

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич
Должность: ректор
Дата подписания: 07.06.2022 09:54:51
Уникальный программный ключ:
9ba7d3e34c012eba476ffd2d064cf2781853be730df2374d16f3c0ce536ff0c6

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра уникальных зданий и сооружений



НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Нелинейные задачи строительной механики»
для студентов специальности 08.05.01
Строительство уникальных зданий и сооружений

Курск 2017

УДК 624.04

Составитель: С.Ю. Савин

Рецензент

Доктор технических наук, профессор *В.И. Колчунов*

Нелинейные задачи строительной механики.

Методические рекомендации к практическим занятиям по дисциплине «Нелинейные задачи строительной механики» для студентов специальности 08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений / Юго-Зап. гос. ун-т; С.Ю. Савин. - Курск, 2017. - 17 с. - Библиогр.: С. 17.

Изложены основные сведения, необходимые для расчета строительных конструкций с учетом двух типов нелинейности: геометрической и физической.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утвержденной учебно-методическим объединением по специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 15.12.2017 . Формат 60x84 1/16.

Усл. печ. л. 0,99 . Уч.-изд.л. 0,89 . Тираж 100 экз. Заказ. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, г. Курск, ул. 50лет Октября, 94.

ВВЕДЕНИЕ

При изучении дисциплины «Нелинейные задачи строительной механики» студенты должны выполнить два задания. В первом задании необходимо определить прогибы и внутренние усилия в прямоугольной гибкой пластине под воздействием поперечной нагрузки, равномерно распределенной на ограниченной области. Во втором задании нужно решить задачу с определением предельной нагрузки, действующей на плоскую раму. Исходные данные для выполнения расчетно-графических работ приведены в приложениях.

1. ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ГИБКОЙ ПЛАСТИНЫ

1.1. Деформации

В случае, когда прогиб пластины превышает $1/5 \dots 1/2$ ее толщины, такую пластину следует рассматривать как гибкую, в которой вместе с изгибными возникают цепные (мембранные) напряжения, равномерно распределенные по ее толщине e . Им соответствуют деформации срединной поверхности S_0, y .

В теории гибких пластин учитываются две гипотезы: гипотеза прямой нормали и гипотеза о ненадавливании горизонтальных слоев. Деформации срединной поверхности, принимая перемещения u и v малыми, прогиб w конечным, сопоставимым с толщиной δ пластины, определим, исходя из рис.1, на котором показаны волокна AB, AC , расположенные на срединной поверхности до деформации параллельно координатным осям. После деформации они перемещаются в новое положение A_1B_1, A_1C_1 , их длины dX, dY и угол α между ними изменились:

$$\begin{aligned} dX &= dx + Adx = (1 + \varepsilon_x) dx; \quad dY = dy + Ady = (1 + \varepsilon_y) dy. \\ \alpha &= \angle B_1A_1C_1 = 90^\circ - \gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

где γ - угол сдвига, угол отклонения от прямого угла между рассматриваемыми волокнами после деформации.

На рис. 1 штриховыми линиями показаны проекции на оси координат векторов $\overline{A_1B_1}, \overline{A_1C_1}$, представленных в компонентах:

$$\begin{aligned} \overline{A_1B_1} = \mathbf{p} &= \begin{pmatrix} dx + \partial_x u \\ \partial_x v \\ \partial_x w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial x \\ \partial w / \partial x \end{pmatrix} dx; \\ \overline{A_1C_1} = \mathbf{q} &= \begin{pmatrix} \partial_y u \\ dy + \partial_y v \\ \partial_y w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial u / \partial y \\ 1 + \partial v / \partial y \\ \partial w / \partial y \end{pmatrix} dy. \end{aligned} \quad (2)$$

Из (1) можно получить квадраты длин dX dY :

$$\begin{aligned}(dX)^2 &= (dx + \Delta dx)^2 = (dx)^2 \left[1 + 2\varepsilon_x \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_x\right)\right]; \\(dY)^2 &= (dy + \Delta dy)^2 = (dy)^2 \left[1 + 2\varepsilon_y \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_y\right)\right].\end{aligned}\tag{3}$$

