источника равно 1 м, расстояние h от луча S_1A до плоскости зеркала равно 2 мм. Определить: 1) что будет наблюдаться в точке A экрана — усиление или ослабление интенсивности; 2) как изменится интенсивность в точке A, если на пути луча S_1A перпендикулярно ему поместить плоскопараллельную пластинку стекла (n=1,55) толщиной d=6 мкм.

Решение. Построим мнимое изображение S_2 источника S_1 в зеркале (рис. 30.3).

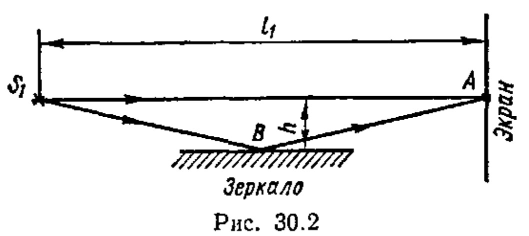


Рис. 30.2

Источники S_1 и S_2 являются когерентными, поэтому при сложении волн, приходящих от этих источников на экран, возникает интерференционная картина. Усиление или ослабление интенсивности в той или иной точке экрана зависит от оптической разности хода Δ интерферирующих лучей, другими словами, от числа m полуволн, укладывающихся на оптической разности хода:

$$m=\frac{\Delta}{\lambda/2} \qquad (1)$$

Если m — целое четное, то интенсивность будет максимальной; если m — целое нечетное, то интенсивность минимальна. При дробном m происходит или частичное усиление (если m ближе к четному числу), или частичное ослабление (если m ближе к нечетному числу).

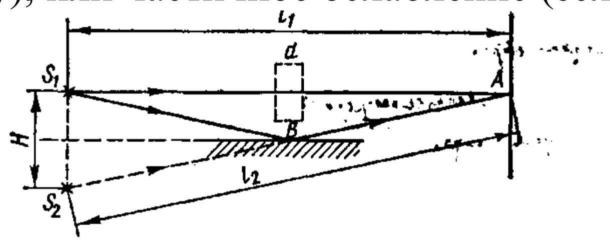


Рис. 30.3

1. Оптическая разность хода Δ_1 будет складываться из геометрической разности $l_2—l_1$ (оба луча идут в воздухе) и дополнительной разности хода $\lambda/2$, обусловленной изменением фазы колебаний на π при отражении от среды оптически более плотной. Таким образом,

$$\Delta_1=l_2—l_1+ \lambda/2. \qquad (2)$$

Так как $l_2=\sqrt{l_1^2+H^2}$ (рис. 30.3), то

$$l_2—l_1=l_1\sqrt{1+(H/l_1)^2}-l_1=l_1\left[\sqrt{1+(H/l_1)^2}-1\right].$$

Величина H/l_1<<1, поэтому для вычисления корня можно воспользоваться приближенной формулой (см. табл. 3) $\sqrt{1+a}\approx 1+\frac{1}{2}a$ при a<<1. Применив ее, получим

$$l_2-l_1\approx l_1\left[1+\frac{1}{2}(\frac{H}{l_1})^2-1\right]=\frac{H^2}{2l_1}.$$

Подставив полученное выражение $l_2—l_1$ в формулу (2), найдем $\Delta_1=\frac{H^2}{2l_1}+\frac{\lambda}{2}$. Зная Δ_1, по формуле (1) найдем m_1:

$$m_1=\frac{H^2/(2l_1)+\lambda/2}{\lambda/2}=\frac{H^2}{l_1\lambda}+1.$$

Так как $H=2h$, то окончательно получим

$$m_1=4\frac{h^2}{l_1\lambda}+1.$$

После вычисления найдем

m_1=33.

Так как на разности хода укладывается нечетное число длин полуволн, то в точке A наблюдается минимум интенсивности.

2. Стеклянная пластина толщиной d, поставленная на пути луча S_1A (рис. 30.3), изменит оптическую длину пути. Теперь оптическая длина пути L будет складываться из геометрической длины пути $l_1—d$ и оптической длины пути nd луча в самой пластине, т. е.

$$L= (l_1—d)+nd==l_1+ (n—1)d.$$

Оптическая разность хода лучей

$\Delta_2 = l_2 — L + \lambda/2 = l_2 — [l_1 + (n — 1)d] + \lambda/2$, или

$\Delta_2 = \Delta_1 — (n — 1)d$.

Пользуясь формулой (1), найдем

$$m_2 = \frac{\Delta_2}{\lambda/2} = \frac{\Delta_1 - (n-1)d}{\lambda/2} = m_1 - 2\frac{d(n-1)}{\lambda}.$$

Произведя вычисления, получим m_2=19,8.

Число длин полуволн оказалось дробным. Так как 19,8 ближе к целому четному числу 20, чем к целому нечетному числу 19, то в точке *A* будет частичное усиление.

Пример 2. На толстую стеклянную пластинку, покрытую очень тонкой пленкой, показатель преломления n_2 вещества которой равен 1,4, падает нормально параллельный пучок монохроматического света (λ=0,6 мкм). Отраженный свет максимально ослаблен вследствие интерференции. Определить толщину *d* пленки.

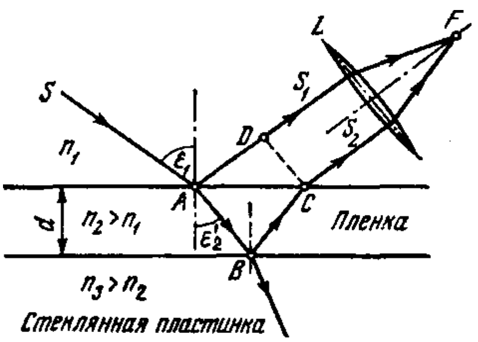


Рис. 30.4

Решение. Из световой волны, падающей на пленку, выделим узкий пучок *SA*. Ход этого пучка в случае, когда угол падения $\varepsilon_1 \neq 0$, показан на рис. 30.4. В точках *A* и *B* падающий пучок частично отражается и частично преломляется. Отраженные пучки света AS_1 и BCS_1 падают на собирающую линзу *L*, пересекаются в ее фокусе *F* и интерферируют между собой.

Так как показатель преломления воздуха (n_1= 1,00029) меньше показателя преломления вещества пленки (n_2=1,4), который, в свою очередь, меньше показателя преломления стекла (n_3=1,5), то в обоих случаях отражение происходит от среды оптически более плотной, чем та среда, в которой идет падающая волна. Поэтому фаза колебания пучка света AS_1 при отражении в точке *A* изменяется на π рад и точно так же на π рад изменяется фаза колебаний пучка света BCS_2 при отражении в точке *B*. Следовательно, результат интерференции этих пучков света при пересечении в фокусе *F* линзы будет такой же, как если бы никакого изменения фазы колебаний ни у того, ни у другого пучка не было. Как известно, условие максимального ослабления света при интерференции в тонких пленках состоит в том, что оптическая разность хода Δ интерферирующих волн должна быть равна нечетному числу полуволн; $\Delta=(2k+1)(\lambda/2)$.

Как видно из рис. 30.4, оптическая разность хода

$\Delta=l_2n_2— l_1n_1=(|AB| +|BC|)\ n_2—|AD|\ n_1$.

Следовательно, условие минимума интенсивность света примет вид

$(|AB| +|BC|)\ n_2—|AD|\ n_1=(2k+1)(\lambda/2)$.

Если угол падения ε_1 будет уменьшаться, стремясь к нулю, то $AD \to 0$ и $(|AB|+|BC| \to 2d$, где d—толщина пленки. В пределе при $\varepsilon_1=0$ будем иметь

$\Delta=2dn_2=(2k+1)(\lambda /2)$,

откуда искомая толщина пленки

$$d=\frac{(2k+1)\lambda}{4n}.$$

Полагая k=0,1,2,3,…, получим ряд возможных значений толщины пленки:

$$d_0=\frac{\lambda}{4n_2}=0{,}11 мкм;\ \ d_1=\frac{3\lambda}{4n_2}=3d_0=0{,}33 мкм$$ и т.д.

Пример 3. На стеклянный клин нормально к его грани падает монохроматический свет с длиной волны λ=0,6 мкм. В возникшей при интерференционной картине на отрезке длиной l=1 см наблюдается 10 полос. Определить преломляющий угол θ клина.

Решение. Параллельный пучок света, падая нормально к грани клина, отражается как от верхней, так и от нижней грани. Эти пучки когерентны, и поэтому наблюдается устойчивая картина интерференции. Так как интерференционные полосы наблюдаются при малых углах клина, то отраженные пучки света *1* и 2 (рис. 30.5) будут практически параллельны.

Темные полосы видны на тех участках клина, для которых разность хода кратна нечетному числу половины длины волны;

$\Delta=(2k+1)\ (\lambda/2)$, где k=0,1,2,…. (1)

Разность хода Δ двух волн складывается из разности оптических длин путей этих волн $(2dn\ \cos\varepsilon_2')$ и половины длины волны $(\lambda/2)$.

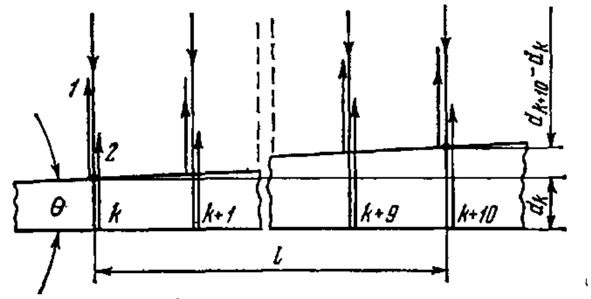


Рис. 30.5

Величина $\lambda/2$ представляет собой добавочную разность хода, возникающую при отражении волны от оптически более плотной среды. Подставляя в формулу (1) значение разности хода Δ, получим

$$2d_k n \cos \varepsilon_2' + \lambda/2 = (2k+1)(\lambda/2), \qquad (2)$$

где n — коэффициент преломления стекла (n=1,5); d_k—толщина клина в том месте, где наблюдается темная полоса, соответствующая номеру k; ε_2'—угол преломления.

Согласно условию, угол падения равен нулю, следовательно, и угол преломления ε_2' равен нулю, а $\cos \varepsilon_2'=1$. Раскрыв скобки в правой части равенства (2), после упрощения получим

$$2d_k n = k\lambda \qquad (3)$$

Пусть произвольной темной полосе номера k соответствует определенная толщина клина в этом месте d_k а темной полосе номера $k+10$ соответствует толщина клина d_{k+10}. Согласно условию задачи, 10 полос укладываются на отрезке длиной l=1 см. Тогда искомый угол (рис. 30.5) будет равен

$$\theta=(d_{k+10}-d_k)/l, \qquad (4)$$

где из-за малости преломляющего угла $\sin\theta=\theta$ (угол θ выражен в радианах). Вычислив d_k и d_{k+10} из формулы (3), подставив их в формулу (4) и произведя преобразования, найдем

$$\theta=5\lambda/(nl).$$

После вычисления получим

$$\theta=2*10^{-4}\text{рад}.$$

Выразим θ в градусах. Для этого воспользуемся соотношением между радианом и секундой (см. табл. 6); 1 рад=2,06"$*10^5$, т. е.

$$\theta=2*10^{-4}*2{,}06''*10^5=41{,}2'',$$

или в соответствии с общим правилом перевода из радиан в градусы $\theta_{град}=\frac{180}{\pi}\theta_{рад}$, $\theta=\frac{180}{3{,}14}\cdot 2\cdot 10^{-4}=1{,}15^\circ\cdot 10^{-2}=0{,}688=41{,}2''$.

Искомый угол равен 41,2".

Задачи для самостоятельного решения

1. Сколько длин волн монохроматического света с частотой колебаний υ=5*10^{14} Гц уложится на пути длиной l=1,2 мм: 1) в вакууме; 2) в стекле? Интерференция волн от двух когерентных источников

Ответ: $2\cdot10^3$; $3\cdot10^3$

2. Определить длину l_1 отрезка, на котором укладывается столько же длин волн в вакууме, сколько их укладывается на отрезке l_2=3 мм в воде.

Ответ: 4 мм

3. Какой длины l_1 путь пройдет фронт волны монохроматического света в вакууме за то же время, за какое он проходит путь длиной l_2=1 м в воде?

Ответ: 1,33 мм.

4. На пути световой волны, идущей в воздухе, поставили стеклянную пластинку толщиной h=1 мм. На сколько изменится оптическая длина пути, если волна падает на пластинку: 1) нормально; 2) под углом ε=30^0?

Ответ: Увеличится; 1) на 0,50 мм; 2) на 0,548 мм.

5. На пути монохроматического света с длиной волны λ=0,6 мкм находится плоскопараллельная стеклянная пластина толщиной d=0,l мм. Свет падает на пластину нормально. На какой угол φ следует повернуть пластину, чтобы оптическая длина пути L изменилась на λ/2?

Ответ: $1{,}72^0$

6. Оптическая разность хода Δ двух интерферирующих волн монохроматического света равна 0,3λ. Определить разность фаз Δφ.

Ответ: 0,6π.

7. Найти все длины волн видимого света (от 0,76 до 0,38 мкм), которые будут: 1) максимально усилены; 2) максимально ослаблены при оптической разности хода Δ интерферирующих волн, равной 1,8 мкм.

Ответ: 1) 0,6 и 0,45 мкм; 2) 0,72; 0,51 и 0,4 мкм.

8. Расстояние d между двумя когерентными источниками света (λ=0,5 мкм) равно 0,1 мм. Расстояние b между интерференционными полосами на экране в средней части интерференционной картины равно 1 см. Определить расстояние l от источников до экрана.

Ответ: 2 м.

9. Расстояние d между двумя щелями в опыте Юнга равно 1мм, расстояние l от щелей до экрана равно 3 м. Определить длину

волны λ, испускаемой источником монохроматического света, если ширина b полос интерференции на экране равна 1,5 мм.

Ответ: 500 мм.

10. В опыте Юнга расстояние d между щелями равно 0,8 мм. На каком расстоянии l от щелей следует расположить экран, чтобы ширина b интерференционной полосы оказалась равной 2 мм?

