113

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____________ О.Г. Локтионова
«30» 09 2021 г.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания к выполнению практических заданий
по дисциплине «Высшая математика»
для направления подготовки 39.03.01 Социология, направленность (профиль) Экономическая социология

Курск 2021

УДК 51

Составители Жилина К.В., Панина Е.А.

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент
кафедры высшей математики,
Е.В.Скрипкина

Высшая математика: методические указания к выполнению практических заданий по дисциплине «Высшая математика» для направления подготовки 39.03.01 «Социология»/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: К.В.Жилина, Е.А.Панина. – Курск, 2021. – 66 с.

В методических рекомендациях по выполнению практических заданий проводится описание применяемых при решении задач математики методов, задания и вопросы для контроля знаний.
Методические указания соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для направления подготовки 39.03.01 «Социология». Материал предназначен для студентов очной и заочной форм обучения по направлению подготовки 39.03.01 «Социология».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 30.09.21 . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л.3,6. Уч.-изд. л.3,1.Тираж 100 экз. Заказ 1144. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Содержание

Введение

Основной формой обучения студентов является самостоятельная работа с учебником и учебными пособиями. Поэтому каждый студент с самого начала занятий должен выработать для себя рациональную систему работы над курсом, постоянно практикуясь при этом в решении задач. В противном случае усвоение и практическое использование материала затруднены. Чрезвычайно важны систематические занятия.

Часто приходится слышать высказывания студентов о том, что теорию они знают, а решать задачи не умеют. Данная работа способствует развитию индивидуального творческого мышления, обеспечивает ритмическую работу студента при изучении разделов высшей математики. Каждый параграф начинается с краткого теоретического введения, приводятся основные определения, методы и способы решения задач. Рассмотрение решения типовых примеров и задач в параграфе, как правило, расположено по возрастающей трудности. Здесь же представлены индивидуальные задания. Для подготовки к защите представлен список контрольных вопросов.

Для выполнения заданий достаточно аккуратно записанных лекций и внимательного изучения методических рекомендаций, предложенных в данном учебном пособии. Кроме того, весь теоретический материал по данным темам хорошо представлен в учебных пособиях, указанных в списке литературы.

Структура заданий соответствует практическим занятиям курса

№	Наименование практического занятия	Практическая работа студента
1	2	4
1	Определители второго и третьего порядка. Решение систем по формулам Крамера. Матрицы. Обратная матрица. Решение систем методом Гаусса.	Практическая работа 1. Элементы линейной алгебры
2	Линейные операции над векторами. Скалярное произведение. Прямая на плоскости. Плоскость в пространстве.	Практическая работа 2 Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии

1	2	3
3	Техника дифференцирования	Практическая работа 3 Дифференциальное исчисление функции одной переменной
4	Исследование функций одной переменной методами дифференциального исчисления	
5	Первообразная. Неопределенный интеграл. Методы интегрирования. Интегрирование рациональных функций.	Практическая работа 4 Интегральное исчисление функции одной переменной
6	Приложения определённого интеграла	
7	Дифференцирование функций многих переменных. Градиент. Производная по направлению.	Практическая работа 5 Дифференциальное исчисление функции нескольких переменной
8	Исследование функций многих переменных средствами дифференциального исчисления	
9	Методы интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка	Практическая работа 6 Дифференциальные уравнения
10	Линейные дифференциальные уравнения второго и высших порядков	
11	Системы дифференциальных уравнений	
12	Числовые ряды	Практическая работа 7 Ряды
13	Степенные ряды	
14	Вычисление кратных интегралов	Практическая работа 8 Кратные и криволинейные интегралы
15	Криволинейные и поверхностные интегралы	

Практическая работа 1. Элементы линейной алгебры

Матрицей размера $m \times n$, где m – число строк, n – число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Сами числа называются **элементами матрицы**.

Матрицы обозначаются большими латинскими буквами: A, B, C, … . Элементы матрицы обозначаются символом a_{ij}, где i – номер строки, а j – номер столбца, на пересечении которых находится элемент:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если число строк матрицы равно числу столбцов и равно n, то матрица называется **квадратной порядка *n***.

Если число строк матрицы не равно числу столбцов, то матрица называются **прямоугольной.**

Суммой (разностью) двух матриц A и B размера $m \times n$ называется матрица C размера $m \times n$, элементы которой определяются равенствами:

Произведением матрицы A на число λ называется матрица C, у которой каждый элемент равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число λ

Произведением матрицы A размера $m \times n$ на матрицу B размера $n \times k$ называется матрица C размера $m \times k$, у которой элемент, стоящий на пересечении i-той строки и j-того столбца равен сумме произведений элементов i-той строки первого сомножителя на элементы j-того столбца второго сомножителя,

Матрица B наз. **транспонированной** к A и обозначается $B = A^t$, если строки матрицы B являются столбцами матрицы A с теми же номерами (а столбцы B – строками A).

