МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
________ О.Г. Локтионова
«28» 12 2018г.

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания
к выполнению практических заданий
по дисциплине «Дифференциальные и разностные уравнения»
для направления подготовки 02.03.03

Курск 2018

УДК 517.95

Составители: Н.А. Хохлов, Н.А. Конорева

Рецензент
Доктор физико-математических наук, профессор А.П.Кузьменко

**Дифференциальные и разностные уравнения**: методические указания к выполнению практических заданий по дисциплине «Дифференциальные и разностные уравнения» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Н.А. Хохлов, Н.А. Конорева. – Курск, 2018. – 10 с.

Излагаются методические рекомендации по выполнению практических заданий. Содержатся краткие описания применяемых при решении дифференциальные и разностные уравнения методов, задания и вопросы для контроля знаний.

Методические указания соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования и учебного плана направления подготовки 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем». Материал предназначен для бакалавров направления подготовки 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», а также будет полезен студентам всех других направлений подготовки, изучающих дисциплину «Дифференциальные и разностные уравнения».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 15.12.18 . Формат 60 х 84 1/16.
Усл. печ. л. 0,58. Уч.-изд. л. 0,53. Тираж 30 экз. Заказ 3033. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

**Цель работ**: освоить методики решения дифференциальных и разностных уравнений.

ТЕМЫ

| № п/п | Раздел (тема) дисциплины | Содержание |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | Классификация дифференциальных уравнений (ДУ). ДУ первого порядка. | Общая классификация дифференциальных уравнений. Общее и частное решение. Классификация обыкновенных ДУ первого порядка. ДУ с разделяющимися переменными, однородные, приводимые к однородным, линейные уравнения. |
| 2 | ДУ высшего порядка. | Уравнения, допускающие понижение порядка. Линейные однородные уравнения. Линейные неоднородные уравнения |
| 3 | Системы ДУ. | Системы ДУ. Устойчивость решений ДУ. Методы решений систем ДУ. |
| 4 | Разностные уравнения (РУ). | Классификация РУ. Приведение ДУ и систем ДУ к РУ и системам РУ. Методы решения РУ и их систем. |

## Тема 1.

**Задание 1**. Найти общий интеграл дифференциального уравнения (параметры a, b и k задаются преподавателем).

$$\left(k+\bullet^{a\bullet}\right)\cdot\bullet\bullet'=\bullet^{b\bullet}.$$

**Решение для** *a= b=k=1*

. $y'=\dfrac{dy}{dx}$, поэтому исходное дифференциальное уравнение примет вид:

$\left(1+\bullet^{\bullet}\right)\cdot\bullet\dfrac{dy}{dx}=e^{x}$ или $\left(1+e^{x}\right)ydy=e^{x}dx$. В соответствии с (4) получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\left(1+e^{x}\right)ydy-e^{x}dx=0.$$

Обе части полученного уравнения разделим на множитель $\left(1+e^{x}\right)\neq 0$ для $\forall\ \bullet \in (-\infty;\infty)$: $ydy-\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}dx=0$.

На основании равенства (6) имеем:

$$\int ydy-\int\frac{e^x}{1+e^x}dx=C \quad (7)$$

Так как $\int\frac{e^x}{1+e^x}dx=\int\frac{d(1+e^x)}{1+e^x}=\ln(1+e^x)+C$, то из равенства (7) получаем общий интеграл дифференциального уравнения: $\frac{y^2}{2}-\ln(1+e^x)=C$.

**Ответ:** $\frac{y^2}{2}-\ln(1+e^x)=C$.

**Задание 2.** $20bxdx-3aydy=3(k+1)x^2ydy-5(a-k)xy^2dx\cdot$

**Решение для** *a= b=1, k=0***.** Объединим члены, содержащие *dx* и *dy*:

$$\left(20x+5xy^2\right)dx-\left(3y+3x^2y\right)dy=0,$$

$$5x\left(4+y^2\right)dx-3y\left(1+x^2\right)dy=0.$$

Разделив обе части полученного уравнения на произведение $\left(1+x^2\right)\left(4+y^2\right)\neq 0$, сведем его к представлению (5): $\frac{5x}{1+x^2}dx-\frac{3ydy}{4+y^2}=0$;

$\int\frac{5xdx}{1+x^2}-\int\frac{3ydy}{4+y^2}=\frac{1}{2}\ln C$, • >0;

$\frac{5}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}-\frac{3}{2}\int\frac{d\left(4+y^2\right)}{4+y^2}=\frac{1}{2}\ln C$.

Применяя формулу $\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C$, получаем:

$\frac{5}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{3}{2}\ln\left(4+y^2\right)=\frac{1}{2}\ln C$,

$5\ln\left(1+x^2\right)-3\ln\left(4+y^2\right)=\ln C$,

$\ln(1+x^2)^5-\ln(4+y^2)^3=\ln C$,

$\ln\frac{(1+x^2)^5}{(4+y^2)^3}=\ln C$, $\frac{(1+x^2)^5}{(4+y^2)^3}=C$.