Ответ: $l=db/\lambda$*= 2,5 м.*

11. В опыте с зеркалами Френеля расстояние d между мнимыми изображениями источника света равно 0,5 мм, расстояние l от них до экрана равно 3 м. Длина волны λ=0,6 мкм. Определить ширину b полос интерференции на экране.

Ответ: 3,6 мм

12. При некотором расположении зеркала Ллойда ширина b интерференционной полосы на экране оказалась равной 1 мм. После того как зеркало сместили параллельно самому себе на расстояние Δd=0,3 мм, ширина интерференционной полосы изменилась. В каком направлении и на какое расстояние Δl следует переместить экран, чтобы ширина интерференционной полосы осталась прежней? Длина волны λ монохроматического света равна 0,6 мкм.

Ответ: 1) 4,8 мкм; 2) 4,8 мкм; 3) 5,1 мкм; 4) 5,1 мкм; в первых двух случаях усиление, в последних двух – ослабление.

13. На мыльную пленку (n=1,3), находящуюся в воздухе, падает нормально пучок лучей белого света. При какой наименьшей толщине d пленки отраженный свет с длиной волны λ=0,55 мкм окажется максимально усиленным в результате интерференции?

Ответ: 0,1 мкм.

14. Пучок монохроматических (λ=0,6 мкм) световых волн падает под углом ε_1=30° на находящуюся в воздухе мыльную пленку

(n=1,3). При какой наименьшей толщине d пленки отраженные световые волны будут максимально ослаблены интерференцией? максимально усилены?

Ответ: 0,25 мкм; 0,125 мкм.

15. На тонкий стеклянный клин (n=1,55) падает нормально монохроматический свет. Двугранный угол α между поверхностями клина равен 2'. Определить длину световой волны λ, если расстояние b между смежными интерференционными максимумами в отраженном свете равно 0,3 мм.

Ответ: 541 мм.

16. Поверхности стеклянного клина образуют между собой угол θ=0,2'. На клин нормально к его поверхности падает пучок лучей монохроматического света с длиной волны λ=0,55 мкм. Определить ширину b интерференционной полосы.

Ответ: $b=\lambda/(2n\theta)$*= 3,15 мм.*

17. На тонкий стеклянный клин в направлении нормали к его поверхности падает монохроматический свет (λ=600 нм). Определить угол θ между поверхностями клина, если расстояние b между смежными интерференционными минимумами в отраженном свете равно 4 мм.

Ответ: 10,3''.

18. Между двумя плоскопараллельными стеклянными пластинками положили очень тонкую проволочку, расположенную параллельно линии соприкосновения пластинок и находящуюся на расстоянии l=75 мм от нее. В отраженном свете (λ=0,5 мкм) на верхней пластинке видны интерференционные полосы. Определить диаметр d поперечного сечения проволочки, если на протяжении a=30 мм насчитывается m=16 светлых полос.

Ответ: 10 мкм.

19. Две плоскопараллельные стеклянные пластинки приложены одна к другой так, что между ними образовался воздушный клин с углом θ, равным 30''. На одну из пластинок падает нормально монохроматический свет (λ=0,6 мкм). На каких расстояниях l_1 и l_2 от линии соприкосновения пластинок будут наблюдаться в отраженном свете первая и вторая светлые полосы (интерференционные максимумы)?

Ответ: 3,1 мм; 5,2 мм.

20. Две плоскопараллельные стеклянные пластинки образуют клин с углом θ=30'. Пространство между пластинками заполнено глицерином. На клин нормально к его поверхности падает пучок монохроматического света с длиной волны λ=500 нм. В отраженном свете наблюдается интерференционная картина. Какое число N темных интерференционных полос приходится на 1 см длины клина?

Ответ: $N=2n\theta/\lambda= 8{,}55$ *см*$^{-1}$

21. Расстояние $\Delta r_{2,1}$ между вторым и первым темным кольцами Ньютона в отраженном свете равно 1 мм. Определить расстояние $\Delta r_{10,9}$ между десятым и девятым кольцами.

Ответ: 0,39 мм.

22. Плосковыпуклая линза выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Определить толщину d слоя воздуха там, где в отраженном свете (λ=0,6 мкм) видно первое светлое кольцо Ньютона.

Ответ: 0,15 мкм.

23. Диаметр d_2 второго светлого кольца Ньютона при наблюдении в отраженном свете (λ=0,6 мкм) равен 1,2 мм. Определить оптическую силу D плосковыпуклой линзы, взятой для опыта.

Ответ: 1,25 дптр.

24. Плосковыпуклая линза с оптической силой Ф=2 дптр выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Радиус r, четвертого темного кольца Ньютона в проходящем свете равен 0,7 мм. Определить длину световой волны.

Ответ: 490 нм.

25. Диаметры d_i и d_k двух светлых колец Ньютона соответственно равны 4,0 и 4,8 мм. Порядковые номера колец не определялись, но известно, что между двумя измеренными кольцами расположено три светлых кольца. Кольца наблюдались в отраженном свете (λ=500 нм). Найти радиус кривизны плосковыпуклой линзы, взятой для опыта.

Ответ: 880 мм.

26. Между стеклянной пластинкой и лежащей на ней плосковыпуклой стеклянной линзой налита жидкость, показатель преломления которой меньше показателя преломления стекла. Радиус r_8

восьмого темного кольца Ньютона при наблюдении в отраженном свете (λ=700 нм) равен 2 мм. Радиус R кривизны выпуклой поверхности линзы равен 1 м. Найти показатель преломления n жидкости.

Ответ: 1,4.

27. На установке для наблюдения колец Ньютона был измерен в отраженном свете радиус третьего темного кольца (k=3). Когда пространство между плоскопараллельной пластиной и линзой заполнили жидкостью, то тот же радиус стало иметь кольцо с номером, на единицу большим. Определить показатель преломления n жидкости.

Ответ: $n = (k+1)k = 1{,}33$.

28. В установке для наблюдения колец Ньютона свет с длиной волны λ=0,5 мкм падает нормально на плосковыпуклую линзу с радиусом кривизны R_1=1 м, положенную выпуклой стороной на вогнутую поверхность плосковогнутой линзы с радиусом кривизны R_2=2 м. Определить радиус r_3 третьего темного кольца Ньютона, наблюдаемого в отраженном свете.

Ответ: 1,73 мм.

29. Кольца Ньютона наблюдаются с помощью двух одинаковых плосковыпуклых линз радиусом R кривизны равным 1м, сложенных вплотную выпуклыми поверхностями (плоские поверхности линз параллельны). Определить радиус r_2 второго светлого кольца, наблюдаемого в отраженном свете (λ=660 нм) при нормальном падении света на поверхность верхней линзы.

Ответ: 0,704 мм.

Практическое занятие № 2 «Дифракция света»

Краткое теоретическое введение

• Дифракция света на одной щели при нормальном падении лучей. Условие минимумов интенсивности света

$$a\sin\varphi = \pm 2k\frac{\lambda}{2} = \pm k\lambda, \quad k=1,2,3,\ldots,$$

где a — ширина щели; φ— угол дифракции; k — номер минимума;
λ — длина волны.

Условие максимумов интенсивности света

$$a \sin \varphi' = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad k=1, 2, 3,\ldots,$$

где φ' — приближенное значение угла дифракции.

• Дифракция света на дифракционной решетке при нормальном падении лучей. Условие главных максимумов интенсивности

$d \sin\varphi = \pm k\lambda$, $k=0,1,2,3,\ldots$,

где d — период (постоянная) решетки; k — номер главного максимума; φ —угол между нормалью к поверхности решетки и направлением дифрагированных волн.

• формула Вульфа — Брэгга

$2d \sin \vartheta = k\lambda$,

где d — расстояние между атомными плоскостями кристалла; ϑ — угол скольжения (угол между направлением пучка параллельных лучей, падающих на кристалл, и гранью кристалла), определяющий направление, в котором имеет место зеркальное отражение лучей (дифракционный максимум).

Примеры решения задач

Пример1. На щель шириной a=0,1 мм нормально падает параллельный пучок света от монохроматического источника (λ==0,6 мкм). Определить ширину l центрального максимума в дифракционной картине, проецируемой с помощью линзы, находящейся непосредственно за щелью, на экран, отстоящий от линзы на расстоянии L=l м.

Решение. Центральный максимум интенсивности света занимает область между ближайшими от него справа и слева минимумами интенсивности. Поэтому ширину центрального максимума интенсивности примем равной расстоянию между этими двумя минимумами интенсивности (рис. 31.2).

Минимумы интенсивности света при дифракции от одной щели наблюдаются под углами φ, определяемыми условием

$a \sin \varphi = \pm k\lambda$, (1)

где k — порядок минимума; в нашем случае равен единице.

Расстояние между двумя минимумами на экране определим непосредственно по чертежу: $l=2L\ \mathrm{tg}\varphi$. Заметив, что при малых углах $\mathrm{tg}\ \varphi \approx \sin\varphi$, перепишем эту формулу в виде

$$/=2L \sin\varphi. \qquad (2)$$

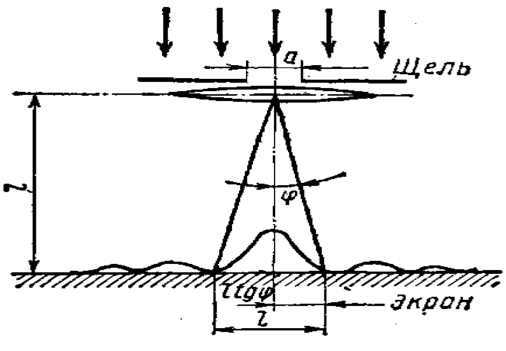


Рис. 31.2

Выразим sin φ из формулы (1) и подставим его в равенство (2):

$$l=2Lk\lambda/a. \qquad (3)$$

Произведя вычисления по формуле (3), получим l=1,2 см.

Пример 2. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает параллельный пучок света с длиной волны λ=0,5мкм. Помещенная вблизи решетки линза проецирует дифракционную картину на плоский экран, удаленный от линзы на L=l м. Расстояние l между двумя максимумами интенсивности первого порядка, наблюдаемыми на экране, равно 20,2 см (рис. 31.3). Определить: 1) постоянную d дифракционной решетки; 2) число n штрихов на 1 см; 3) число максимумов, которое при этом дает дифракционная решетка; 4) максимальный угол φ_{max} отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму.

Решение 1. Постоянная d дифракционной решетки, длина волны λ и угол φ отклонения лучей, соответствующий k-му дифракционному максимуму, связаны соотношением

$$d\sin\varphi=k\lambda, \qquad (1)$$

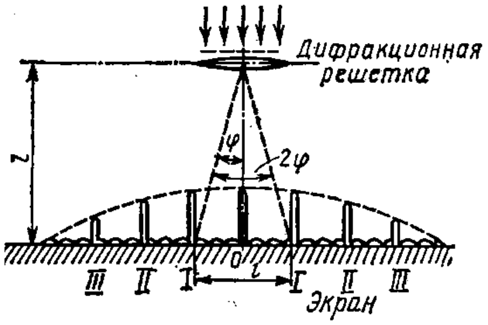


Рис. 31.3

где k — порядок спектра, или в случае монохроматического света порядок максимума.

В данном случае k=1, $\sin\varphi=\mathrm{tg}\ \varphi$ (ввиду того, что $l/2<<L$), $\mathrm{tg}\varphi=(l/2)L$ (следует из рис. 31.3). С учетом последних трех равенств соотношение (1) примет вид :

$$d\,\frac{l}{2L} = \lambda\,,$$

откуда постоянная решетки

$$d=2L\lambda/l.$$

Подставляя данные, получим

d=4,95 мкм.

2. Число штрихов на 1 см найдем из формулы

$n=1/d$.

После подстановки числовых значений получим $n=2{,}02\text{-}10^3$ см$^{-1}$.

3. Для определения числа максимумов, даваемых дифракционной решеткой, вычислим сначала максимальное значение k_{max} исходя из того, что максимальный угол отклонения лучей решеткой не может превышать 90°.

Из формулы (1) запишем

$$k_{\max} = \frac{d}{\lambda}\sin\varphi\,. \qquad (2)$$

Подставляя сюда значения величин, получим

K_{max} =9,9.

Число k обязательно должно быть целым. В то же время оно не может принять значение, равное 10, так как при этом значении sin φ должен быть больше единицы, что невозможно. Следовательно, k_{max}=9.

Определим общее число максимумов дифракционной картины, полученной посредством дифракционной решетки. Влево и вправо от центрального максимума будет наблюдаться по одинаковому числу максимумов, равному k_{max}, т. е. всего $2k_{max}$. Если учесть также центральный нулевой максимум, получим общее число максимумов

$N=2k_{max}+1$.

Подставляя значение k_{max} найдем

N=2*9+1=19.

4. Для определения максимального угла отклонения лучей, соответствующего последнему дифракционному максимуму, выразим из соотношения (2) синус этого угла:

$$\sin\varphi_{\max}=k_{max}\lambda/d.$$

Отсюда

$\varphi_{\max}=\arcsin(k_{max}\lambda/d)$.

Подставив сюда значения величин λ, d, k_{max} и произведя вычисления, получим φ_{max}=65,4°.

Задачи для самостоятельного решения

30. Расстояние d между двумя щелями в опыте Юнга равно 1 мм, расстояние L от щелей до экрана равно 3 м. Определить длину волны λ, испускаемой источником монохроматического света, если ширина b полос интерференции на экране равна 1,5 мм.

Ответ: а) $\lambda = 1$ мкм; б) $\lambda = 0,5$ мкм; в) $\lambda = 0,75$ мкм; г) $\lambda = 2$ мкм; д) $\lambda = 0,35$ мкм.

31. Вычислить радиус r_5 пятой зоны Френеля для плоского волнового фронта (λ=0,5 мкм), если точка наблюдения находится на расстоянии b=1 м от фронта волны.

Ответ: а) r=1,58 мм; б) r=1,90 мм; в) r=1,10 мм; г) r=1,37 мм; д) r=1,81 мм.