Определителем 2-го порядка называется число, вычисляемое по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

то есть определитель 2-го порядка равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали минус произведение элементов, стоящих ан побочной диагонали.

Определителем 3-го порядка называется число, вычисляемое по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Пусть A − квадратная матрица, тогда квадратная матрица, обозначаемая символом A^{-1} и удовлетворяющая условиям:

$A \cdot A^{-1} = E, \quad A^{-1} \cdot A = E,$

называется матрицей, **обратной** матрицы A.

Систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

Числа a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ называются **коэффициентами** системы, а числа b_j называются **свободными членами.**

Решением системы называется совокупность чисел x_1, x_2, …, x_n, при подстановке которых в систему получаем верные равенства.

Система, имеющая решение, называется **совместной**.

Система, не имеющая решение, называется **несовместной**.

Если все свободные члены равны 0, то система называется **однородной**, в противном случае – **неоднородной**.

Методы решения СЛУ – метод Крамера, метод Гаусса, метод обратной матрицы.

Индивидуальные задания

Задание 1

Найти значение выражения $(n-10)\cdot A+B\cdot C$**,** если n нечетно, и значение выражения $C\cdot B-(n-10)\cdot A$**,** если n четно.

n	A	B	C
1	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & -9 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Задание 2

Записать систему линейных уравнений, соответствующую уравнению в матричной форме:

$$A \cdot X = B, \text{ где } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Решить полученную систему методом Крамера, методом обратной матрицы и методом Гаусса

n	*A*	*B*	*n*	*A*	*B*
1	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -12 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ -2 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Практическая работа 2. Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии

Задание 1

На плоскости даны точки $A(\alpha_1; \alpha_2 - 2)$ и $B(\alpha_2 - 2; \alpha_2 + 4)$

Найти:

а) точку $C(x_1; y_1))$ – середину отрезка AB;

б) точку $D(x_1; y_1)$, которая делит отрезок AB в отношении p:q. Параметры p,q приведены в табл.1.1.

Таблица

Параметры p, q к заданию 1

n(mod 10)	p	q	n(mod 10)	p	q
1	1	3	6	3	2
2	3	1	7	3	7
3	1	4	8	7	3
4	4	1	9	1	9
5	2	3	0	9	1

Задание 2

На плоскости даны точки A(x_1;y_1), B(x_2;y_2) и C(x_3;y_3). Сделайте чертеж треугольника ABC и найдите:

а) длину и уравнение стороны BC (записать общее уравнение, каноническое, параметрическое и с угловым коэффициентом);

б) косинус угла A и угол A (в градусах);

в) уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно стороне BC;

г) высоту, проведенную к стороне BC, и ее уравнение;

д) уравнение медианы, проведенной к стороне BC;

е) уравнение биссектрисы угла A;

ж) координаты центра и радиус вписанной окружности;

з) координаты центра и радиус описанной окружности;

и) площадь треугольника;

к) координаты центра (тяжести) треугольника.

Таблица

Координаты точек А, В, С к заданию 2

n	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
1	2	3	4	5	6	7
2	-1	-1	2	-1	2	3
3	-7	-2	7	-2	2	10
4	-1	-1	4	1	-5	-1
5	-5	-2	3	13	-5	7
6	-1	6	-1	-2	5	-2
7	8	-6	8	1	-4	10
8	-5	-6	11	6	0	6
9	-2	1	2	-2	6	1
10	-3	-11	5	4	-3	10

Контрольные вопросы

1. Общее уравнение прямой на плоскости. Нормальный вектор прямой. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности.
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности.
3. Каноническое и параметрическое уравнения прямой на плоскости. Направляющий вектор прямой. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности.
4. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.
5. Уравнения прямых, проходящих через данную точку параллельно и перпендикулярно данной прямой (3 случая задания данной прямой: общим уравнением, каноническим уравнением, уравнением с угловым коэффициентом).
6. Общее уравнение плоскости в пространстве, нормальный вектор плоскости. Угол между плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности.
7. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки, не лежащие на одной прямой.
8. Общее, каноническое и параметрическое уравнения прямой

в пространстве. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности.

9. Угол между прямой и плоскостью в пространстве. Условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

10. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, перпендикулярно данной прямой. Уравнение прямой, проходящей через данную точку, перпендикулярно данной плоскости.

Практическая работа 3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Определение 1. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Определение 2. Число A называется *правым (левым) пределом* функции $f(x)$ в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что из неравенства $a < x < a + \delta$ $(a - \delta < x < a)$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Для обозначения правого (левого) предела функции $f(x)$ в точке a используют следующую символику: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = B$ ($\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = B$).