Из (2) получим квадраты длин dX , dY :

$$\begin{aligned}(dX)^2 &= (dx)^2 \left\{ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right\} = \\&= (dx)^2 \left\{ 1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right\}; \\(dY)^2 &= (dy)^2 \left\{ \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right\} = \\&= (dy)^2 \left\{ 1 + 2\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right\}.\end{aligned}\tag{4}$$

Скалярное произведение векторов $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_1C_1}$:

$$\begin{aligned}\overline{A_1B_1} \cdot \overline{A_1C_1} &= A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cos \alpha = \mathbf{p}^T \mathbf{q} = \\&= (dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx) \left(\frac{\partial u}{\partial y} dy\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right) (dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} dy\right).\end{aligned}\tag{5}$$

Из (3) найдем длины dX , dY (приближенно):

$$dX = \left[1 + \varepsilon_x \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_x\right)\right] dx; \quad dY = \left[1 + \varepsilon_y \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_y\right)\right] dy.\tag{6}$$

Теперь, приравнивая правые части первых формул (3) и (4), а затем и вторых, после несложных сокращений получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_x \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_x\right) &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right\}; \\ \varepsilon_y \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_y\right) &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right\}.\end{aligned}$$

Подставляя длины dX , dY (6) взамен A_1B_1 , A_1C_1 в равенство (5), можно получить

$$\varepsilon_x \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon_x\right) \varepsilon_y \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon_y\right) \cos \alpha = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

Полагая, что относительные линейные деформации в срединной плоскости малы ($\varepsilon_x \ll 1$, $\varepsilon_y \ll 1$), а прогиб w значительно больше продольных перемещений u , v , выражения в скобках в левых частях формул (7) и (8) можно принять равными единице, а в скобках правых частей оставить только производные от w . В результате получим деформации в срединной плоскости:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \quad \gamma^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (9)$$

Эти деформации удовлетворяют условию совместности:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma^0}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (10)$$

Кривизны и кручение срединной поверхности, как и в жесткой пластине:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \kappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (11)$$

Деформации в точке с координатой z определяются деформациями срединной поверхности и изгибом пластины:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z; \quad \gamma = \gamma^0 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z. \quad (12)$$

1.2. Уравнения равновесия

Для составления уравнений равновесия на рис.2 показан элемент пластинки с размерами в плане dx, dy в деформированном состоянии с действующими на его гранях внутренними усилиями и внешней нагрузкой на поверхности.