32. Свет с длиной волны 535 нм падает нормально на дифракционную решётку. Найти её период, если одному из фраунгоферовых максимумов соответствует угол дифракции 35^o и наибольший порядок спектра равен пяти.

Ответ: а) d=3,00 мкм; б) d=4,00 мкм; в) d=2,67 мкм; г) d=1,35 мкм; д) d=1,47 мкм.

33. На щель, шириной a = 0,05 мм, падает нормально монохроматический свет (λ=0,6 мкм). Определить угол φ между первоначальным направлением пучка света и направлением на четвертую темную дифракционную полосу.

Ответ: а) $\varphi=2,75^0$; б) $\varphi=3,00^0$; в) $\varphi=3,70^0$; г) $\varphi=4,00^0$; д) $\varphi=1,75^0$.

34. На узкую щель падает нормально монохроматический свет. Угол отклонения пучков света, соответствующих второй светлой дифракционной полосе, равен 1^0 . Скольким длинам волн падающего света равна ширина щели?

Ответ: а) n=150; б) n=130; в) n=143; г) n=160; д) n=13

35. На дифракционную решетку, содержащую n = 500 штрихов на 1 мм, падает нормально монохроматический свет с длиной волны , равной 700 нм. За решеткой помещена собирающая линза с главным фокусным расстоянием F=50 см. В фокальной плоскости линзы расположен экран. Определить линейную дисперсию D_ℓ такой системы для максимума третьего порядка. Ответ выразить в

миллиметрах на нанометр.

Ответ: а) $\varphi=39^0$; б) $\varphi=43^0$; в) $\varphi=3,70^0$; г) $\varphi=40^0$; д) $\varphi=17,5^0$.

36. На дифракционную решетку нормально к поверхности падает монохроматический свет (λ=650 нм). За решеткой находится линза, в фокальной плоскости которой расположен экран. На экране наблюдается дифракционная картина под углом дифракции φ = 30°. При каком главном фокусном расстоянии F линзы линейная дисперсия D_ℓ=0,5 мм/нм.

Ответ: а) F=500 мм; б) F=600 мм; в) F=563 мм; г) F=590 мм; д) F=585 мм.

Практическое занятие № 3 «Поляризация света»

Краткое теоретическое введение

• Закон Брюстера

$$tgi_B = n_{21}$$

где i_B — угол падения, при котором отраженная световая волна полностью поляризована; n_{21} — относительный показатель преломления.

• Закон Малюса

$$I_2 = I_1 \cos^2\varphi,$$

где I_2 — интенсивность плоскополяризованного света, прошедшего через анализатор; I_1 — интенсивность плоскополяризованного света, падающего на анализатор; . φ — угол между направлением колебаний светового вектора волны, падающей на анализатор, и плоскостью пропускания анализатора.

Поскольку среднее за период значение квадрата косинуса $\langle cos^2 \varphi\rangle = 0.5$

$$I_1 = 0{,}5 I_{ест.}$$

• Степень поляризации света

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где I_{max} и I_{min} — максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором.

• Угол поворота φ плоскости поляризации оптически активными веществами определяется соотношениями:

а) в твердых телах $\varphi=\alpha d$, где α — постоянная вращения; d — длина пути, пройденного светом в оптически активном веществе;

б) в чистых жидкостях $\varphi=[\alpha]\rho d$, где [α] — удельное вращение; ρ — плотность жидкости;

в) в растворах $\varphi=[\alpha]Cd$, где C — массовая концентрация оптически активного вещества в растворе.

Примеры решения задач

Пример 1. Пучок естественного света падает на полированную поверхность стеклянной пластины, погруженной в жидкость. Отраженный от пластины пучок света составляет угол $\varphi=97°$ с падающим пучком (рис. 32.1). Определить показатель преломления n жидкости, если отраженный свет полностью поляризован.

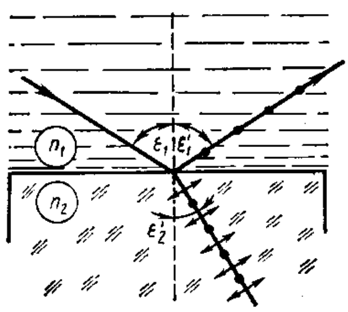


Рис. 32.1

Решение. Согласно закону Брюстера, свет, отраженный от диэлектрика, полностью поляризован в том случае, если тангенс угла падения

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon_{1B}=n_{21},$$

где n_{21} — относительный показатель преломления второй среды (стекла) относительно первой (жидкости).

Относительный показатель преломления равен отношению абсолютных показателей преломления этих сред. Следовательно,

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon_{1B}=n_2/n_1.$$

Согласно условию задачи, отраженный луч повернут на угол φ относительно падающего луча. Так как угол падения равен углу отражения, то $\varepsilon_{1B}=\varphi/2$ и, следовательно, $\mathrm{tg}(\varphi/2)=n_2/n_1$, откуда

$$n_1=\frac{n_2}{tg(\varphi/2)}.$$

Сделав подстановку числовых значений, получим n_1=1,33.

Пример 2. Два николя N_1 и N_2 расположены так, что угол а между их плоскостями пропускания равен 60°. Определить:

1) во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света при прохождении через один николь *(N_1);*

2) во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света при прохождении через оба николя? При прохождении из николей потерь на отражение и поглощение света нет.

При прохождении света через николи потери на отражение и поглощение света составляют 5 %.

Решение.1) Пучок естественного света, падая на грань николя N_1 (рис. 32.2), расщепляется вследствие двойного лучепреломления на два пучка: обыкновенный и необыкновенный. Оба пучка одинаковы по интенсивности и полностью поляризованы. Плоскость колебаний для необыкновенного пучка лежит в плоскости чертежа (плоскость главного сечения). Плоскость колебаний для обыкновенного пучка перпендикулярна плоскости чертежа. Обыкновенный пучок (o) вследствие полного отражения от границы AB отбрасывается на зачерненную поверхность призмы и поглощается ею. Необыкновенный пучок (e) проходит через николь. При этом интенсивность света уменьшается вследствие поглощения в веществе николя.

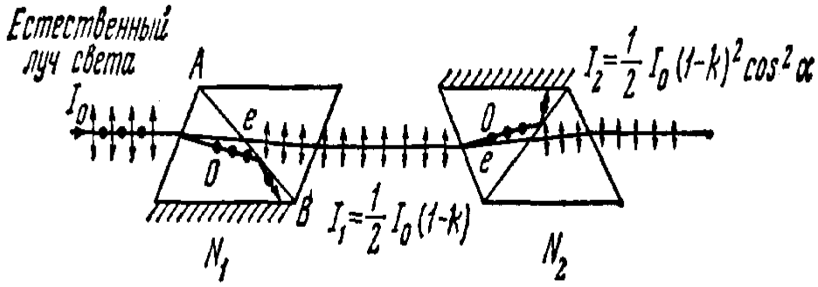


Рис. 32.2

Таким образом, интенсивность света, прошедшего через николь N_1,

$$I_1=1/2I_0(1-k),$$

$$I1 = 1/2I0(1-k),$$

где k=0,05— относительная потеря интенсивности света в николе; I_0 — интенсивность естественного света, падающего на николь N_1.

Относительное уменьшение интенсивности света получим, разделив интенсивность I_0 естественного света на интенсивность I_1 поляризованного света:

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{I_0}{1/2I_0(1-k)} = \frac{2}{1-k}.$$

Подставив числовые значения, найдем

I_0/I_1=2,10.

Таким образом, интенсивность света при прохождении через николь N_1 уменьшается в 2,10 раза.

2). Пучок плоскополяризованного света интенсивности I_1 падает на николь N_2 и также расщепляется на обыкновенный и необыкновенный. Обыкновенный пучок полностью поглощается в николе, а интенсивность необыкновенного пучка света, вышедшего из николя, определяется законом Малюса (без учета поглощения в этом николе):

$$I_2=I_1\cos^2\alpha$$

где α — угол между плоскостью колебаний в поляризованном пучке и плоскостью пропускания николя N_2.

Учитывая потери интенсивности во втором николе, получим

$$I_1=1/2I_0(1-k),$$

$$I_2=I_1 (l—k)^2 \cos^2 \alpha.$$

Искомое уменьшение интенсивности при прохождении света через оба николя найдем, разделив интенсивность I_0 естественного света на интенсивность I_2 света, прошедшего систему из двух николей:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{I_0}{I_1(1-k)\cos^2\alpha}.$$

Заменив I_0/I_1 его выражением по формуле (1), получим

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-k)^2\cos^2\alpha}$$

Подставив данные произведем вычисления:

$$\frac{I_0}{I_2} = 8{,}86$$

Таким образом, после прохождения света через два николя интенсивность его уменьшится в 8,86 раза.

Пример 3. Пучок частично-поляризованного света рассматривается через николь. Первоначально николь установлен так, что его плоскость пропускания параллельна плоскости колебаний линейно-поляризованного света. При повороте николя на угол φ=60° интенсивность пропускаемого им света уменьшилась в *k=2* раза. Определить отношение $\boldsymbol{I_e/I_n}$ интенсивностей естественного и линейно-поляризованного света, составляющих данный частично-поляризованный свет, а также степень поляризации $\boldsymbol{P}$ пучка света.

Решение.

Отношение интенсивности $\boldsymbol{I_e}$ естественного света к интенсивности $\boldsymbol{I_n}$ поляризованного света найдем из следующих соображений. При первоначальном положении николя он полностью пропустит линейно-поляризованный свет и половину интенсивности естественного света. Общая интенсивность пропущенного при этом света $I_1 = I_n + \frac{1}{2} I_e$

При втором положении николя интенсивность пропущенного поляризованного света определится по закону Малюса, а интенсивность пропущенного естественного света, как и в первом

$$I_2 = I_n \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} I_e$$

случае, будет равна половине интенсивности естественного света, падающего на николь. Общая интенсивность во втором случае в соответствии с условием задачи $\boldsymbol{I_1=k*I_2}$, или

$$\frac{I_e}{I_n} = x \qquad \frac{I_n + \frac{1}{2} I_e}{\left(I_n \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} I_e \right)} = 2 \Rightarrow I_n + \frac{1}{2} I_e = 2\left(I_n \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} I_e \right)$$

$$1 + \frac{1}{2} \frac{I_e}{I_n} = 2\left(\cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \frac{I_e}{I_n} \right) \quad \frac{I_e}{I_n} = x$$

$$1 + \frac{1}{2} x = 2\left(\cos^2 60^o + \frac{1}{2} x \right) \Rightarrow \frac{1}{2} x - x = \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{I_e}{I_n} = x = 1 \Rightarrow I_e = I_n$$

Подставив сюда значение угла φ , *k* и произведя вычисления, получим

$I_e/I_n = 1$, или $I_e = I_n$,

т. е. интенсивности естественного и поляризованного света в заданном пучке равны между собой.

Степень поляризации частично-поляризованного света определяется соотношением

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \qquad \Rightarrow I_e = I_n \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{I_{max}}$ и $\boldsymbol{I_{min}}$ — соответственно максимальная и минимальная интенсивности света, пропущенного через николь.

Максимальная интенсивность $I_{max} = I_1 = I_n + ½ I_e$, или, учитывая, что $I_e = I_n$

$I_{max} = 3/2\ I_n$

Минимальная интенсивность соответствует положению николя, при котором плоскость пропускания его перпендикулярна плоскости колебаний линейно-поляризованного света. При таком положении николя поляризованный свет будет полностью погашен и через николь пройдет только половина интенсивности естественного света. Общая интенсивность выразится равенством

$I_{min} = ½\ I_e = ½\ I_n$

$$P = \frac{3/2I_n - 1/2I_n}{3/2I_n + 1/2I_n} = \frac{1}{2}$$

Подставив найденные выражения I_{max} и I_{min} в формулу (1), получим

Следовательно, степень поляризации пучка света

$P = ½ = 50\%$.

Пример 4. Пластинка кварца толщиной $\boldsymbol{d_1=1}$ мм, **вырезанная перпендикулярно оптической оси кристалла,** поворачивает плоскость поляризации монохроматического света определенной длины волны на угол $\boldsymbol{\varphi_1=20°}$**.** Определить: 1) какова должна быть толщина $\boldsymbol{d_2}$ кварцевой пластинки, помещенной между двумя **«параллельными»** николями, чтобы свет был полностью погашен; 2) какой длины ***l*** трубку с раствором сахара массовой концентрацией С=0,4 кг/л надо поместить между николями для получения того же эффекта? Удельное вращение [α] раствора сахара равно 0,665 град/(м*кг*м$^{-3}$).

Решение. 1)Угол поворота плоскости поляризации кварцевой пластинкой определяется соотношением $\varphi = \alpha * d$.

Пользуясь этой формулой, выразим искомую толщину $\mathbf{d_2}$ пластинки:

$$d_2 = \varphi_2 / \alpha \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{\varphi_2}$ — угол поворота плоскости поляризации, при котором свет будет полностью погашен ($\boldsymbol{\varphi_2}$ =90°).

Постоянную вращения α для кварца найдем также из формулы $\varphi=\alpha*d$, подставив в нее заданные в условии задачи значения $\boldsymbol{d_1}$ и $\boldsymbol{\varphi_1}$:

$\alpha = \varphi_1 / d_1$

Подставив это выражение α в формулу (1), получим

$d_2 = (\varphi_2/ \varphi_1)\, d_1$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем толщину пластинки:

$d_2 = 4{,}5$ мм.

2). Длину трубки с сахарным раствором найдем из соотношения $\varphi_2=[\alpha]Cd$, выражающего угол поворота плоскости поляризации раствором сахара, где d — толщина раствора сахара (принимается равной длине l трубки). Отсюда получим

$$l = \varphi_2/([\alpha]C).$$

Подставив сюда значения φ_2, $[\alpha]$, C=0,4 кг/л ==400 кг/м^3 и произведя вычисления, найдем **l =3,8 дм.**

Задачи для самостоятельного решения

37. Пучок света, идущий в воздухе, падает на поверхность жидкости под углом $\varphi = 54^0$. Определить угол преломления γ пучка, если отраженный пучок полностью поляризован.