При нахождении пределов вида $\lim\limits_{x \to a(\infty)} [f(x)]^{\varphi(x)} = C$ следует иметь в виду, что:

1) если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a(\infty)} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to a(\infty)} \varphi(x) = B$, то $C = A^B$;

2) если $\lim\limits_{x \to a(\infty)} f(x) = A \neq 1$ и $\lim\limits_{x \to a(\infty)} \varphi(x) = \pm\infty$, то вопрос о нахождении предела С решается непосредственно;

3) если $\lim\limits_{x \to a(\infty)} f(x) = 1$ и $\lim\limits_{x \to a(\infty)} \varphi(x) = \infty$, то есть имеем неопределённость вида $[1^\infty]$, то используем 2-ой замечательный предел $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$ или $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x}\right)^{1+2x}$.

Решение. Здесь $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cdot\sin 3x}{3x}=3$ *и* $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)=1$,

следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x}\right)^{1+2x}=3^1=3$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{3x^2+1}\right)^{x^2}$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2}{3x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x^2}}{3+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{3}$ *и* $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=+\infty$

Поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{3x^2+1}\right)^{x^2}=\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{+\infty}\right]=0$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$.

Решение. Здесь $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{3}{x}}=1$, *а* $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)=\infty$, то есть имеем неопределённость вида $\left[1^\infty\right]$. В этом случае, прежде чем применить 2-ой замечательный предел, произведём следующие преобразования:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x+3)-4}{x+3}\right]^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+3}\right)^{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-4}}\right)^{\frac{x+3}{-4}}\right]^{\frac{-4}{x+3}\cdot(x+2)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4(x+2)}{x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4-\frac{8}{x}}{1+\frac{3}{x}}}=e^{-4}.$$

Можно найти предел проще, не прибегая к общему приёму, а именно

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+2}}{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x+2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{\frac{x+2}{-x}}}{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{\frac{3(x+2)}{x}}}=\frac{e^{-1}}{e^{3}}=e^{-4}.$$

Замечание. Если существует и положителен $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}[\ln f(x)]=\ln\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]$

Непрерывность функции

Функция f(x) называется ***непрерывной в точке а***, если:

1) эта функция определена в некоторой окрестности точки а;

2) существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

3) этот предел равен значению функции в точке a, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторой области, то она называется непрерывной в этой области.

Те точки области определения функции, в которых функция не является непрерывной, называются точками разрыва функции.

Различают разрывы двух видов.

1. Если в точке а существуют односторонние пределы функции, но, по крайней мере, один из них не равен значению данной функции в точке a, то говорят, что функция f(x) в точке а имеет разрыв первого рода. При этом возможны следующие случаи:

$$f(a-0)=f(a+0)\neq f(a)$$

(в этом случае говорят, что функция f(x) в точке а имеет устранимый разрыв);

$$f(a-0)\neq f(a+0)$$

(в этом случае говорят, что функция $f(x)$ в точке a имеет разрыв с конечным скачком. При этом число $|f(a+0)-f(a-0)|$называют *скачком функции* $f(x)$ точке a).

2. Функция $f(x)$ в точке a имеет разрыв второго рода, если в этой точке по крайней мере, один из односторонних пределов бесконечен или вовсе не существует.

Функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a;b]$, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка, причём в точке а она непрерывна справа $(f(a+0)=f(a))$, а в точке b – слева $(f(b-0)=f(b))$.

Непрерывные на отрезке функции обладают рядом важных свойств. Приведём одно из них.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда на интервале $(a;b)$ существует такая точка с*,* в которой данная функция равна нулю.

В задачах 1-5 определить, какого рода разрывы имеют следующие функции в точке a.

Пример 1. $f(x)=2^{1/(x-3)}, \quad a=3$.

Решение. Если $x\to3-0$, то $\dfrac{1}{x-3}\to-\infty$ и $\lim\limits_{x\to3-0}2^{1/(x-3)}=0$. Если $x\to3+0$, то $\dfrac{1}{x-3}\to+\infty$ и $\lim\limits_{x\to3+0}2^{1/(x-3)}=\infty$. Так как один из односторонних пределов бесконечен, следовательно, $a=3$ – точка разрыва 2-го рода.

Пример 2. $f(x)=\dfrac{2x+5}{x-1}$, a=1.

Решение. Выделим целую часть $f(x)=\dfrac{2(x-1)+7}{x-1}=2+\dfrac{7}{x-1}$. Если $x\to1-0$, то $\dfrac{7}{x-1}\to-\infty$ и $\lim\limits_{x\to1-0}\left(2+\dfrac{7}{x-1}\right)=-\infty$. Если $x\to1+0$, то $\dfrac{7}{x-1}\to+\infty$ и $\lim\limits_{x\to1-0}\left(2+\dfrac{7}{x-1}\right)=+\infty$.

Таким образом, функция при $x \to 1$ не имеет ни левого, ни правого конечного предела. Следовательно, $x = 1$ является точкой разрыва 2-го рода.

Пример 3. $f(x) = arctg\dfrac{1}{x+5}$, $a = -5$.