**Ответ:** $\frac{(1+x^2)^5}{(4+y^2)^3}=C$.

**Задание 3.** $ay'=y\cdot tgbx$.

**Решение для** *a*= *b*=*k*=*1***.** Разделим переменные и проинтегрируем: $\frac{dy}{dx}=y\cdot tgx$,

$\frac{dy}{y}=tgx\cdot dx$, $y\neq 0$, $\int\frac{dy}{y}=\int tgx\cdot dx$, $\ln|y|=-\ln|\cos x|+C_1$ или $\ln|y\cdot\cos x|=C_1$.

Для удобства логарифмирования положим $C_1=\ln|C_2|$, где $C_2\neq 0$, а $C_1$ принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда $\ln|y\cdot\cos x|=\ln|C_2|$ и потенцирование приводит к общему решению $|y\cos x|=|C_2| \Rightarrow y=\pm C_2\sec x \Rightarrow y=C_3\sec x$. Очевидно, исходное уравнение имеет также решение • =0, которое в общее решение не входит в связи с тем, что $C_2\neq 0 \Rightarrow C_3\neq 0$. Если ввести новый параметр *C* так, чтобы он принимал и нулевое решение, то решение $y=0$ будет содержаться в общем $y=C\cdot\sec x$.

**Ответ:** $y=C\cdot\sec x$.

## Тема 2.

**Задача 1.** Решить дифференциальные уравнения.

$ay''=3bx^2+5k\sin(7ax)$

**Решение для** *a*= *b*=*k*=*1***.** Интегрируя по переменной *x,*

найдем $y'=\int(3x^2+5\sin 7x)dx=$

$$=3\int x^2dx+5\int\sin 7xdx=3\frac{x^3}{3}-\frac{5}{7}\cos 7x+C_1.$$

Итак, $y'=x^3-\frac{5}{7}\cos 7x+C_1$.

Снова интегрируя, получим, что

$$y=\int\left(x^3-\frac{5}{7}\cos 7x+C_1\right)dx=\int x^4dx-\frac{5}{7}\int\cos 7xdx+\quad+C_1\int xdx.$$

Окончательно $y=\frac{1}{5}x^5-\frac{5}{49}\sin 7x+C_1x+C_2$.

**Ответ:** $y=\frac{1}{5}x^5-\frac{5}{49}\sin 7x+C_1x+C_2$.

**Задача 2.** $ay''=2b+3k/\sin^2 ax$

**Решение для** *a= b=k=1***.** Аналогично решению предыдущего задания, получим:

$$y'=\int\left(2+\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx=2\int dx+3\int\frac{dx}{\sin^2 x}\Rightarrow y'=2x-3ctgx+C_1.$$

Тогда искомое общее решение

$$y=\int\left(2x-3ctgx+C_1\right)dx=2\int xdx-3\int\frac{\cos x}{\sin x}dx+C_1\int dx=$$

$$=2\frac{x^2}{2}-3\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}+C_1x=x^2-3\ln\left|\sin x\right|+C_1x+C_2.$$

**Ответ:** $y=x^2-3\ln\left|\sin x\right|+C_1x+C_2$.

**Задача 3.** Решить дифференциальные уравнения.

$ay''tg(bx)=ky'$

**Решение для** *a= b=k=1***.** Задано уравнение второго порядка, в котором явно отсутствует *y*. Введем подстановку •′=z. Тогда •″=z′ и исходное уравнение принимает вид: $z'tgx-z=0\Rightarrow\frac{dz}{dx}\cdot tgx=z$, $tgxdz=zdx$. Получим уравнение с разделяющимися переменными. Рассмотрим два случая:

1) $z=0\Rightarrow y'=0$, *y*=• – решение исходного уравнения, которое не является общим решением, так как зависит только от одной произвольной постоянной;
2) $z\neq 0$. В уравнении $tgxdz=zdx$ разделим переменные:

$\frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{tgx}$.

Тогда $\int \frac{dz}{z} = \int \frac{\cos x dx}{\sin x}$,

$\ln|z| = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$,

$\ln|z| = \ln|\sin x| + \ln C, C > 0$,

$|z| = C|\sin x|$, $z = \pm C \cdot \sin x$.

Обозначим $\pm C = C_1$ и тогда $z = C_1 \sin x$.

Так как z=• ′, то $y' = C_1 \sin x$, $dy = C_1 \sin x dx$, $\int dy = C_1 \int \sin x dx$,

$y = -C_1 \cos x + C_2$.

Заметим, что решение $y=C$ получается из общего, если положить $C_2 = C$,

$C_1 = 0$.

**Ответ:** $y = C_2 - C_1 \cos x$.

## Тема 3.
## Задания по работам

1. По условию задачи (задаются преподавателем) составить дифференциальное уравнение (ДУ) или систему ДУ [1,2,3].
2. Классифицировать ДУ (или систему ДУ).
3. Решить ДУ (или систему ДУ).
4. Составить схему численного решения ДУ (или системы ДУ) методом конечных разностей.

Составить отчет по работе, содержащий
- задание и цель работы,
- решение,
- выводы.