Ответ: а) $\varphi=39^0$; б) $\varphi=43^0$; в) $\varphi=36^0$; г) $\varphi=40^0$; д) $\varphi=17{,}5^0$.

38. Пучок естественного света падает на систему из N = 6 николей, плоскость пропускания каждого из которых повёрнута на угол $\varphi = 30^{\circ}$ относительно плоскости пропускания предыдущего николя. Какая часть светового потока проходит через эту систему?

Ответ: а) k=0,15; б) k=0,20; в) k=0,12; г) k=0,18; д) k=0,25.

39. На какой угловой высоте φ над горизонтом должно находиться Солнце, чтобы солнечный свет, отраженный от поверхности воды, был полностью поляризован?

Ответ: а) $\varphi=39^0$; б) $\varphi=43^0$; в) $\varphi=37^0$; г) $\varphi=40^0$; д) $\varphi=17,5^0$.

40. Пучок естественного света, идущий в воде, отражается от грани алмазной призмы, погруженной в воду. При каком угле падения α отраженный свет будет полностью поляризован?

Ответ: а) $\alpha=61^0 12'$; б) $\alpha=45^0$; в) $\alpha=30^0$; г) $\alpha=54^0$; д) $\alpha=70^0$

41. Угол Брюстера i_b при падении света из воздуха на кристалл каменной соли равен 57^0. Определить скорость света в этом кристалле.

Ответ: а) $\upsilon=2\cdot10^8$м/с; б) $\upsilon=1,94\cdot10^8$м/с; в) $\upsilon=3\cdot10^8$м/с; г) $\upsilon=10^8$м/с; д) $\upsilon=1,5\cdot10^8$м/с

42. Анализатор в k=2 раза уменьшает интенсивность света, приходящего к нему от поляризатора. Определить угол α между плоскостями пропускания поляризатора и анализатора. Потерями интенсивности света в анализаторе пренебречь.

Ответ: а) $\alpha=15^0 10'$; б) $\alpha=45^0$; в) $\alpha=30^0$; г) $\alpha=54^0$; д) $\alpha=40^0$

43. Угол α между плоскостями пропускания поляризатора и анализатора равен 45^0. Во сколько раз уменьшится интенсивность света, выходящего из анализатора, если угол увеличить до 60^0?

Ответ: а) 1,5; б) 3; в) 2; г) 2,5; д) 3,5

44. Во сколько раз ослабляется интенсивность света, проходящего через два николя, плоскости пропускания которых образуют угол $\alpha=30^0$, если в каждом из николей в отдельности теряется 10% интенсивности падающего на него света?

Ответ: а) 2; б) 2,4; в) 1,5; г) 2,5; д) 3,3

45. В фотометре одновременно рассматривают две половины поля зрения: в одной видна эталонная светящаяся поверхность с яркостью L_1 =5 ккд/м^2, в другой - испытуемая поверхность, свет от которой проходит через два николя. Граница между обеими половинами поля зрения исчезает, если второй николь повернуть относительно первого на угол $\varphi=45^o$. Найти яркость L_2 испытуемой поверхности, если известно, что в каждом из николей интенсивность падающего на него света уменьшается на 8 %.

Ответ: а) L_2=23,6 ккд/м^2; б) L_2=20 ккд/м^2; в) L_2=15,5 ккд/м^2; г) L_2=28 ккд/м^2; д) L_2=18,6 ккд/м^2

46. Никотин (чистая жидкость), содержащийся в стеклянной трубке длиной d=8 см, поворачивает плоскость поляризации желтого света натрия на угол $\varphi=137^o$. Плотность никотина $\rho=1{,}01\cdot10^3$ кг/м^3. Определить удельное вращение $[\alpha]$ никотина.

Ответ: 169 град·см^3/(дм·г).

Практическое занятие № 4 «Законы теплового излучения».

Краткое теоретическое введение.

• Закон Стефана — Больцмана

$$R_э^* = \sigma T^4$$

где $R_э^*$ — энергетическая светимость черного тела; T — термодинамическая температура; σ — постоянная Стефана — Больцмана

$[\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м^2*К^4)].

• Энергетическая светимость серого тела

$$R_э^* = \varepsilon \sigma T^4$$

где ε — коэффициент теплового излучения (степень черноты) серого тела.

• Закон смещения Вина

$$\lambda_m = b/T,$$

где λ_m — длина волны, на которую приходится максимум энергии излучения;

b—постоянная закона смещения Вина ($b=2{,}90\cdot10^{-3}$ м*К)

• Зависимость максимальной спектральной плотности энергетической светимости от температуры

$$(\boldsymbol{r}_{\omega,T})_{max} = CT^5,$$

где C—постоянная [C= $1{,}30\cdot10^{-5}$ Вт/м^3*К^5)].

Примечание

*Первоначально постоянной Планка называлась величина $h=6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж*с. Позднее постоянной Планка стали называть также величину $\hbar=h/(2\pi)=1{,}05\cdot10^{-34}$ Дж*с

.

Примеры решения задач

Пример 1. Исследование спектра излучения Солнца показывает, что максимум спектральной плотности энергетической светимости соответствует длине волны λ=500 нм Принимая Солнце за черное тело, определить. 1) энергетическую светимость $\boldsymbol{R_{\omega,T}}$ Солнца; 2) поток энергии $\boldsymbol{\Phi_e}$, излучаемый Солнцем; 3) массу m электромагнитных волн (всех длин), излучаемых Солнцем за 1 с.

Решение

1. Энергетическая светимость $\boldsymbol{R_{\omega,T}}$ черного тела выражается формулой Стефана — Больцмана

$$\boldsymbol{R_{\omega,T}} = \sigma T^4 \qquad (1)$$

Температура излучающей поверхности может быть определена из закона смещения Вина. $\lambda_m = b/T$. Выразив отсюда температуру Т и подставив ее в формулу (1), получим

$$\boldsymbol{R_{\omega,T}} = \sigma\,(b\lambda_m)^4, \qquad (2)$$

Произведя вычисления по формуле (2), найдем

$\boldsymbol{R_{\omega,T}}$ =64 МВт/м^2.

2. Поток энергии Φ_e, излучаемый Солнцем, равен произведению энергетической светимости Солнца на площадь S его поверхности.

$$\Phi_e = 4\pi r^2 \cdot R\omega_T \qquad (3)$$

где r — радиус Солнца

Подставив в формулу (3) значения π, r и M_e и произведя вычисления, получим

Φ_e =3,9*10^{26} Вт.

3. Массу электромагнитных волн (всех длин), излучаемых Солнцем за время $t=1$ с, определим, применив закон пропорциональности массы и энергии $E=mc^2$. Энергия электромагнитных волн, излучаемых за время t, равна произведению потока энергии Ф (мощности излучения) на время $E=\Phi t$. Следовательно, $\Phi_e = m_t c^2$, откуда $m_t = \Phi_e / c^2$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем m = 4,3*10^9 кг.

Задачи для самостоятельного решения

47. Определить температуру T, при которой энергетическая светимость M_e черного тела равна 10 кВт/м^2.

Ответ: 648 К

48. Поток энергии Φ_e, излучаемый из смотрового окошка

плавильной печи, равен 34 Вт. Определить температуру *T* печи, если площадь отверстия $S = 6$ см^2.

Ответ: 1 кК.

49. Определить энергию W излучаемую за время *t*= 1 мин из смотрового окошка площадью S=8 см^2 плавильной печи, если ее температура T=1,2 кК.

Ответ: 5,65 кДж.

50. Температура *T* верхних слоев звезды Сириус равна 10 кК, Определить поток энергии Φ_e, излучаемый с поверхности площадью S=1 км^2 этой звезды.

Ответ: 56,7 ГВт.

51. Определить относительное увеличение $\Delta M_e/M_e$ энергетической светимости черного тела при увеличении его температуры на 1%.

Ответ: 4%.

52. Во сколько раз надо увеличить термодинамическую температуру черного тела, чтобы его энергетическая светимость M_e возросла в два раза?

Ответ: В 1,19 раза.

53. Принимая, что Солнце излучает как черное тело, вычислить его энергетическую светимость M_e и температуру *T* его поверхности. Солнечный диск виден с Земли под углом ϑ =32'. Солнечная постоянная *C=1,4 кДж/(м^2*с).

* Солнечной постоянной называется величина, равная поверхностной плотности потока энергии излучения Солнца вне земной атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца.

Ответ: 64,7 МВт/м^2; 5,8 кК.

54. Определить установившуюся температуру *T* зачерненной металлической пластинки, расположенной перпендикулярно солнечным лучам вне земной атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца. Значение солнечной постоянной приведено в предыдущей задаче.

Ответ: 396 К.

55. Принимая коэффициент теплового излучения в угля при

температуре T=600 К равным 0,8, определить: 1) энергетическую светимость M_e угля; 2) энергию W, излучаемую с поверхности угля с площадью S = 5 см^2 за время t=10 мин.

Ответ: $R_e = a_T\sigma T^4 = 5,88$ *кВт/м*^{2}; $W = R_eS = 1,76$ *кДж.*

56. С поверхности сажи площадью S = 2 см^2 при температуре T=400 К за время t=5 мин излучается энергия $W=83$ Дж. Определить коэффициент теплового излучения ε сажи.

Ответ: 0,953.

57. Муфельная печь потребляет мощность $P=1$ кВт. Температура T ее внутренней поверхности при открытом отверстии площадью S=25 см^2 равна 1,2 кК. Считая, что отверстие печи излучает как черное тело, определить, какая часть ω мощности рассеивается стенками.

Ответ: $\eta = 1 - \sigma T^4 S/p = 0,71$.

58. Можно условно принять, что Земля излучает как серое тело, находящееся при температуре T=280 К. Определить коэффициент теплового излучения ε Земли, если энергетическая светимость M_e ее поверхности равна 325 кДж/(м^2*ч).

Ответ: 0,26.

59. Мощность P излучения шара радиусом R= 10 см при некоторой постоянной температуре T равна 1 кВт. Найти эту температуру, считая шар серым телом с коэффициентом теплового излучения ε =0,25.

Ответ: 866 К.

60. На какую длину волны λ_m приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости $(M_{\lambda,T})_{max}$ черного тела при температуре t=0^0 С?

Ответ: 10,6 мкм.

61. Температура верхних слоев Солнца равна 5,3 кК. Считая Солнце черным телом, определить длину волны λ_m , которой соответствует максимальная спектральная плотность энергетической светимости $(M_{\lambda,T})_{max}$ Солнца.

Ответ: 547 нм.

62. Определить температуру T черного тела, при которой

максимум спектральной плотности энергетической светимости $(M_{\lambda,T})_{max}$ приходится на красную границу видимого спектра (λ_1 =750 нм); на фиолетовую (λ_2=*380* нм).

Ответ: 3,8 кК

63. Максимум спектральной плотности энергетической светимости $(M_{\lambda,T})_{max}$ яркой звезды Арктур приходится на длину волны λ_m =580 нм. Принимая, что звезда излучает как черное тело, определить температуру T поверхности звезды.

Ответ: 4,98 кК.

64. Вследствие изменения температуры черного тела максимум спектральной плотности $(M_{\lambda,T})_{max}$ сместился с λ_1=2,4 мкм на λ_2=0,8 мкм. Как и во сколько раз изменились энергетическая светимость M_e тела и максимальная спектральная плотность энергетической светимости?

Ответ: Увеличились в 81 и в 243 раза

65. При увеличении термодинамической температуры. T черного тела в два раза длина волны λ_m на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости $(M_{\lambda,T})_{max}$, уменьшилась на $\Delta\lambda$ =400 нм. Определить начальную и конечную температуры T_1 и T_2.

Ответ: 3,62 кК; 7,24 кК.

66. Эталон единицы силы света — кандела — представляет собой полный (излучающий волны всех длин) излучатель, поверхность которого площадью S = 0,5305 мм^2 имеет температуру t затвердевания платины, равную 1063°С. Определить мощность P излучателя.

Ответ: 95,8 мВт.

67. Максимальная спектральная плотность энергетической светимости $(M_{\lambda,T})_{max}$ черного тела равна 4,16*10^{11} (Вт/м^2)/м. На какую длину волны λ_m она приходится?

Ответ: 1,45 мкм.

68. Температура T черного тела равна 2 кК. Определить:1) спектральную плотность энергетической светимости $(M_{\lambda,T})$ *для* длины волны λ=600 нм; 2) энергетическую светимость M_e в интервале длин волн от λ_1=590 нм до λ_2 =610 нм. Принять, что средняя спектральная

плотность энергетической светимости тела в этом интервале равна значению, найденному для длины волны λ=600 нм.

Ответ: 1) 30 МВт/(м^2·мм); 2) 600 Вт/м^2

Практическое занятие № 5 «Квантовая природа света. Фотоэффект. Давление света. Фотоны».

Краткое теоретическое введение

• Формула Эйнштейна для фотоэффекта:

а) в общем случае

$\varepsilon = h\upsilon = A+T_{max}$, или $\hbar\omega = A+T_{max}$,

где $\varepsilon = h\upsilon = \hbar\omega$ —энергия фотона, падающего на поверхность металла; *A* — работа выхода электрона из металла; T_{max} — максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона;

б) в случае, если энергия фотона много больше работы выхода ($h\upsilon >> A$),

$h\upsilon = T_{max}$, или $\hbar\omega = T_{max}$.

Если фотоэффект вызван фотоном, имеющим незначительную энергию ($h\upsilon = \hbar\omega$=5 кэВ), то

$T_{max} = ½\, m_0 v^2_{max}$,

где m_0 — масса покоя электрона.

• Красная граница фотоэффекта

$\lambda_0 = hc/A$ или $\lambda_0 = 2\pi\, \hbar c/A$; $\upsilon_0 = A/h$ или $\omega_0 = A/\hbar$,

где λ_0 — максимальная длина волны излучений (υ_0 и ω_0 — минимальные соответственно частота и круговая частота), при которых еще возможен фотоэффект.