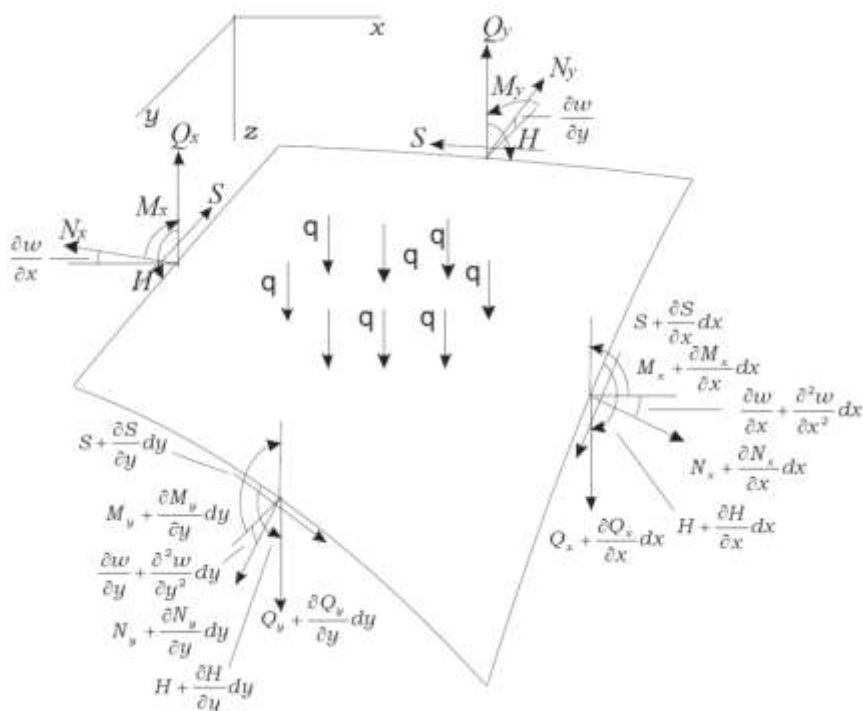


Рис. 2

Спроецировав все силы сначала на ось x :

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy - N_x dy + \left(S + \frac{\partial S}{\partial y} dy \right) dx - S dx = 0,$$

получим после несложных сокращения первое уравнение равновесия:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0; \quad (13)$$

а затем, проектируя все силы на ось y , получим аналогично второе:

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0. \quad (14)$$

Третье уравнение равновесия - сумма проекции всех сил на ось z - составим последовательно. Сначала сложим проекции поперечных сил на ось z :

$$\begin{aligned} -Q_x dy + (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx) dy - Q_y dx + (Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy) dx = \\ = \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned}$$

затем продольных сил

$$\begin{aligned} -N_x dy \frac{\partial w}{\partial x} + (N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy - \\ -N_y dx \frac{\partial w}{\partial y} + (N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right) dx = \\ = \left[N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \end{aligned}$$

и сдвигающих сил:

$$\begin{aligned} -S \frac{\partial w}{\partial x} dx + (S + \frac{\partial S}{\partial y} dy) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy \right) dx - \\ -S \frac{\partial w}{\partial y} dy + (S + \frac{\partial S}{\partial x} dx) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \right) dy = \\ = \left[S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy. \end{aligned}$$

Теперь сложим эти три суммы, исключив из них подчеркнутые слагаемые согласно равенствам (13) и (14), и

добавим внешнюю нагрузку q . После преобразований получим уравнение равновесия:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -q. \quad (15)$$

Уравнения равновесия, связывающие изгибающие, крутящие моменты и поперечные силы, имеют вид

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_x; \quad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y.$$

Подставим формулы (16) для поперечных сил Q_x , Q_y в уравнение (15), которое примет вид

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -q.$$

1.3. Физические уравнения

Согласно закону Гука деформации срединной поверхности определяем по внутренним усилиям:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{1}{E\delta} (N_x - \mu N_y); \quad \varepsilon_y^0 = \frac{1}{E\delta} (N_y - \mu N_x); \quad \gamma^0 = \frac{S}{G\delta}. \quad (18)$$

Изгибающие моменты определяем по функции прогибов:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right);$$

$$H = -(1 - \mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

1.4. Система разрешающих уравнений

Подставим деформации (18) в левую часть равенства (10) и моменты (19) в (17). В результате получим систему из двух

уравнений относительно четырех неизвестных функций: N_x , N_y , S и w . Если теперь усилия N_x , N_y , S выразить через функцию напряжений φ

$$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad S = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad (20)$$

где $\Phi = \delta\varphi$, то получим систему из двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно двух неизвестных функций w и Φ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{E\delta} \nabla^4 \Phi - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0; \\ D \nabla^4 w - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= q. \end{aligned} \quad (21)$$

Эти уравнения известны в теории упругости как уравнения Кармана. Искомые функции w и Φ должны удовлетворять еще и граничным условиям.

1.5 Граничные условия

Для прямоугольной пластины каждой кромке должны соответствовать граничные условия. Для жестко заземленной или шарнирно опертой кромки пластинки при различных ограничениях на напряжения и перемещения в срединной поверхности граничные условия аналогичны условиям для пологих оболочек.