Решение. Если $x \to -5-0$, то $\dfrac{1}{x+5} \to -\infty$ и $\lim\limits_{x\to -5-0} arctg\dfrac{1}{x+5} = -\dfrac{\pi}{2}$. Если $x \to -5+0$, то $\dfrac{1}{x+5} \to +\infty$ и $\lim\limits_{x\to -5+0} arctg\dfrac{1}{x+5} = \dfrac{\pi}{2}$. Итак, при $x \to -5$ функция имеет левый и правый конечные пределы, причём эти пределы различны. Следовательно, $x = -5$ является точкой разрыва 1-го рода. Разность между правым и левым пределами (скачок) в точке разрыва равна $\dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$.

Пример 4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3+1}$, $a = -1$.

Решение. $\lim\limits_{x\to -1-0} \dfrac{x+1}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to -1-0} \dfrac{1}{x^2-x+1} = 1$,

$\lim\limits_{x\to -1+0} \dfrac{x+1}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to -1+0} \dfrac{1}{x^2-x+1} = 1$.

Итак,

$f(-1-0) = f(-1+0)$, но не равны $f(-1)$, значит, $a = 1$ является устранимой точкой разрыва.

Пример 5. $f(x) = \begin{cases} 2-x & при \quad x \le 1 \\ \dfrac{1}{1-x} & при \quad x > 1 \end{cases}$, $a = 1$.

Решение. Если $x \to 1-0$, то $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} (2-x) = 1$. Если $x \to 1+0$, то $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{1}{1-x} = -\infty$. Один из односторонних пределов бесконечен, следовательно, $a = 1$ – точка разрыва 2-го рода.

Дифференцирование функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение. Предел отношения приращения Δy функции в этой точке (если он существует) к приращению Δx аргумента, когда $\Delta x \to 0$, называется производной функции f(x) в точке x_0.

Обозначения: $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$ или $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ или $f'\Big|_{x=x_0}$. Таким образом,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Вычисление производной называется дифференцированием функции.

Так как дифференцирование функций с использованием только таблицы производных элементарных функций и основных правил дифференцирования не вызывает особых затруднений, то мы остановимся лишь на приемах вычисления производных сложных функций.

Производная сложной функции

Рассмотрим некоторую сложную функцию $y = f[\varphi(x)]$.

В этой цепи функциональных зависимостей $y = f(z)$ и $z = \varphi(x)$ аргумент x является последним и поэтому его называют независимой переменной. Таким образом, понятие аргумента и независимой переменной следует различать. Например, пусть $y = \sqrt{z}$ и $z = \cos x$. Здесь z есть аргумент функции y, но z, не будет независимой переменой. В результате, производная сложной функции $y = f[\varphi(z)]$ равна производной данной функции y по промежуточному аргументу z, умноженной на производную самого промежуточного аргумента z по независимой переменной x, т.е.

$$y'_x = y'_z \cdot y'_x.$$

Пример 1. Найти производную от функции $y = \ln^3 x$.

Решение. Полагаем $z = \ln x$, тогда $y = z^3$. Отсюда $y'_z = 3z^2 = 3\cdot\ln^2 x$, $z'_x = \dfrac{1}{x}$. Следовательно, $y'_x = 3\ln^2 x\cdot\dfrac{1}{x}$.

При достаточном навыке промежуточную переменную z не пишут, вводя ее лишь мысленно.

Пример 2. Найти производную от функции $y = \sin(x^3 - 3x^2 + 5)$.

Решение.

$$y' = \cos(x^3 - 3x^2 + 5)\cdot(x^3 - 3x^2 + 5)' =$$

$$= (3x^2 - 6x)\cos(x^3 - 3x^2 + 5) = 3x(x-2)\cos(x^3 - 3x^2 + 5).$$

Пример 3. Найти производную от функции $y = e^{\sqrt{x^2+x-1}}$.

Решение.

$$y' = e^{\sqrt{x^2+x-1}}\cdot\left(\sqrt{x^2+x-1}\right)' = \frac{e^{\sqrt{x^2+x-1}}}{2\sqrt{x^2+x-1}}\cdot(x^2+x-1)' =$$

$$= \frac{(2x+1)\cdot e^{\sqrt{x^2+x-1}}}{2\sqrt{x^2+x-1}}.$$

Производная функции, заданной в неявном виде

В некоторых случаях функция определяется уравнением, которое нельзя элементарными средствами разрешить относительно y, и приходится рассматривать y как неявную функцию от x. В таком варианте существует особый способ нахождения производной. Известно, если две функции тождественно равны друг другу, то равны и их производные. Поэтому, взяв производные от левой и правой частей данного тождества и применяя правило дифференцирования сложной функции (полагая, что y – сложная функция, зависящая от x), получаем равенство, откуда и выражаем y'.

Пример 4. Найти производную от функции, определяемой уравнением $x^4 + y^4 - 4xy = 0$.