• Давление, производимое светом при нормальном падении,

$p=(Ee/c)*(1+\rho)$, или $p= \omega\,(1+\rho)$,

где Ee — облученность поверхности; c — скорость электромагнитного излучения в вакууме; ω— объемная плотность энергии излучения; ρ — коэффициент отражения.

• Энергия фотона

$\varepsilon = h\upsilon = hc/\lambda$,

где h—постоянная Планка; $\hbar = h/(2\pi)$; υ - частота света; λ — длина волны.

• Масса и импульс фотона выражаются соответственно формулами $m=\varepsilon/c2 = h/(c\lambda)$; $p=mc=h/\lambda$.

Примеры решения задач

Пример 1. Определить максимальную скорость v_{max} фотоэлектронов, вырываемых с поверхности серебра ультрафиолетовым излучением с длиной волны λ_1 =0,155 мкм.

Решение. Максимальную скорость фотоэлектронов определим из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\varepsilon = A+T_{max} \qquad (1)$$

Энергия фотона вычисляется по формуле $\varepsilon = hc/\lambda$, работа выхода *A* для серебра А =4,7 эВ.

В формулу энергии фотона $\varepsilon = hc/\lambda$ подставим значения величин h, c и λ и, произведя вычисления, для ультрафиолетового излучения получим

ε_1=1,28 аДж = 8 эВ.

Это значение энергии фотона много меньше энергии покоя электрона (0,51 МэВ). Следовательно, для данного случая максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона в формуле (1) может быть выражена по классической формуле $T= ½ m_0v^2$. Тогда энергия фотона $\varepsilon_1=A+ ½ m_0v^2_{max}$, откуда

$$v_{max} = \sqrt{2(\varepsilon_1 - A)/m_0} \qquad (2)$$

Выпишем величины, входящие в формулу (2): $\varepsilon_1=1{,}28\cdot10^{-18}$ Дж (вычислено выше); $A=4{,}7$ эВ $= 4{,}7\cdot1{,}6*10^{-19}$ Дж $= 0{,}75*10^{-18}$ Дж; $m_0=9{,}11\cdot10^{-31}$ кг .

Подставив числовые значения в формулу (4), найдем максимальную скорость:

v_{max} =1,08 Мм/с.

Пример 2. Определить красную границу λ_0 фотоэффекта для цезия, если при облучении его поверхности фиолетовым светом длиной волны λ=400 нм максимальная скорость v_{max} фотоэлектронов равна 0,65 Мм/с.

Решение. При облучении светом, длина волны λ_0 которого соответствует красной границе фотоэффекта, скорость, а следовательно, и кинетическая энергия фотоэлектронов равны нулю. Поэтому уравнение Эйнштейна для фотоэффекта $\varepsilon = A+T$ в случае красной границы запишется в виде

ε = A, или $hc/\lambda_0=A$.

Отсюда

$\lambda_0 = hc/A$. (1)

Работу выхода для цезия определим с помощью уравнения Эйнштейна:

$$A = \varepsilon - T = \frac{hc}{\lambda} - \frac{mv^2}{2} \qquad (2)$$

Выпишем числовые значения величин, выразив их в СИ: $h=6{,}62*10^{-34}$ Дж*с; $c = 3*10^8$ м/с; λ=400 нм=$4*10^{-7}$ м; $m=9{,}11*10^{-31}$ кг; $v = 6{,}5*10^5$ м/с.

Подставив эти значения величин в формулу (2) и вычислив, получим

$A=3{,}05\cdot10^{-19}$ Дж = 0,305 аДж.

Для определения красной границы фотоэффекта подставим значения *A, h* и *c* в формулу (1) и вычислим:

λ_0=651 нм.

Пример 3. Пучок монохроматического света с длиной волны λ = 663 нм падает нормально на зеркальную плоскую поверхность Поток энергии Φ_e=0,6 Вт. Определить силу *F* давления, испытываемую этой поверхностью, а также число *N* фотонов, падающих на нее за время t=5 с

Решение Сила светового давления на поверхность равна произведению светового давления *p* на площадь S поверхности:

$F=pS$. (1)

Световое давление может быть найдено по формуле

$P=E_e(\rho+l)/c$ (2)

Подставляя выражение (2) давления света в формулу (1), получим

$F= [(E_eS)/c]*(\rho+1)$. (3)

Так как произведение облученности E_e на площадь S поверхности равно потоку Ф энергии излучения, падающего на поверхность, то соотношение (3) можно записать в виде

$F = (\Phi_e/c)*(\rho+1)$.

После подстановки значений Φ_e и *c* с учетом, что ρ=1 (поверхность зеркальная), получим

F==4 нН.

Число *N* фотонов, падающих за время Δt на поверхность, определяется по формуле

$N=\Delta W/\varepsilon = \Phi_e \Delta t/\varepsilon$,

где ΔW — энергия излучения, получаемая поверхностью за время Δt

Выразив в этой формуле энергию фотона через длину волны ($\varepsilon = hc/\lambda$), получим

$N= \Phi_e\lambda\Delta t/(hc)$.

Подставив в этой формуле числовые значения величин, найдем

$N=10^{19}$ фотонов.

Пример 4. Параллельный пучок света длиной волны λ=500 нм падает нормально на зачерненную поверхность, производя давление p=10 мкПа. Определить: 1) концентрацию *n* фотонов в пучке, 2) число n_1 фотонов, падающих на поверхность площадью 1 $м^2$ за время 1 с.

Решение. 1) Концентрация *n* фотонов в пучке может быть найдена, как частное от деления объемной плотности энергии ω на энергию ε одного фотона:

$$\mathbf{n=\omega/\varepsilon} \qquad (1)$$

Из формулы $p=\omega(1+\rho)$, определяющей давление света, где ρ- коэффициент отражения, найдем

$$\omega = p/(\rho+1). \qquad (2)$$

Подставив выражение для ω из уравнения (2) в формулу (1), получим

$$n = \rho/[(\rho+1)*\varepsilon]. \qquad (3)$$

Энергия фотона зависит от частоты υ, а следовательно, и от длины световой волны λ:

$$\varepsilon = h\upsilon = hc/\lambda \qquad (4)$$

Подставив выражение для энергии фотона в формулу (3), определим искомую концентрацию фотонов:

$$n = (\rho\lambda)/[(\rho+1)*\varepsilon]. \qquad (5)$$

Коэффициент отражения ρ для зачерненной поверхности принимаем равным нулю.

Подставив числовые значения в формулу (5), получим

$n=2{,}52*10^{13}$ $м^{-3}$.

2) Число n_1 фотонов, падающих на поверхность площадью 1 $м^2$ за время 1 с, найдем из соотношения $n_1=N/(St)$, где N — число фотонов, падающих за время t на поверхность площадью S. Но $N=ncSt$, следовательно,

$n_1=(ncSt)/(St)=nc$

Подставив сюда значения *n* и *c,* получим
n_1=7,56*10^{21} $м^{-2}$*$с^{-1}$.

Задачи для самостоятельного решения

69. Определите, с какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его импульс был равен импульсу фотона, длина волны которого λ = 0,5 мкм.

Ответ: υ*=1,46 км/с*

70. Давление монохроматического света с длиной волны λ = 500 нм на зачерненную поверхность, расположенную перпендикулярно падающим лучам, равно 0,12 мкПа. Определите число фотонов, падающих ежесекундно на 1 $м^2$ поверхности.

Ответ: $N = 9,05\cdot 10^{19}$

71. На идеально отражающую поверхность площадью S = 5 $см^2$ за время t = 3 мин нормально падает монохроматический свет, энергия которого W = 9 Дж. Определите: 1) облученность поверхности; 2) световое давление, оказываемое на поверхность.

Ответ: 1) $E_e = 100$ *Вт/*$м^2$*, 2)* $p = 667$ *нПа*

72. Определите давление света на стенки электрической 150-ваттной лампочки, принимая, что вся потребляемая мощность идет на излучение и стенки лампочки отражают 15% падающего на них света. Считайте лампочку сферическим сосудом радиуса 4 см.

Ответ: $p = 28,6$ *мкПа*

73. На идеально отражающую плоскую поверхность нормально падает монохроматический свет с длиной волны λ = 0,55 мкм. Поток излучения Φ_e составляет 0,45 Вт. Определите силу давления, испытываемую этой поверхностью.

Ответ: $F = 3$*нН*

74. Калий освещается монохроматическим светом с длиной волны 400 нм. Определите наименьшее задерживающее напряжение, при котором фототок прекратится. Работа выхода электронов из калия равна 2,2 эВ.

Ответ: $U_0 = 0,91$*В*

75. Какая доля энергии фотона израсходована на работу

вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта λ_0 = 307 нм и максимальная кинетическая энергия T_{max} фотоэлектрона равна 1 эВ?

Ответ: n=0,80

76. Плоский серебряный электрод освещается монохроматическим излучением с длиной волны λ = 83 нм. Определите, на какое максимальное расстояние от поверхности электрода может удалиться фотоэлектрон, если вне электрода имеется задерживающее электрическое поле напряженностью E = 10 В/см. Красная граница фотоэффекта для серебра λ_0 = 264 нм.

Ответ: s = 1,03 см

77. Красная граница фотоэффекта для некоторого металла равна 500 нм. Определите максимальную скорость электронов, вырываемых из этого металла светом с длиной волны 400 нм.

Ответ: υ_{max} *=468 км/с*

Практическое занятие № 6 «Эффект Комптона. Атом водорода по теории Бора».

Краткое теоретическое введение

• Изменение длины волны $\Delta\lambda$, фотона при рассеянии его на электроне на угол θ

$\Delta\lambda=\lambda`-\lambda$ =[(2π ħ)/(mc)]*(1-cos θ), или $\Delta\lambda$=2*[(2π ħ)/(mc)]*sin^2(θ/2)

где *m* — масса электрона отдачи; λ *и* $\lambda`_c$ — длины волн»

• Комптоновская длина волны

λ_c=2π ħ/(mc).

(При рассеянии фотона на электроне λ_c=2,436 пм.)

• Момент импульса электрона на стационарных орбитах *

L=mvr = nħ (n=1,2,3,…),

где *m* — масса электрона; *r* — радиус орбиты; v — скорость электрона на орбите; *n* — главное квантовое число; *ħ* — постоянная Планка.

• Сериальная формула, определяющая длину волны λ или частоту υ света, излучаемого или поглощаемого атомом водорода при переходе из одного стационарного состояния в другое,

$$\frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \qquad v = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$$

,

где R' и R —постоянная Ридберга ($R'=1,097*10^{7}$ $м^{-1}$; $R=cR'=3,29*10^{15}$ c^{-1}); n_1 и n_2 — целые числа; n_1 — номер серии спектральных линий (n_1=l — серия Лаймана, n_2=2 — серия Бальмера, n_1=3 — серия Пашена и т. д.).
Для данной серии $n_2=n_1+l$, n_1+2, n_1+3 и т. д.

• Энергия фотона, испускаемого атомом водорода при переходе из одного стационарного состояния в другое,

$$\varepsilon = E_i\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right)$$

где E_i — энергия ионизации * водорода: $E_i=2\pi h\hbar R=13,6$ эВ

___

* Бор исходил из предположения, что электроны обращаются по круговым орбитам. Зоммерфельд дополнил теорию Бора введением эллиптических орбит. Современная физика отказалась от представления об электронных орбитах. Вместо орбит введено понятие об энергетических уровнях атома. При этом номера уровней совпадают с номерами боровских орбит. Однако в целях наглядности иногда пользуются термином «орбита».

Пример 1. В результате эффекта Комптона фотон при соударении с электроном был рассеян на угол θ=90°. Энергия ε′ рассеянного фотона равна 0,4 МэВ. Определить энергию ε фотона до рассеяния.

Решение. Для определения первичного фотона воспользуемся формулой Комптона в виде

$$\lambda`-\lambda = 2\cdot[(2\pi\hbar)/(mc)]\cdot\sin^2(\theta/2). \qquad (1)$$

Формулу (1) преобразуем следующим образом: 1) выразим длины волн λ' и λ через энергии ε' и ε соответствующих фотонов, воспользовавшись соотношением $\varepsilon = 2\pi\hbar c/\lambda$; 2) умножим числитель и знаменатель правой части формулы на *c*. Тогдаполучим

$$\frac{2\pi h'c}{\varepsilon'}-\frac{2\pi h'c}{\varepsilon}=\frac{2\pi h'c}{mc^2}2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

Сократив на *2nħc*, выразим из этой формулы искомую энергию:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon' mc^2}{mc^2 - \varepsilon' * 2\sin^2(\theta/2)} = \frac{\varepsilon' E_0}{E_0 - 2\varepsilon' - \sin^2(\theta/2)} \qquad (2)$$

Вычисления по формуле (2) удобнее вести во внесистемных единицах.

Взяв из таблиц значение энергии покоя электрона в мегаэлектрон-вольтах и подставив числовые данные, получим ε = 1,85 МэВ.

Пример 2. Вычислить радиус первой орбиты атома водорода (Боровский радиус) и скорость электрона на этой орбите.

Решение. Согласно теории Бора, радиус r электронной орбиты и скорость v электрона на ней связаны равенством $mvr=n\hbar$. Так как в задаче требуется определить величины, относящиеся к первой орбите, то главное квантовое число n=1 и указанное выше равенство примет вид

$$mvr=\hbar. \qquad (1)$$

Для определения двух неизвестных величин r и v необходимо еще одно уравнение. В качестве второго уравнения воспользуемся уравнением движения электрона. Согласно теории Бора, электрон вращается вокруг ядра. При этом сила взаимодействия между электрическими зарядами ядра и электрона сообщает электрону центростремительное ускорение. На основании второго закона Ньютона можем записать

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \qquad (2)$$

(e и m — заряд и масса электрона)

Совместное решение равенств (1) и (2) относительно r дает

$r = 4\pi\varepsilon_0 \hbar/(me^2)$.

Подставив сюда значения $\hbar$, e, *m* и произведя вычисления, найдем боровский радиус:

$r = a = 5{,}29*10^{-11}$ м.

Из равенства (1) получим выражение скорости электрона на первой орбите:

$v = \hbar/(mr)$.