Граничные условия накладываются на функцию прогибов:

- для жестко заземленной кромки:

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0;$$

- для шарнирно опертой кромки:

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Функция напряжений Φ должна удовлетворять указанным ниже граничным условиям.

Если точки кромки, параллельной оси y , свободно смещаются

вдоль оси x , то $\sigma_x = 0$ или $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0$; если же - вдоль оси y , то

$\tau_{xy} = 0$ или $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0$. Если точки кромки закреплены от перемещений в направлении оси x , то $u = 0$, а в направлении оси y , то $v = 0$.

1.6. Метод последовательных приближений

Применение метода последовательных приближений рассмотрим в задаче об изгибе прямоугольной пластины под воздействием на ограниченном прямоугольном участке равномерно распределенной нагрузки.

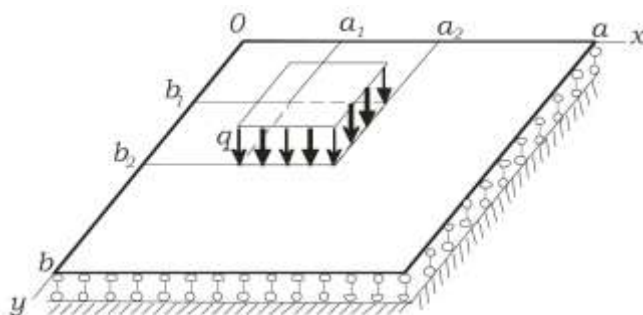


Рисунок 3

Пластина опирается своими кромками на абсолютно жесткие в своей плоскости диафрагмы и абсолютно гибкие из нее, чему соответствуют граничные условия (рис. 3):

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad N_x = 0; \quad v = 0 \quad (x = 0, \quad x = a);$$

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad N_y = 0; \quad u = 0 \quad (y = 0, \quad y = b).$$

Нагрузка $q = \text{const}$ действует при $a_1 < x < a_2$ и $b_1 < y < b_2$. Решение системы уравнений (13) ищем в двойных тригонометрических рядах:

$$w = \sum_{m,n} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad \Phi = \sum_{i,j} \varphi_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}. \quad (22)$$

Подстановка этих рядов в уравнения (21) с умножением первого уравнения в (21) на $\sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}$, второго на $\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ с последующим интегрированием по поверхности пластинки, согласно методу Бубнова-Галеркина, приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов w_{mn} , φ_{ij} :

$$\frac{1}{E\delta} \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2 \varphi_{ij} - \frac{4}{\pi^2 a^2 b^2} \bar{w}^T A_{ij} \bar{w} = 0 \quad (i=1\dots I; j=1\dots J);$$

$$D \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2 w_{mn} - \frac{4}{\pi^2 a^2 b^2} \bar{\varphi}^T B_{mn} \bar{w} = \frac{4q}{\pi^6} q_m q_n \quad (23)$$

$$(m=1\dots M; n=1\dots N), \quad (24)$$

где

$$q_m = \frac{2}{m} \sin m\pi\alpha_0 \sin m\pi\alpha_c; \quad q_n = \frac{2}{n} \sin n\pi\beta_0 \sin n\pi\beta_c; \quad \alpha_0 = \frac{a_1 + a_2}{2a};$$

$$\beta_0 = \frac{b_1 + b_2}{2b}, \quad \alpha_c = \frac{a_2 - a_1}{2a}, \quad \beta_c = \frac{b_2 - b_1}{2b}.$$

Векторы (матрицы-столбцы) w , p содержат в качестве своих элементов в определенном порядке коэффициенты рядов (22). Матрица A_j - квадратная, содержит $M \cdot N$ строк и столько же столбцов. Матрица B_{mn} - прямоугольная, имеет $I \cdot J$ строк и $M \cdot$