Решение. $(x^4 + y^4 - 4xy)' = 0'$,

$$4x^3 + 4y^3\cdot y' - 4(x'y + xy') = 0$$

$$4x^3 + 4y^3\cdot y' - 4y - 4xy' = 0$$

$$4y^3 \cdot y' - 4xy' = 4y - 4x^3$$

$$y'(4y^3 - 4x) = 4y - 4x^3$$

$$y' = \frac{4y - 4x^3}{4y^3 - 4x} \quad \text{или} \quad y' = \frac{y - x^3}{y^3 - x}.$$

Производная функции, заданной параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ определена параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда, если функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют производные в точке t_0, причем $x'(t_0) \neq 0$, а функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x_0 = x(t_0)$, то эта производная находится по формуле

$$y'(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)} \quad \text{или} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример 5. Найти $y'(x)$ для заданной параметрически функции

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}.$$

Решение.

$$x'_t = (t - \sin t)'_t = 1 - \cos t$$

$$y'_t = (1 - \cos t)'_t = \sin t$$

$$y'_t = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Логарифмическое дифференцирование

Если дана сложная функция, представляющая собой произведение или частное нескольких функций, причем числитель и знаменатель дроби в свою очередь содержат произведения, то следует обе части данного выражения сначала прологарифмировать по основанию у, применить соответствующие свойства логарифмов, а затем приступить к дифференцированию обеих частей. Этот прием носит название логарифмического дифференцирования. Его также используют, если функция содержит корни из дробей. К этому приему прибегают, если имеется показательно-степенная функция или функция вида $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$.

Пример 6. Найти производную функции

$$y=\frac{\sqrt[3]{x^2+x-2}\cdot(x^2+1)}{\sqrt[5]{x^4-1}}.$$

Решение. Логарифмируем обе части равенства по основанию е

$$\ln y=\ln\frac{\sqrt[3]{x^2+x-2}\cdot(x^2+1)}{\sqrt[5]{x^4-1}}.$$

Применяя свойства логарифмов, получаем

$$\ln y=\frac{1}{3}\ln(x^2+x-2)+\ln(x^2+1)-\frac{1}{5}\ln(x^4-1).$$

Дифференцируем обе части, считая y сложной функцией переменной x:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{3}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x-2}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{5}\cdot\frac{4x^3}{x^4-1}$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{3}\cdot\frac{2x+1}{(x+2)(x-1)}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{5}\cdot\frac{4x^3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{5(2x+1)(x+1)(x^2+1)+30x(x^2-1)(x+2)-12x^3(x+2)}{15(x-)(x+1)(x^2+1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{10x^4+15x^3+15x^2+15x+5+30x^4+60x^3-30x^2-60x-12x^4-24x^3}{15(x-1)(x+1)(x^2+1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{28x^4+51x^3-15x^2-45x+5}{15(x^2-1)(x^2+1)(x+2)}$$

$$y'=\frac{\sqrt[3]{x^2+x-2}\cdot(x^2+1)}{\sqrt[5]{x^4-1}}\cdot\frac{28x^4+51x^3-15x^2-45x+5}{15(x^2-1)(x^2+1)(x+2)}$$

$$y'=\frac{28x^4+51x^3-15x^2-45x+5}{15(x^2-1)(x+2)}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2+x-2}}{\sqrt[5]{x^4-1}}.$$

*Пример 7***.** Найти производную функции $y=(x^2-x+2)^{e^{x+1}}$ **.**

Решение. Логарифмируем обе части по основанию *e*

$$\ln y=\ln(x^2-x+2)^{e^{x+1}}.$$

Используя свойство логарифма, получаем,

$$\ln y=e^{x+1}\ln(x^2-x+2).$$

Дифференцируем обе части, считая у сложной функцией переменной *x*

$$\frac{1}{y}\cdot y'=(e^{x+1})'\ln(x^2-x+2)+e^{x+1}\cdot[\ln(x^2-x+2)]'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=e^{x+1}\ln(x^2-x+2)+e^{x+1}\cdot\frac{1}{x^2-x+2}\cdot(2x-1)$$

$$y'=(x^2-x+2)^{e^{x+1}}\cdot e^{x+1}\left[\ln(x^2-x+2)+\frac{2x-1}{x^2-x+2}\right].$$

Замечание. При дифференцировании степенно-показательной функции можно пользоваться формулой

$$(f(x)^{\varphi(x)})'=\varphi(x)\cdot f(x)^{\varphi(x)-1}\cdot f'(x)+f(x)^{\varphi(x)}\cdot\ln f(x)\varphi'(x),$$

если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – дифференцируемые функции.