Произведя вычисления по этой формуле, найдем

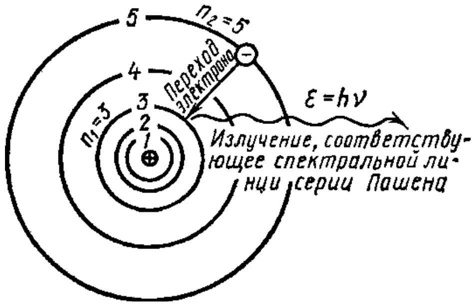
v =2,18Мм/с.

---

*Энергия ионизации, выраженная в электрон-вольтах, равна потенциалу ионизации, выраженному в вольтах. Потенциалом ионизации называется ускоряющая разность потенциалов, которую должен пройти бомбардирующий электрон, чтобы приобрести энергию, достаточную для ионизации атома.

Пример 3. Определить энергию ε фотона, соответствующего второй линии в первой инфракрасной серии (серии Пашена) атома водорода.

Решение. Энергия ε фотона, излучаемого атомом водорода при переходе электрона с одной орбиты на другую,



$$\varepsilon = E_i\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right)$$

где E_i — энергия ионизации атома водорода; n_1=1,2,3,...—номер орбиты, на которую переходит электрон $n_2=n_1+1$; n_1+2;...; n_1+m— номер орбиты, с которой переходит электрон; m — номер спектральной линии в данной серии.

Для серии Пашена n_1=3; для второй линии этой серии $m=2$, $n_2=n_1+m$ = 3+2=5.

Подставив числовые значения, найдем энергию фотона:

ε = 0,97 эВ.

Задачи для самостоятельного решения

78. Фотон с энергией 1,00 МэВ рассеялся на покоящемся свободном электроне. Найти кинетическую энергию электрона отдачи, если в результате рассеяния длина волны фотона изменилась на 25%.

Ответ: Т=0,2 МэВ.

79. Какая доля энергии фотона при эффекте Комптона приходится на электрон отдачи, если фотон претерпел рассеяние на угол $\theta=180^0$? Энергия E фотона до рассеяния равна 0,255 *МэВ* .

Ответ: $\eta=50\%$.

80. Угол рассеяния θ фотона равен 90^0. Угол отдачи φ электрона равен 30^0. Определить энергию E падающего фотона.

Ответ: E = 0,37 *МэВ*.

81. Определить потенциальную П, кинетическую T и полную E энергии электрона, находящегося на первой орбите атома водорода.

Ответ: – 27,2 эВ; 13,6 эВ; – 13,6 эВ

82. Вычислить энергию ε фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на первый.

Ответ: 12,1 эВ

83. Фотон с энергией ε =16,5 эВ выбил электрон из невозбужденного атома водорода. Какую скорость v будет иметь электрон вдали от ядра атома?

Ответ: 1 Мм/с

84. Определить наименьшую ε_{min} и наибольшую ε_{max} энергии фотона в ультрафиолетовой серии спектра водорода (серии Лаймана).

Ответ: 10,2 эВ; 13,6 эВ

Практическое занятие № 7 «Гипотеза де Бройля. Соотношения неопределенностей».

Краткое теоретическое введение

- Формула де Бройля, выражающая связь длины волн с импульсом p движущейся частицы, для двух случаев:

  а) в классическом приближении ($v<<c$; $p= m_0 v$)

  $\lambda = 2\pi\hbar/p$

  б) в релятивистском случае (скорость u частицы сравнима со скоростью c света в вакууме; $p = m\upsilon^2 = m_0\upsilon/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$

  $$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0\upsilon}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$$

- Связь длины волны де Бройля с кинетической энергией T частицы:

  а) в классическом приближении $\lambda = \dfrac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0T}}$;

  б) в релятивистском случае $\lambda = \dfrac{2\pi\hbar c}{\sqrt{T(T+2E_0)}}$, где E_0 — энергия покоя частицы ($E_0 = m_0c^2$).

- Фазовая скорость волн де Бройля

$v = \omega/k$

где ω — круговая частота; k — волновое число ($k = 2\pi/\lambda$).

- Групповая скорость волн де Бройля

$$u = \frac{d\omega}{dk}.$$

- Соотношения де Бройля:

$E=\hbar\omega$, $p = \hbar k$,

где E — энергия движущейся частицы; p — импульс частицы; k — волновой вектор;

$|k| = k = 2\pi/\lambda$; $\hbar$ - постоянная Планка ($\hbar = h/(2\pi) = 1{,}05.10^{-34}$ Дж.с).

- Соотношения неопределенностей:

а) для координаты и импульса частицы $\Delta p\Delta x \geq \hbar$ где Δp_x — неопределенность проекции импульса частицы на ось x; Δx — неопределенность ее координаты;

б) для энергии и времени $\Delta E\Delta t \geq \hbar$, где ΔE — неопределенность энергии данного квантового состояния; Δt — время пребывания системы в этом состоянии.

Примеры решения задач

Пример 1. Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов U. Найти длину волны де Бройля λ для двух случаев: 1) U_1= = 51 кВ; 2) U_2 = 510 кВ.

Решение. Длина волны де Бройля λ частицы зависит от ее импульса p и определяется формулой

$$\lambda = 2\pi\hbar/p \qquad (1)$$

Импульс частицы можно определить, если известна ее кинетическая энергия T. Связь импульса с кинетической энергией для нерелятивистского (когда $T \ll E_0$) и для релятивистского (когда $T \approx E_0$) случаев соответственно выражается формулами:

$$p = \sqrt{2m_0T}; \qquad (2)$$

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{(1E_0 + T)T} \qquad (3)$$

Формула (1) с учетом соотношений (2) и (3) запишется соответственно в нерелятивистском и релятивистском случаях:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0 T}}; \qquad (4)$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{(1/c)\sqrt{(2E_0 + T)T}} \qquad (5)$$

Сравним кинетические энергии электрона, прошедшего заданные в условии задачи разности потенциалов U_1 = 51 В и U_2 = 510 кВ, с энергией покоя электрона и в зависимости от этого решим вопрос, которую из формул (4) и (5) следует применить для вычисления длины волны де Бройля.

Как известно, кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов *U,*

$T = |e|U.$

В первом случае $T_1 = |e|(U_1 = 51$ эВ $= 0{,}51\cdot10^{-4}$ МэВ, что много меньше энергии покоя электрона $E_0 = m_0c^2 = 0{,}51$ МэВ. Следовательно, можно применить формулу (4).

Для упрощения расчетов заметим, что $T_1 = 10^{-4}\, m^0c^2$. Подставив это выражение в формулу (4), перепишем ее в виде

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0\cdot10^{-4}m_0c}} = \frac{10^2}{\sqrt{2}}\frac{2\pi\hbar}{m_0c}$$

Учтя, что $\left[\dfrac{2\pi\hbar}{m_0c}\right]$ есть комптоновская длина волны λ_C, получим

$$\lambda_1 = \left(10^2/\sqrt{2}\right)\lambda_C \quad .$$

Так как $\lambda_C = 2{,}43\cdot10^{-12}$ м, то

$$\lambda_1 = \frac{10^2}{\sqrt{2}}\cdot2{,}43\cdot10^{-12}\,\text{м} = 172\,\text{пм}$$

Во втором случае кинетическая энергия $T_2 = |e|\ U_2 = 510$ кэВ = 0,51 МэВ, т. е. равна энергии покоя электрона. Следовательно, необходимо применить релятивистскую формулу (5).

Учтя, что $T_2 = 0{,}51$ МэВ$= mc^2$, по формуле (5) найдем

$$\lambda_2 = \frac{2\pi\hbar}{\frac{1}{c}\sqrt{(2m_oc^2 + m_oc^2)m_oc^2}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3}m_oc}, \text{ или } \lambda_o = \frac{\lambda c}{\sqrt{3}}$$

Подставив значение λ_c в последнюю формулу и произведя вычисления, получим

λ_2=1,4 пм.

Пример 2. На грань кристалла никеля падает параллельный пучок электронов. Кристалл поворачивают так, что угол скольжения θ изменяется. Когда этот угол делается равным 64°, наблюдается максимальное отражение электронов, соответствующее дифракционному максимуму первого порядка. Принимая расстояние *d* между атомными плоскостями кристалла равным 200 пм, определить длину волны де Бройля λ электронов и их скорость *v*.

Решение. К расчету дифракции электронов от кристаллической решетки применяется то же уравнение Вульфа — Брэгга, которое используется в случае рентгеновского излучения:

$$2d \sin\theta = k\lambda$$

где *d* — расстояние между атомными плоскостями кристалла: θ — угол скольжения; *k* —порядковый номер дифракционного максимума; λ — длина волны де Бройля. Очевидно, что

$$\lambda = (2\, d \sin\theta)/k.$$

Подставив в эту формулу значения величин и вычислив, получим

λ =360 пм.

Из формулы длины волны де Бройля $\lambda = 2\pi\hbar/(mv)$ выразим скорость электрона:

$$v = 2\pi\hbar/(m\lambda)$$

Подставив в эту формулу значения π, $\hbar$, m (масса электрона), и произведя вычисления, найдем

v=2 Мм/с.

Пример 3. Кинетическая энергия *T* электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные линейные размеры атома.

Решение. Неопределенность координаты и импульса электрона связаны соотношением

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \qquad (1)$$

где Δx — неопределенность координаты электрона; Δp — неопределенность его импульса.

Из этого соотношения следует, что чем точнее определяется положение частицы в пространстве, тем более неопределенным становится импульс, а следовательно, и энергия частицы. Пусть атом имеет линейные размеры l, тогда электрон атома будет находиться где-то в пределах области с неопределенностью: $\Delta x = l/2$. Соотношение неопределенностей (1) можно записать в этом случае в виде $(l/2\}$ $\Delta p \geq \hbar$, откуда

$$l \geq 2\hbar /(\Delta p) \qquad (2)$$

Физически разумная неопределенность импульса Δp, во всяком случае, не должна превышать значения самого импульса p, т. е.

$$\Delta p \leq p$$

Импульс p связан с кинетической энергией T соотношением $p = \sqrt{2mT}$ Заменим Δp значением $\sqrt{2mT}$ (такая замена не увеличит l). Переходя от неравенства (2) к равенству, получим

$$l_{min} = 2\hbar/\sqrt{2mT}$$

Подставив числовые значения и произведя вычисления, найдем

l_{min} = 124 пм.

Задачи для самостоятельного решения

85. Определить длину волны де Бройля λ характеризующую волновые свойства электрона, если его скорость v =1 Мм/с. Сделать такой же подсчет для протона.
Ответ:727Пм;0,396пм.
86. Электрон движется со скоростью v = 200 Мм/с. Определить длину волны де Бройля λ, учитывая изменение массы электрона в зависимости от скорости.
Ответ:2.7Пм.
87. Какую ускоряющую разность потенциалов U должен прой¬ти электрон, чтобы длина волны де Бройля λ была равна 0,1 нм? *Ответ:150В*
88. Определить длину волны де Бройля λ электрона, если его кинетическая энергия T = 1 кэВ.
Ответ:39Пм.
89. Найти длину волны де Бройля λ протона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U: 1) 1 кВ; 2) 1 МВ.
Ответ:907фм.
90. Найти длину волны де Бройля λ для электрона, движущегося по круговой орбите атома водорода, находящегося в основном состоянии.
Ответ:0,33нм.

91. Определить длину волны де Бройля λ, электрона, находящегося на второй орбите атома водорода.
Ответ:0,67нм.
92. С какой скоростью движется электрон, если длина волны де Бройля λ электрона равна его комптоновской длине волны λc
Ответ:212Мм/с
93. Определить длину волны де Бройля λ электронов, бомбардирующих антикатод рентгеновской трубки, если граница сплошного рентгеновского спектра приходится на длину волны λ = 3 нм.
Ответ:0,06нм
94. Электрон движется по окружности радиусом r = 0,5 см в однородном магнитном поле с индукцией B = 8 мТл. Определить длину волны де Бройля λ электрона.
Ответ:0,1нм.
95. На грань некоторого кристалла под углом $\alpha = 60°$ к ее поверхности падает параллельный пучок электронов, движущихся с одинаковой скоростью. Определить скорость v электронов, если они испытывают интерференционное отражение первого порядка.
Ответ:2,1Мм/с
96. Электрон с кинетической энергией T = 15 эВ находится в металлической пылинке диаметром d = 1 мкм. Оценить относительную неточность Δv, с которой может быть определена скорость электрона.
Ответ: $\Delta v/v = 10^{-4}$
97. Во сколько раз дебройлевская длина волны λ частицы меньше неопределенности Δx ее координаты, которая соответствует относительной неопределенности импульса в 1 %?
*Ответ:*В 160 раз
98. Предполагая, что неопределенность координаты движущейся частицы равна дебройлевской длине волны, определить относительную неточность $\Delta p/p$ импульса этой частицы.
Ответ:16%

Ответ: 1) уменьшилась в $\sqrt{2}$ раз; 2) увеличилась в 2 раза;3)не изменилась; 4) увеличилась в $\sqrt{2}$ раз; 5)уменьшилась в 2 раза.

99. Если частицы имеют одинаковую длину волны Де Бройля, то наибольшей скоростью обладает . . .

Ответ: 1) позитрон; 2) нейтрон; 3) протон; 4) α-частица.

100. Если частицы движутся с одинаковой скоростью то наименьшей длиной волны Де Бройля обладает . . .

Ответ: 1) α-частица; 2) нейтрон; 3) позитрон; 4) протон.

101. Если частицы имеют одинаковую скорость, то наибольшей длиной волны Де Бройля обладает:

Ответ: 1) электрон; 2) нейтрон; 3) протон; 4) α-частица.

Практическое занятие № 8
«Простейшие случаи движения микрочастиц»

Краткое теоретическое введение

- Одномерное временное уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial\Psi} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$$

где i — мнимая единица ($\sqrt{-1}$); m—масса частицы; ψ *(x, t)*— волновая функция, описывающая состояние частицы.