## Теория

Уравнение составляется в соответствии с установленным законом или моделью рассматриваемого явления. Например, взаимодействие двух биологических видов в изолированной области, когда первый вид (жертва) обеспечен всем необходимым для жизни, а второй (хищник) находится в той же области и может питаться лишь особями жертвы может быть описано моделью Лотки-Вольтерра:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - \gamma xy \\ \dfrac{dy}{dt} = -\beta y + \mu xy, \end{cases} \tag{1}$$

где коэффициенты $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ определяются условиями жизни жертв и хищников соответственно. При отсутствии хищников число жертв экспоненциально по времени растет, а при отсутствии жертв число хищников экспоненциально падает, что отражено знаком первых слагаемых в правых частях уравнений (1). Вторые слагаемые моделируют взаимодействие видов. Предполагается, что жертвы погибают, а хищники размножаются со скоростями пропорциональными числу встреч жертв и хищников, которое в свою очередь пропорционально численностям обоих популяций, т.е. $\gamma > 0$ и $\mu > 0$ некоторые коэффициенты. В общем случае такая задача аналитически не решается. В случае малых отклонений от стационарного состояния, задача решается в следующем порядке. Определим стационарное состояние $(x_0, y_0)$ из условий:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = \alpha x_0 - \gamma x_0 y_0 = 0 \\ \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = -\beta y_0 + \mu x_0 y_0 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Тогда $x_0 = \dfrac{\beta}{\delta}$ и $y_0 = \dfrac{\alpha}{\gamma}$. Условие малости отклонений $(x, y) \approx (x_0, y_0)$, запишем в виде

$$(x, y) = (x_0 + x_1, y_0 + y_1), \tag{3}$$

где $|x_1| \ll |x_0|$ и $|y_1| \ll |y_0|$. Подставим (3) в (1), пренебрегая слагаемыми с $x_1 y_1$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \alpha(x_0 + x_1) - \gamma x_0 y_0 - \gamma x_1 y_0 - \gamma x_0 y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dt} = -\beta(y_0 + y_1) + \mu x_0 y_0 + \mu x_1 y_0 + \mu x_0 y_1. \end{cases} \tag{4}$$

Таким образом, для отклонений мы получили систему линейных неоднородных ДУ первого порядка с постоянными коэффициентами.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -a y_1 + b \\ \dfrac{dy_1}{dt} = f x_1 - r y_1 + e, \end{cases} \tag{5}$$

где $a = \alpha - \gamma y_0 =$,

## Тема 4.

Задано уравнение

$$a_0 y_{k+1} + a_1 y_k + a_2 y_{k-1} = 0$$

.

Заданы начальные условия: $y_0, y_1$. Его характеристическое уравнение:

$$a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0.$$

Отсюда $$z_{1,2} = \frac{-a_1 +- \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}$$ .

Тогда решение (проверяется подстановкой):

$y_k = C_1 z_1^k + C_2 z_2^k$. (8)

Значения констант определяем из начальных условий:

$$y_0 = C_1 z_1^0 + C_2 z_2^0$$
$$y_1 = C_1 z_1^1 + C_2 z_2^1.$$

Подставив в последнее уравнение значения начальных условий и вычисленные в значения корней характеристического уравнения, и решив систему из двух линейных алгебраических уравнений, получим значения констант С.

**Задача**. Задано разностное уравнение второго порядка $3ay_{k+1} + 5by_k + 8cy_{k+1} = 0$

с начальными условиями $y_0 = 1,\ y_1 = -d,$

Решить его и вычислить первые пять значений у (коэффициенты *a, b, c, d* задаются преподавателем).

**Контрольные вопросы**

Дайте определения и примеры:
1. ДУ с разделяющимися переменными
2. однородного ДУ
3. линейные ДУ 1-го порядка
4. уравнение Бернулли
5. ДУ второго порядка допускающего понижение порядка

6. линейного однородного ДУ
7. линейные неоднородного ДУ
8. Метод вариации произвольных постоянных для линейного неоднородного ДУ 2-го порядка
9. линейного ДУ с постоянными коэффициентами
10. устойчивости динамической системы.
11. линейного разностного уравнения
12. конечно-разностной схемы

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Коврижных А. Ю., Коврижных О. О. Дифференциальные и разностные уравнения / А.Ю. Коврижных, О.О. Коврижных – Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2014. - 150 с. Режим доступа - http://biblioclub.ru/
2. Литвин Д. Б., Мелешко С. В., Мамаев И. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / Д.Б. Литвин, С.В. Мелешко, И.И. Мамаев - Ставрополь: Ставропольский государственный аграрный университет, 2017. - 76 с. Режим доступа - http://biblioclub.ru/
3. Балабко Л. В., Томилова А. В. Численные методы: учебное пособие / Л.В. Балабко, А.В. Томилова – Архангельск : САФУ, 2014. - 163 с. Режим доступа - http://biblioclub.ru/
4. Пономаренко А. К., Сахаров В. Ю., Черняев П. К. Индивидуальные задания по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учебное пособие / А.К. Пономаренко, В.Ю. Сахаров, П.К. Черняев Санкт-Петербург : Издательство Санкт-Петербургского Государственного Университета, 2016. - 48 с. Режим доступа - http://biblioclub.ru/