N столбцов. Элемент матрицы A_j на пересечении строки с номером $k = (m - 1) \cdot N + n$ и столбца с номером $k_1 = (m_1 - 1) \cdot N + n_1$ вычисляется так:

$$A_{ij}(k, k_1) = mnC(m, m_1, i)C(n, n_1, j)m_1n_1 - m^2S(m, m_1, i)S(n, n_1, j)n_1^2.$$

Элемент матрицы B_{mn} (индексами $k = (i - 1) \cdot I + j$, $k_1 = (m_1 - 1) \cdot N + n_1$):

$$B_{mn}(k, k_1) = j^2S(i, m_1, m)S(j, n_1, n)m_1^2 - 2ijC(i, m_1, m)C(j, n_1, n)m_1n_1 + i^2S(i, m_1, m)S(j, n_1, n)n_1^2.$$

В (25) и (26) обозначены определенные интегралы:

$$C(i, j, k) = \int_0^\pi \cos i\alpha \cos j\alpha \sin k\alpha d\alpha = \frac{2k(i^2 + j^2 - k^2)}{4i^2j^2 - (i^2 + j^2 - k^2)^2} \\ (i + j + k \neq 2m; m = 1, 2, 3, \dots); \quad (27)$$

$$S(i, j, k) = \int_0^\pi \sin i\alpha \sin j\alpha \sin k\alpha d\alpha = \frac{4ijk}{4i^2j^2 - (i^2 + j^2 - k^2)^2} \\ (i + j + k \neq 2m; m = 1, 2, 3, \dots). \quad (28)$$

Если сумма индексов $i + j + k$ равна четному числу или нулю, интегралы в (27) и (28) равны нулю.

Систему уравнений (23), (24) можно решать последовательными приближениями в следующем порядке:

Шаг 1. Сначала векторы w , φ принимаем равными нулю и решаем уравнения (24) с определением всех компонентов w_{mn} вектора w как для жесткой пластинки.

Шаг 2. Полученный вектор w подставляется в уравнение (23) и вычисляется каждый компонент φ_{ij} вектора φ , при этом матрица

A_{ij} , соответствующая φ_u , должна быть уже подготовлена.

Шаг 3. Теперь векторы w , φ , найденные в первом

приближении, подставляются в уравнения (24) с заранее подготовленными матрицами B_{mn} , затем вычисляются элементы w_{mn} и из них формируется обновленный вектор w .

Шаг 4. Процесс повторяется, начиная с шага 2, или заканчивается, если разница между векторами w , φ вычисленными на текущем шаге и предыдущем, составляет малую долю от длины вектора w , φ

После завершения процесса последовательных приближений компоненты w_{mn} , φ векторов w , φ оказываются известными и используются в двойных тригонометрических рядах (22), аппроксимирующих функцию прогибов w и Функцию напряжений Φ . Эти уже известные функции в дальнейшем используются для вычисления прогибов, изгибающих моментов (19) продольных сил (20) в конкретных сечениях пластинки.

2. ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ РАМЫ

2.1. Постановка задачи

Пусть статически неопределимая рама загружена сложной нагрузкой. Каждый компонент этой нагрузки пропорционален параметру F . Требуется определить предельное значение F_{mp} нагрузки, при которой произойдет разрушение рамы. Представим себе поведение рамы при постепенном увеличении нагрузки. Сначала элементы рамы деформируются в упругой стадии. При достижении параметром F некоторого характерного значения, равного F_1 , в одном из сечений в крайних волокнах напряжения достигнут предела текучести σ_T . При дальнейшем увеличении нагрузки область с напряжениями текучести будет расширяться и, наконец, достигнет нейтральной оси. В сжатой и растянутой зонах сечения напряжения равны σ_T . При дальнейшем росте нагрузки в этом сечении напряжения не растут, так как здесь образовался пластический шарнир. Степень статической

неопределимости рамы снизилась на единицу. Если нагрузка продолжает расти, в другом характерном сечении напряжения могут достигнуть σ_T с образованием еще одного пластического шарнира и так далее. Когда пластических шарниров окажется столько, что рама окажется изменяемой (механизмом с одной степенью свободы), или мгновенно изменяемой, нагрузку называют предельной.