Волновая функция, описывающая одномерное движение свободной частицы,

$$W(x,t) = A exp\frac{i}{\hbar}(px - Et),$$

где A — амплитуда волны де Бройля; p — импульс частицы; E — энергия частицы.

Одномерное уравнение Шредингера для стационарных состояний

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0$$

где E — полная энергия частицы; $U\,(x)$ - потенциальная энергия; $\psi\,(X)$ — координатная (или амплитудная) часть волновой функции

Для случая трех измерений $\psi(x, y, z,)$ уравнение Шредингера

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0$$

или в операторной форме

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0,$$ где $$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ — оператор Лапласа

При решении уравнения Шредингера следует иметь в виду стандартные условия которым должна удовлетворять волновая функция:

конечность (во всем пространстве), однозначность, непрерывность самой ψ - функции и ее первой производной.

• Вероятность dW обнаружить частицу в интервале от x до $x + dx$ (в одномерном случае) выражается формулой

$$dW = [\psi(x)]^2\,dx$$

где $[\psi(x)]^2$— плотность вероятности.

Вероятность W обнаружить частицу в интервале от x_1 до x_2 находится интегрированием dW в указанных пределах

$$W=\int_{x_1}^{x_2} [\psi(x)^2\,dx$$

• Собственное значение энергии E_n частицы, находящейся на n-м энергетическом уровне в бесконечно глубоком одномерном прямоугольном потенциальном ящике, определяется формулой

$$En = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

где l — ширина потенциального ящика.

Соответствующая этой энергии собственная волновая функция имеет вид

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Задачи для самостоятельного решения

148. Нестационарным уравнением Шредингера является уравнение…

Варианты ответов *1)* $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U(x,y,z,t)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$*;* *2)* $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0$*;*

3) $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{m\omega_0^2x^2}{2}\right)\psi = 0$*;* *4)* $\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi = 0$.

149. Стационарным уравнением Шредингера для частицы в одномерном ящике с бесконечно высокими стенками является уравнение…

Варианты ответов

1) $\dfrac{d^2\psi}{dx^2}+\dfrac{2m}{\hbar^2}E\psi=0$; *2)* $\Delta\psi+\dfrac{2m}{\hbar^2}\left(E+\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi=0$;

3) $\dfrac{d^2\psi}{dx^2}+\dfrac{2m}{\hbar^2}\left(E-\dfrac{m\omega_0^2x^2}{2}\right)\psi=0$; *4)* $\Delta\psi+\dfrac{2m}{\hbar^2}E\psi=0$.

150. Электрону, движущемуся в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, соответствует уравнение ...
Варианты ответов

1) $\dfrac{d^2\psi}{dx^2}+\dfrac{2m}{\hbar^2}E\psi=0$; *2)* $\Delta\psi+\dfrac{2m}{\hbar^2}\left(E+\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi=0$;

3) $\dfrac{d^2\psi}{dx^2}+\dfrac{2m}{\hbar^2}\left(E-\dfrac{m\omega_0^2x^2}{2}\right)\psi=0$; *4)* $\Delta\psi+\dfrac{2m}{\hbar^2}E\psi=0$.

151. Стационарным уравнением Шредингера для электрона в водородоподобном ионе является уравнение ...

Варианты ответов: 1) $\Delta\psi+\dfrac{2m}{\hbar^2}\left(E+\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi=0$;

2) $\dfrac{d^2\psi}{dx^2}+\dfrac{2m}{\hbar^2}E\psi=0$;

3) $\dfrac{d^2\psi}{dx^2}+\dfrac{2m}{\hbar^2}\left(E-\dfrac{m\omega_0^2x^2}{2}\right)\psi=0$; *4)* $\Delta\psi+\dfrac{2m}{\hbar^2}E\psi=0$.

152. Стационарным уравнением Шредингера для линейного гармонического осциллятора является уравнение…

Варианты ответов: 1) $\dfrac{d^2\psi}{dx^2}+\dfrac{2m}{\hbar^2}\left(E-\dfrac{m\omega_0^2x^2}{2}\right)\psi=0$;

2) $\Delta\psi+\dfrac{2m}{\hbar^2}\left(E+\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi=0$; *3)* $\dfrac{d^2\psi}{dx^2}+\dfrac{2m}{\hbar^2}E\psi=0$;

4) $\Delta\psi+\dfrac{2m}{\hbar^2}E\psi=0$.

153. Стационарное уравнение Шредингера в общем случае имеет вид:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - U\right)\psi = 0,$$

где U- потенциальная энергия микрочастицы. Электрону в атоме водорода соответствует уравнение…

Варианты ответов:

1) $\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi = 0$*;* *2)* $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0$*;*

3) $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}\right)\psi = 0$*;* *3)* $\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0.$

154. Квадрат модуля волновой функции ψ, входящей в уравнение Шрёдингера, равен …

Варианты ответов:

1) плотности вероятности обнаружения частицы в соответствующем месте пространства; 2) импульсу частицы в соответствующем месте пространства; 3) энергии частицы в соответствующем месте пространства.

155. С помощью волновой функции ψ, входящей в уравнение Шрёдингера, можно определить … *Варианты ответов:*

1) вероятность обнаружения частицы в любой точке пространства; 2) импульс частицы в любой точке пространства;
3) траекторию движения частицы.

156. Состояние микрочастицы в данном состоянии описывается волновой функцией, квадрат модуля которой определяет…

Варианты ответов:

1) плотность вероятности микрочастицы в данном состоянии; 2) кинетическую энергию микрочастицы в данном состоянии; 3) потенциальную энергию микрочастицы в данном состоянии; 4) вероятность нахождения микрочастицы в данном состоянии.

157. Вероятность $dP(x)$ обнаружения электрона вблизи точки с координатой x на участке dx равна… *Варианты ответов:*

1) $dP(x)= |\Psi(x)|^2 dx$*;* *2)* $dP(x)=\Psi(x^2)\cdot dx$*;*
3) $dP(x)= \Psi^2(x)\cdot dx$*;* *4)* $dP(x)= \Psi(x)\cdot dx$*.*

158. В стационарных состояниях, описываемых волновой функцией $\psi(x,t)=\psi(x)\exp\left(-iE\frac{t}{\hbar}\right)$,

плотность вероятности данного состояния…

Варианты ответов:

1) не зависит от времени; 2) зависит от времени гармонически; 3) зависит от времени по экспоненте; 4)зависит от времени линейно.

159. На рисунке приведены картины распределения плотности вероятности нахождения микрочастицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками (Рис. 1). Состоянию с квантовым числом n = 2 соответствует график …

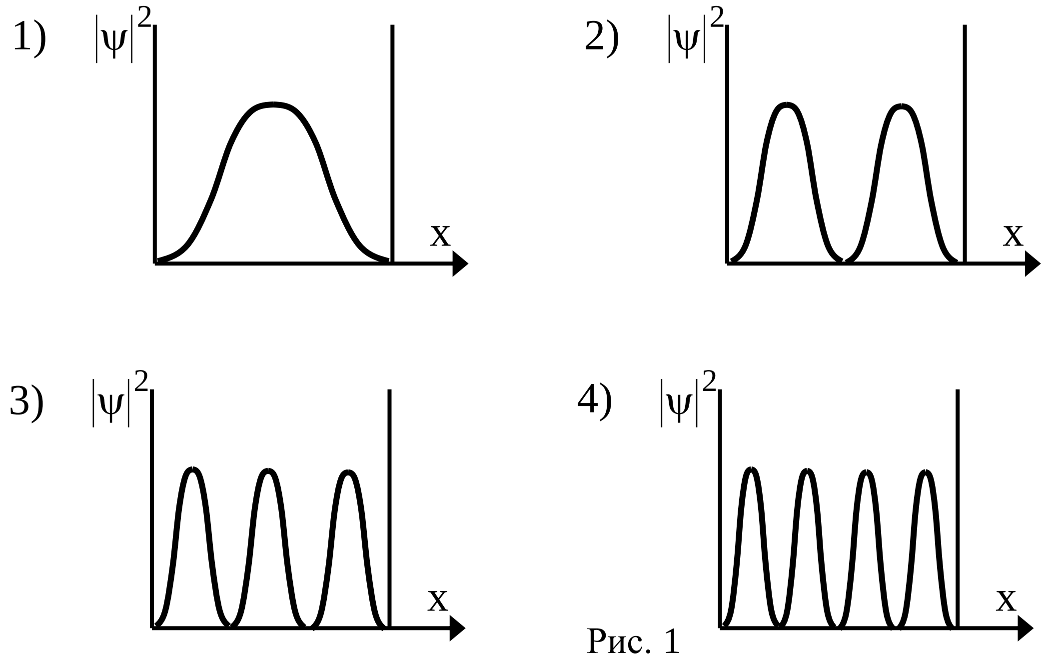


Рис. 1

Варианты ответов:1)1; 2)2; 3)3; 4)4.

161. Вероятность $|\psi|^2$ обнаружить электрон на участке (a,b) одномерного потенциального ящика с бесконечно высокими стенками вычисляется по формуле:

$$W=\int_a^b \omega\, dx,$$

где ω – плотность вероятности, определяемая ψ- функцией. Если ψ –

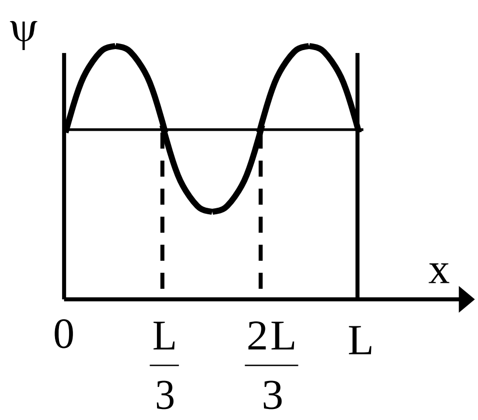


Рис. 3

функция имеет вид указанный на рисунке 3, то вероятность обнаружить электрон на участке $\frac{L}{6} < x < \frac{L}{2}$ равна …

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{3}$; *2)* $\frac{1}{2}$; *3)* $\frac{2}{3}$; *4)* $\frac{5}{6}$.

162. Вероятность обнаружить электрон на участке (a, b) одномерного потенциального ящика с бесконечно высокими стенками вычисляется по формуле:

$$W = \int_a^b \omega dx,$$

где ω – плотность вероятности, определяемая ψ- функцией. Если ψ – функция имеет вид указанный на рисунке 4, то вероятность обнаружить электрон на участке $L/6 < x < L$ равна …

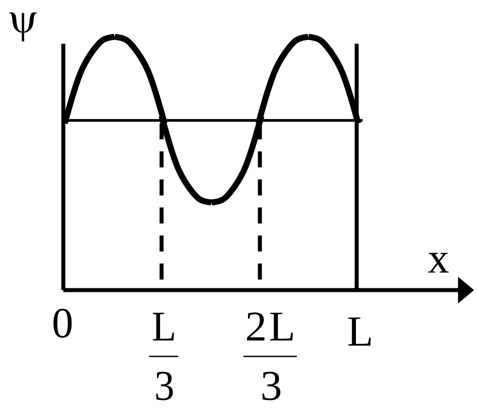


Рис. 4

Варианты ответов:

1) $\frac{5}{6}$; *2)* $\frac{1}{2}$; *3)* $\frac{2}{3}$; *4)* $\frac{1}{3}$.

163. Вероятность обнаружить электрон на участке (a, b) одномерного потенциального ящика с бесконечно высокими стенками вычисляется по формуле

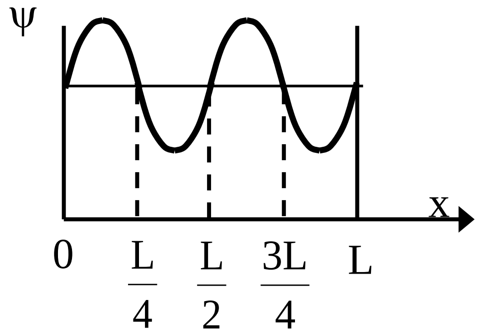


Рис. 5

$$W = \int_a^b \omega dx,$$

где ω – плотность вероятности, определяемая ψ- функцией. Если ψ – функция имеет вид, указанный на рисунке 5, то вероятность обнаружить электрон на участке $\frac{3L}{8} < x < L$ равна …

Варианты ответов:

1) $\frac{5}{8}$*; 2)* $\frac{1}{4}$*; 3)* $\frac{3}{8}$*; 4)* $\frac{1}{2}$.

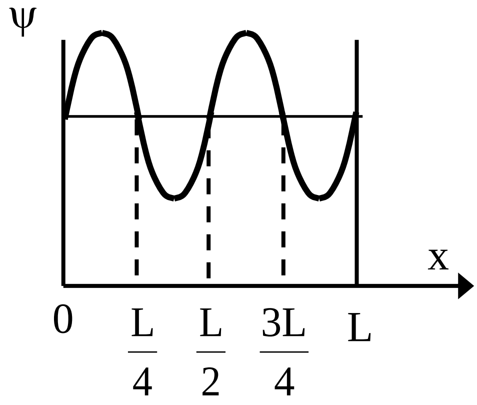


Рис. 6

164. Вероятность обнаружить электрон на участке (a, b) одномерного потенциального ящика с бесконечно высокими стенками вычисляется по формуле

$$W = \int_a^b \omega dx,$$

где ω – плотность вероятности, определяемая ψ- функцией. Если ψ – функция имеет вид указанный на рисунке 6, то вероятность обнаружить электрон на участке $\frac{5L}{8} < x < \frac{3L}{4}$ равна …

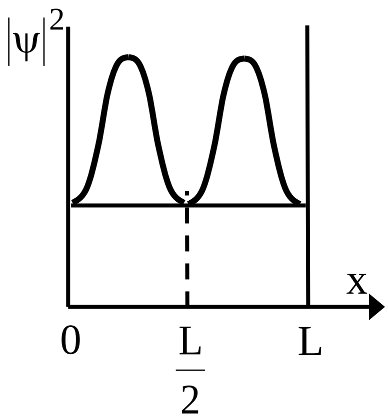


Рис. 7

Варианты ответов:1) $\frac{1}{8}$*; 2)* $\frac{1}{4}$*;*

3) $\frac{3}{8}$*; 5)* $\frac{5}{8}$.