Индивидуальные задания

Задание 1. Вычислить предел функции, числовой последовательности, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Задания взять из таблицы

№№ nn	Задание	№№ nn	Задание
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-2x-x^3}{3x-2x^2+x^4}$	2	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(n-2)(n-3)}{3n^3+2n^2+n}$
3	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$	4	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n+1}+n}{2n+3}$
5	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$	6	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$

7	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$	8	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$
9	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$	10	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$

Задание 2. Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Задания взять из таблицы

№ nn	Задание	№ nn	Задание
1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$	6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$
2	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$	7	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$
3	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$	8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$
4	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+x-15}{3x^2+7x-6}$	9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$
5	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$	10	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

Задание 3. Вычислить предел функции, используя I замечательный предел и его вариации. Задания взять из таблицы

№№ nn	Задание	№№ nn	Задание
1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{3x}$	6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$
2	$\lim\limits_{x\to -\pi/2}\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x}$	7	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\mathrm{ctg}2x}{\sin 3x}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x}$	8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{2x}$	9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}{x^2}$

5	$\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{tgx-1}$	10	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2xtg2x}$

Задание 4. Вычислить предел функции, используя II замечательный предел. Задания взять из таблицы.

№nn	Задание	№nn	Задание
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x}$	6	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{5x^3}{2x+1}}$
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{5x}$	7	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^3-5}$
3	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{\frac{2x^2}{x+1}}$	8	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^3-5}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$	9	$\lim\limits_{x\to 0}(1+tg^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$
5	$\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$	10	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{2x^2-1}{x+1}}$

Задание 5. Найти производную функции первого и второго порядка. Задания взять из таблицы.

№ nn	Задание	№ nn	Задание
1	$y=x+\ln\dfrac{x-1}{x+1}$	6	$y=x^3\ln x-x^2$
2	$y=2\sqrt{x+1}\arcsin x+4\sqrt{1-x}$	7	$y=\dfrac{tgx+ctgx}{tgx-ctgx}$
3	$y=x\ln(x^2+1)-2x+2arctgx$	8	$y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}-1}$

4	$y = x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}$	9	$y = \frac{\sqrt{x^3+3x}}{x+1}$
5	$y = x\,\mathrm{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \mathrm{arctg}\sqrt{x}$	10	$y = \frac{\cos x}{1+\ln\cos x}$

Задание 6. Найти производные первого порядка

№№ nn	Задание	Задание	Задание
1	$y = (x^2+2x)^{\sqrt{x}}$	$y = x + \mathrm{arctg}\,y$	$\begin{cases} x = \sqrt{t+1} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$
2	$y = (\sqrt{x^2-1})^{x^3-3}$	$y = \sin(x+y)$	$\begin{cases} x = 4t+1 \\ y = t^2 \end{cases}$
3	$y = (\sin x)^{\frac{1}{x}}$	$x + y = \arcsin x + \arccos y$	$\begin{cases} x = t-1 \\ y = t^3 \end{cases}$
4	$y = (\cos x)^{\sqrt{x}}$	$3^x + 3^y = 3^{x+y}$	$\begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ y = t^3+t^2+t \end{cases}$
5	$y = (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$	$x^3 + y^3 = xy$	$\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$
6	$y = (\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x)^{\sqrt{x}}$	$e^{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y} = x$	$\begin{cases} x = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$
7	$y = (\sin x)^{\arcsin x}$	$x\cos y - \sin y + \sin 2y = 0$	$\begin{cases} x = \sin t - t\cos t \\ y = \cos t + t\sin t \end{cases}$
8	$y = (\cos x)^{\arccos x}$	$y\cos x - \sin(x-y) = 0$	$\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{2t} \end{cases}$
9	$y = (\mathrm{tg}x)^{\mathrm{arctg}x}$	$x^2(x+y) = (x-y)$	$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$

10	$y=(\mathrm{arcctg}x)^{1+x^2}$	$y=x^3+x\sqrt{e^y}$	$\begin{cases} x=\dfrac{\ln t}{t} \\ y=t\ln t \end{cases}$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определения предела функции в точке, предела функции в бесконечности, предела последовательности.
2. Как связано понятие предела функции с понятиями ее пределов слева и справа?
3. Какая функция называется бесконечно малой и каковы ее основные свойства?
4. Сформулируйте определение производной.
5. Каков ее механический и геометрический смысл?
6. Сформулируйте основные правила дифференцирования функций.
7. В чем заключается суть логарифмического дифференцирования и в каких случаях его целесообразно применять?
8. Каково правило дифференцирования функции, заданной неявно?
9. Как находится первая производная функция, заданной параметрически?

Практическая работа 4. Интегральное исчисление функции одной переменной

Интегрирование представляет собой операцию обратную дифференцированию, поэтому каждой формуле дифференцирования соответствует формула интегрирования. Это дает возможность написать таблицу основных интегралов.