Пластические шарниры. В пластическом шарнире изгибающий момент равен

$$M_{\text{пр}} = \sigma_T W_{\text{пл}}, \quad (29)$$

где $W_{\text{пл}}$ - момент сопротивления сечения с пластическим шарниром. Если сечение прямоугольное матер и ал однородный и напряжения σ_T при сжатии и растяжении одинаковы, то

$$W_{\text{пл}} = bh^2 / 4.$$

В предельном состоянии плоская рама при наличии пластических шарниров становится механизмом с одной степенью свободы. Если в первоначальном состоянии рама была n раз статически неопределима, то для превращения ее в механизм должно образоваться пластических шарниров в количестве $n + 1$. В некоторых случаях рама в предельном состоянии может оказаться мгновенно изменяемой.

Принцип возможных перемещений: если система находится в состоянии равновесия, то сумма работ внешних и внутренних сил на возможных перемещениях равна нулю.

Для определения предельной нагрузки используются приближенные методы, в основу которых заложены статическая и кинематическая теоремы.

Статическая теорема: нагрузка, соответствующая статически возможному состоянию системы, меньше предельной нагрузки. При статически возможном состоянии системы выполняются уравнения равновесия. Для статически неопределимой системы статически возможных состояний может быть множество. Каждому такому равновесному состоянию соответствует своя нагрузка. Наибольшая из этих нагрузок

близка к предельной. Метод определения предельной нагрузки с рассмотрением статически возможных состояний назван статическим.

Кинематическая теорема: нагрузка, соответствующая кинематически возможному состоянию системы, больше предельной нагрузки. Кинематически возможные состояния согласуются с опорными связями. Таких кинематически возможных состояний бесконечное множество. Каждому из них соответствует нагрузка, которая не меньше предельной. Наименьшая из этих нагрузок наиболее близка к истинному значению предельной нагрузки. Метод определения предельной нагрузки с применением кинематической теоремы назван кинематическим.

Применение кинематического метода рассмотрим на трех примерах расчета предельной нагрузки для однопролетной рамы.

Литература

1. *Александров, А.В.* Основы теории упругости и пластичности : учеб. для строит. спец. вузов / А.В. Александров, В.Д.Потапов. - Изд. 2-е.- М. : Высш. шк., 2002. - 400 с. : ил.

2. *Александров, А.В.* Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы : учебник для вузов/ А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников ; под ред. А.Ф. Смирнова. - М. : Стройиздат, 1983.- 488 с. : ил.

3. Строительная механика : в 2 кн. Кн. 1. Статика упругих систем : учеб. для вузов/ В.Д. Потапов, А.В. Александров, С.Б. Косицын, Д.Б. Долотказин ; под ред. В. Д. Потапова. - М. : Высш.шк., 2007. - 511 с. : ил.

4. *Чирас, А.А.* Методы линейного программирования при расчете упругопластических систем / А.А. Чирас.- Л. : Стройиздат, 1969.

5. *Чирас, А.А.* Строительная механика. Теория и алгоритмы / А.А. Чирас. - М. : Стройиздат, 1989.

6. *Абовский, Н.П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек/ Н.П. Абовский, Н.П. Андреев, А.П. Деруга. М. Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978. - 288 с.

7. *Ржаницын, А.Р.* Строительная механика : учеб. пособие для строит. спец. вузов/ А.Р. Ржаницын.- 2-е изд., перераб.- М. : Высш. шк., 1991.- 439 с. : ил.

8. *Лурье, А.И.* Теория упругости / А.И. Лурье. - М. : Наука., 1970. - 940 с.

9. *Лурье, А.И.* Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье.- М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. - 512 с.

10. *Александров, А.В.* Основы теории упругости и пластичности : учеб. для строит. спец. вузов / А.В. Александров, В.Д.Потапов. - М. : Высш. шк., 1990. - 400 с. : ил.