179. Магнитное квантовое число m определяет… *Варианты ответов:*

1*) проекцию орбитального момента импульса электрона на заданное направление;*

2) собственный механический момент электрона в атоме;

3) орбитальный механический момент электрона в атоме;

4) энергию стационарного состояния электрона в атоме.

180. Азимутальное квантовое число *l* определяет…

Варианты ответов:

1) орбитальный механический момент электрона в атоме;

2) собственный механический момент электрона в атоме;

3) энергию стационарного состояния вэлектрона в атоме;

4) проекцию орбитального момента импульса электрона на заданное направление.

Практическое занятие № 9

«Строение атомных ядер. Радиоактивность».

Краткое теоретическое введение

• Ядро обозначается тем же символом, что и нейтральный атом: $^{a}_{Z}X$,

где X — символ химического элемента; Z — зарядовое число (атомный номер; число протонов в ядре); *A* — массовое число (число нуклонов в ядре). Число *N* нейтронов в ядре равно разности *A*—Z.

• Радиус ядра определяется соотношением

$r = r_0A^{1/3}$

где r_0— коэффициент пропорциональности, который можно считать для всех ядер постоянным и равным $1{,}4*10^{-15}$ м.

• Основной закон радиоактивного распада

$N=N_0e^{-\lambda t}$

где *N* — число нераспавшихся атомов в момент времени *t;* N_0— число нераспавшихся атомов в момент, принятый за начальный (при *t=0);* е — основание натуральных логарифмов; λ — постоянная радиоактивного распада.

• Период полураспада $T_{1/2}$ — промежуток времени, за который число нераспавшихся атомов уменьшается в два раза. Период полураспада связан с постоянной распада соотношением

$T_{1/2} = \ln 2/\lambda = 0{,}693/\lambda$.

• Число атомов, распавшихся за время *t,*

$\Delta N = N_0 - N = N_0, (1 - e^{-\lambda t})$.

Если промежуток времени $\Delta t << T_{1/2}$. то для определения числа распавшихся атомов можно применять приближенную формулу

$\Delta N \approx \lambda N\Delta t$

Среднее время жизни т радиоактивного ядра — промежуток времени, за который число нераспавшихся ядер уменьшается в е раз:

$\tau = 1/\lambda$

• Число атомов, содержащихся в радиоактивном изотопе,

$N = (m/M)\cdot N_A$

где *m* — масса изотопа; *М* — его молярная масса; N_A — постоянная Авогадро.

• Активность *А* нуклида в радиоактивном источнике (активность изотопа) есть величина, равная отношению числа *dN* ядер, распавшихся в изотопе, к промежутку времени *dt,* за которое произошел распад. Активность определяется по формуле

$A = -dN/dt = \lambda N$,

или после замены *N* по основному закону радиоактивного распада

$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$

Активность изотопа в начальный момент времени *(t=0)*

$A_0 = \lambda N_0$.

Активность изотопа изменяется со временем по тому же закону, что и число нераспавшихся ядер:

$A = A_0 e^{-\lambda t}$

• Массовая активность *а* радиоактивного источника есть вели чина, равная отношению его активности А к массе т этого источни-ка, т. е.

$a = A/m$.

• Энергия связи прямо пропорциональна дефекту массы системы частиц:

$E_{св} = c^2 \Delta m$,

где *с*—скорость света в вакууме ($c^2 = 8{,}987 \cdot 10^{16}$ м^2/с^2 = $8{,}987 \cdot 10^{16}$ Дж/кг).

Если энергия выражена в мегаэлектрон-вольтах, а масса в атомных единицах, то

$c^2 = 931{,}4$ МэВ/а. е. м.

• Дефект массы * Δm атомного ядра есть разность между суммой масс

свободных протонов и нейтронов и массой образовавшегося из них ядра:

$\Delta m = (Zm_p + Nm_n) - m_я$,

где Z—зарядовое число (число протонов в ядре); m_pи m_n—массы протона и нейтрона соответственно; $m_я$ — масса ядра.

Если учесть, что

$m_я = m_a - Z m_e$; $m_p + m_e = m_{{}^1_1H}$; $N = (A-Z)$,

то формулу дефекта массы ядра можно представить в виде

$\Delta m = Zm_{{}^1_1H} + (A—Z)m_n - m_a$,

где *А*—массовое число (число нуклонов в ядре).

• Удельная энергия связи (энергия связи на нуклон)

$E_{уд} = E_{св} / A$

Пример 1. Вычислить дефект массы Δm и энергию связи $E_{св}$ ядра

$^{11}{}_5B$.

Решение. Дефект массы ядра определим по формуле

$$\Delta m = Zm_{^1{}_1H} + (A—Z)m_n - m_a, \qquad (1)$$

Вычисление дефекта массы выполним во внесистемных единицах **(а. е.** м.). Для ядра $^{11}{}_5B$ Z=5, *A* =11. Массы нейтральных атомов водорода ($^1{}_1H$) и бора ($^{11}{}_5B$), а также нейтрона *(n)* найдем из таблиц. Подставим найденные массы в выражение (1) и произведем вычисления:

Δm= [5.1,00783+11-5). 1,00867—11,00931] а. е.м., или

Δm =0,08186 а. е. м.

Энергия связи ядра определяется соотношением

$$E_{св} = \Delta mc^2. \qquad (2)$$

Энергию связи ядра также найдем во внесистемных единицах (МэВ). Для этого дефект массы подставим в выражение (2) в а. е. м., а коэффициент пропорциональности *(c^2)* — в МэВ/ (а. е. м.), т. е.

Eсв=931·4·1,08186 МэВ =76,24 МэВ,

и округлим полученный результат до трех значащих цифр:

$E_{св}$ = 76,2 МэВ.

Пример 2. Определить удельную энергию связи ядра $^7{}_3Li$.

Решение. Удельная энергия связи есть энергия связи ядра. приходящаяся на один нуклон:

$E_{уд} = E_{св}/c^2$, или

$E_{уд}=(c^2/A)*[Zm_{^1{}_1H} + (A—Z)m_n - m_a]$,

Подставим в эту формулу значения величин и произведем вычисления:

$E_{уд}$ = [3*1,00783+(7—3)*1,00867—7,01601] МэВ/нуклон ==
=5,61 МэВ/нуклон.

Пример 3. Определить энергию *E,* которую нужно затратить для отрыва нейтрона от ядра $^{23}{}_{11}Na$.

Решение. После отрыва нейтрона число нуклонов *A* в ядре уменьшится на единицу, а число протонов Z останется неизменным; получится ядро ^{22}Na. Ядро ^{23}Na можно рассматривать как устойчивую систему, образовавшуюся в результате захвата свободного нейтрона ядром ^{22}Na. Энергия отрыва нейтрона от ядра ^{23}Na равна энергии связи нейтрона с ядром ^{22}Na *($E=E_{св}$).*

Выразив энергию связи нейтрона через дефект массы системы, получим

$E = E_{св} = c^2\Delta m = c2(m_{22Na} + m_n - M_{23Na}$

При подстановке числовых значений заменяем массы ядер массами нейтральных атомов. Так как число электронов в оболочках атомов ^{23}Na и ^{22}Na одинаково, то разность масс атомов ^{23}Na и ^{22}Na от такой замены не изменится:

E == 931,4 МэВ/а. е. м. * 0,01334 а. е. м. = 12,42 МэВ.

После округления

E = 12,4 МэВ.

Пример 4. Определить начальную активность A_0 радиоактивного магния ^{27}Mg массой m=0,2 мкг, а также активность *A* по истечении времени t=1 ч. Предполагается, что все атомы изотопа радиоактивны.

Решение. Начальная активность изотопа

$A_0 = \lambda N_0$ (1)

где λ — постоянная радиоактивного распада; N_0— количество атомов изотопа в начальный момент (t=0).

Если учесть, что

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

$$N_0 = \frac{m}{M} N_A$$

то формула (1) примет вид

$$A_0 = \frac{mN_A}{MT_{1/2}} \ln 2$$

Выразим входящие в эту формулу величины в СИ и произведем вычисления:

$A_0 = 5{,}15 \cdot 10^{12}$ Бк=5,15ТБк.

Активность изотопа уменьшается со временем по закону

$A = A_0\, e^{-\lambda t}$ (3)

Заменив в формуле (3) постоянную распада λ ее выражением, получим

$A = A_0\, e^{-\ln 2 * t/T_{1/2}} = A_0\, (e^{\ln 2})^{-t/T_{1/2}}$

Так как $e^{\ln 2} = 2$ окончательно будем иметь

$A = A_0 / 2^{t/T_{1/2}}$

Сделав подстановку числовых значений, получим
$A=8{,}05\cdot10^{10}$ Бк=80,5 ГБк .

Пример 2. При определении периода полураспада $T_{1/2}$ короткоживущего радиоактивного изотопа использован счетчик импульсов. За время Δt = 1 мин в начале наблюдения *(t=0)* было насчитано $\Delta n_1=250$ импульсов, а по истечении времени t=1 ч— $\Delta n_2=92$ импульса. Определить постоянную радиоактивного распада λ и период полураспада $T_{1/2}$ изотопа.

Решение. Число импульсов Δn, регистрируемых счетчиком за время Δt, пропорционально числу распавшихся атомов ΔN.

Таким образом, при первом измерении

$$\Delta n_1=k\Delta N_1=kN_1(1-e^{-\lambda\Delta t}), \qquad (1)$$

где N_1— количество радиоактивных атомов к моменту начала отсчета; k — коэффициент пропорциональности (постоянный для данного прибора и данного расположения прибора относительно радиоактивного изотопа).

При повторном измерении (предполагается, что расположение приборов осталось прежним)

$$\Delta n_2=k\Delta N_2=kN_2(1-e^{-\lambda\Delta t}), \qquad (2)$$

где N_2— количество радиоактивных атомов к моменту начала второго измерения.

Разделив соотношение (1) на выражение (2) и приняв во внимание, что по условию задачи Δt одинаково в обоих случаях, а также что N_1 и N_2. связаны между собой соотношением $N_2 = N_1 e^{-\lambda t}$, получим

$$\Delta n_1/\Delta n_2=e^{\lambda t} \qquad (3)$$

где t — время, прошедшее от первого до второго измерения. Для вычисления λ выражение (3) следует прологарифмировать: $\ln(\Delta n_1/\Delta n_2)=\lambda t$, откуда

$$\lambda = (1/t)\cdot\ln(\Delta n_1/\Delta n_2).$$

Подставив числовые данные, получим постоянную радиоактивного распада, а затем и период полураспада:

$\lambda = (1/1)\cdot\ln(250/92)ч^{-1} = 1ч^{-1}$;

$T_{1/2} = \ln2/\lambda = 0{,}693/1 = 0{,}693ч = 41{,}5$ мин.

Задачи для самостоятельного решения

200. Из 10^{10} атомов радиоактивного изотопа с периодом полураспада 20 мин, через 40 минут не испытают превращение примерно

Ответ: 1) $2,5\cdot10^9$ атомов; 2) $2,5\cdot10^5$ атомов; 3) $5\cdot10^5$ атомов 4) $7,5\cdot10^9$ атомов.

201. Период полураспада $T_{1/2}$ радиоактивного нуклида равен 1ч. Определить среднюю продолжительность т жизни этого нуклида.

Ответ: *1) 1,44 года; 2) 2 года; 3) 0,5 года; 4) 15 мин.*

202. При распаде радиоактивного полония ^{210}Po в течение времени t= 1ч образовался гелий ^4He, который при нормальных условиях занял объем V=89,5 см^3. Определить период полураспада $T_{1/2}$ полония.

Ответ: 1) 138 сут.; 2) 50 сут.; 3) 16 сут.; 4) 105 сут.

203. За время t=1сут активность изотопа уменьшилась от A_1=118 ГБк до A_2=7,4 ГБк. Определить период полураспада $T_{1/2}$ этого нуклида.

Ответ: 1) 6 ч.; 2) 2 ч.; 3) 4 ч.; 4) 0,5 ч.

204. Определить активность А фосфора ^{32}P массой m=1 мг.

Ответ: *1) 10,5 ТБк; 2) 10,5 Бк 3) 8 ТБк; 4) 11 Бк.*

205. Определить массу m_2 радона ^{222}Rn, находящегося в радиоактивном равновесии с радием ^{226}Ra массой m_1=l г.

Ответ: *1) 5мкг 2) 6,33 мкг 3) 7,5 мкг 4) 5,46 мкг*

206. Определить удельную энергию связи $E_{уд}$ ядра $^{12}_{6}C$.

Ответ: *1) 7,46 МэВ/нуклон; 2) 7,68 МэВ/нуклон; 3) 6,7 МэВ/нуклон; 4) 6,9 МэВ/нуклон.*

207. Какую наименьшую энергию *E* нужно затратить, чтобы оторвать один нейтрон от ядра азота $^{14}_{7}N$

Ответ: *1) 10,2 МэВ; 2) 10,6 МэВ; 3) 9,8 МэВ; 4) 9,4 МэВ*

Список рекомендуемой литературы

1. Савельев, И. В. Курс физики : учебное пособие. // И. В. Савельев. – 3-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2007. Т. 2: Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. – 480 с.

2. Савельев, И. В. Курс физики : учебное пособие. // И. В. Савельев. – 2-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2006. Т. 3: Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц. – 320 с.

3. Трофимова, Т. И. Курс физики : учебное пособие / Т. И. Трофимова. - 21-е изд., стер. - Москва: Академия, 2015. - 560 с. – Текст: непосредственный.

4. Чертов, А. Г. Задачник по физике [Текст]: учебное пособие / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. - 7-е изд., перераб. и доп. – М: Физико-математической литературы, 2003. - 640 с.

5. Физика: постоянный ток, электромагнетизм, волновая оптика [Электронный ресурс]: практикум: учебное пособие / В. И. Барсуков, О. С. Дмитриев, В. Е. Иванов, Ю. П. Ляшенко. - Тамбов: ТГТУ, 2014. – 104 с. - Режим доступа : http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=277918