Таблица основных интегралов

1) $\int dx = x + C$;   2) $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \quad \alpha \neq -1$;

3) $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$;   4) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C$;

5) $\int e^x dx = e^x + C;$

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

7) $\int \cos x dx = \sin x + C;$

8) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg}x + C;$

9) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg}x + C;$

10) $\int \mathrm{sh}x\, dx = \mathrm{ch}x + C;$

11) $\int \mathrm{ch}x\, dx = \mathrm{sh}x + C;$

12) $\int \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x} dx = -\mathrm{cth}x + C;$

13) $\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\, dx = \mathrm{th}x + C;$

14) $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \mathrm{arctg}x + C = -\mathrm{arcctg}x + C;$

15) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C;$

16) $\int \frac{1}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C;$

17) $\int \frac{1}{x^2-a^2}\, dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

18) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + C;$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$

20) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C;$

21) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C;$

22) $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C;$

23) $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

24) $\int \mathrm{tg}x dx = -\ln|\cos x| + C;$

25) $\int \mathrm{ctg}x dx = \ln|\sin x| + C.$

Укажем ряд приемов, позволяющих во многих случаях сводить заданные интегралы к табличным.

Примеры выполнения задания 1

Данные задания могут быть выполнены методом разложения подынтегральной функции на сумму функций, от каждой из которых первообразную можно найти с помощью «табличного интегрирования» (этот метод основан на линейности неопределенного интеграла).

Пример 1. Найти интегралы (используя метод разложения), результаты проверить дифференцированием:

а) $\int \frac{\sqrt{x^3}-8}{\sqrt{x}-2}dx$; б) $\int \frac{2\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}dx$;

в) $\int \frac{4-\sqrt{9-x^2}}{9-x^2}dx$; г) $\int \frac{5^x \cdot e^x - 3^x}{2^x}dx$.

Решение. Нахождение каждого из интегралов начинается с преобразования подынтегральной функции. В задаче а) воспользуемся формулой сокращенного умножения и затем почленным делением числителя на знаменатель (как и в примерах б), в), г)).

$$\text{а) } \int \frac{\sqrt{x^3}-8}{\sqrt{x}-2}dx = \int \frac{(\sqrt{x})^3-2^3}{\sqrt{x}-2}dx = \int \frac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}-2}dx =$$

$$= \int (x+2\sqrt{x}+4)\,dx = \int x dx + 2\int x^{1/2}dx + 4\int dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2} + 4\cdot x + C = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}\cdot\sqrt{x^3} + 4x + C.$$

(см. табличные интегралы 1 и 2). Обращаем внимание на то, что в конце решения записываем одну общую постоянную C, не записывая постоянные от интегрирования отдельных слагаемых.

$$\text{б) } \int \frac{2\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}dx = \int\left(\frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} + \frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\right)dx =$$

$$= \int\left(\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x}\right)dx = 2\int\frac{dx}{\sin^2 x} + 3\int\frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= 2\cdot(-\mathrm{ctg}x) + 3\cdot\mathrm{tg}x + C = 3\cdot\mathrm{tg}x - 2\cdot\mathrm{ctg}x + C.$$

(см. табличные интегралы 8 и 9).

в) $\int \frac{4-\sqrt{9-x^2}}{9-x^2}dx = \int\left(\frac{4}{9-x^2} - \frac{\sqrt{9-x^2}}{9-x^2}\right)dx =$

$$= -4\int\frac{dx}{x^2-9} - \int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = -4\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| - \arcsin\frac{x}{3} + C =$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| - \arcsin\frac{x}{3} + C.$$

(см. табличные интегралы 11 и 12).

г) $\int\frac{5^x\cdot e^x - 3^x}{2^x}dx = \int\left(\frac{5^x\cdot e^x}{2^x} - \frac{3^x}{2^x}\right)dx = \int\frac{5^x\cdot e^x}{2^x}dx - \int\frac{3^x}{2^x}dx =$

$$= \int\left(\frac{5\cdot e}{2}\right)^x dx - \int\left(\frac{3}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{5\cdot e}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{5\cdot e}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} + C =$$

$$= \frac{\frac{5^x\cdot e^x}{2^x}}{\ln 5 + \ln e - \ln 2} - \frac{\frac{3^x}{2^x}}{\ln 3 - \ln 2} + C =$$

$$= \frac{5^x\cdot e^x}{2^x\cdot(\ln 5 + 1 - \ln 2)} - \frac{3^x}{2^x\cdot(\ln 3 - \ln 2)} + C$$

(см. табличный интеграл 4).

Замечание. Проверку полученных результатов дифференцированием предлагаем студентам выполнить самостоятельно.

Одним из основных методов интегрирования является метод замены переменной (или метод подстановки), описываемый следующей формулой:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt,$$

где $x = \varphi(t)$ – функция, дифференцируемая на рассматриваемом промежутке. Данная формула показывает, что переходя к новой переменной, достаточно выполнить замену в подынтегральном выражении. Удачная замена позволяет упростить исходный интеграл, а в простейших случаях свести его к табличному (табличным).

Отметим два частных случая замены переменных:

1. Введение под дифференциал постоянного слагаемого.

Для любой постоянной величины **a** справедливо равенство:

$$d(x+a)=dx,$$

поэтому $\int f(x)dx=\int f(x)d(x+a)$.

2. Введение под дифференциал постоянного множителя.

Так как $d(a\cdot x)=a\cdot dx$, то имеет место равенство

$$dx=\frac{1}{a}\cdot d(a\cdot x), \qquad (a\neq 0)$$

поэтому $$\int f(x)dx=\frac{1}{a}\cdot\int f(x)d(a\cdot x).$$

Пример 2. Найти интегралы:

а) $\int\sin(7x+2)dx$; б) $\int\sqrt[3]{3-x}\,dx$; в) $\int\frac{dx}{4x+3}$;

г) $\int e^{-2x+7}dx$; д) $\int 5^{7x-3}dx$; е) $\int\frac{dx}{\cos^2\left(4-\frac{x}{3}\right)}$.

Решение. Данные интегралы могут быть найдены путем применения формул введения под знак дифференциала постоянного множителя и слагаемого к одному из табличных интегралов.

а) $\int\sin(7x+2)dx=\frac{1}{7}\cdot\int\sin(7x+2)d(7x+2)=-\frac{1}{7}\cdot\cos(7x+2)+C$

(см. табличный интеграл 7).

Заметим, что при $k\neq 0$ имеют место формулы

$$\int\sin(kx+b)dx=-\frac{1}{k}\cdot\cos(kx+b)+C$$

$$\int\cos(kx+b)dx=\frac{1}{k}\cdot\sin(kx+b)+C$$

б) $\int\sqrt[3]{3-x}\,dx=-\int(3-x)^{1/3}d(3-x)=-\frac{(3-x)^{4/3}}{4/3}+C=$

$=-\frac{3}{4}\cdot(3-x)^{4/3}+C$

(см. табличный интеграл 2).

Следует заметить, что в общем случае

$$\int (kx+b)^n dx = \frac{1}{k}\cdot\frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1, k \neq 0) \qquad (1.7)$$

(см. табличный интеграл 3).

в) $\int \frac{dx}{4x+3} = \frac{1}{4}\cdot\int \frac{d(4x+3)}{4x+3} = \frac{1}{4}\cdot \ln|4x+3| + C.$

Отметим, что при $k \neq 0$

$$\int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k}\cdot \ln|kx+b| + C. \qquad (1.8)$$

г) $\int e^{-2x+7}dx = -\frac{1}{2}\int e^{-2x+7}d(-2x+7) = -\frac{1}{2}\cdot e^{-2x+7} + C$

(см. табличный интеграл 5).

Отметим, что при $k \neq 0$

$$\int e^{kx+b}dx = \frac{1}{k}\cdot e^{kx+b} + C.$$

д) $\int 5^{7x-3}dx = \frac{1}{7}\int 5^{7x-3}d(7x-3) = \frac{1}{7}\cdot\frac{5^{7x-3}}{\ln 5} + C$

(см. табличный интеграл 4).

е) $\int \frac{dx}{\cos^2\left(4-\frac{x}{3}\right)} = -3\cdot\int \frac{d\left(4-\frac{x}{3}\right)}{\cos^2\left(4-\frac{x}{3}\right)} = -3\cdot \operatorname{tg}\left(4-\frac{x}{3}\right) + C$

(см. табличный интеграл 8).

Пример 3. Найти интегралы

а) $\int x\cdot e^{-x^2}dx$; б) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x + 2}}dx$;

в) $\int x^3(2+x^4)^5 dx$; г) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

д) $\int \frac{3^x}{4+3^x}dx$; е) $\int (x+3)\cdot\cos(x^2+6x)dx$.

Решение.

а) сделаем замену переменной полагая $t=-x^2$. Найдем дифференциал от левой и правой части формулы $t=-x^2$:

$$dt = d(-x^2) \quad \text{или} \quad dt = (-x^2)'dx.$$

Окончательно, $\quad dt = -2xdx \quad$ и $\quad xdx = -\frac{1}{2}dt.$

Тогда

$$\int xe^{-x^2dx} = \int e^{-x^2} \cdot xdx = \int e^t \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)dt = -\frac{1}{2}\int e^t dt =$$

$$= -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

(см. табличный интеграл 5).

б) Заметим, что $\cos x dx = d(\sin x) = d(\sin x + 2)$, тогда обозначим

$t = \sin x + 2$ и применим формулу 2 из таблицы интегралов:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x + 2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x + 2}}d(\sin x + 2) = \int \frac{1}{\sqrt[3]{t}}dt = \int t^{-1/3}dt =$$

$$= \frac{t^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3}{2} \cdot t^{2/3} + C = \frac{3}{2}(\sin x + 2)^{2/3} + C.$$

в) Для решения примера воспользуемся заменой $t = 2 + x^4$.

Тогда $dt = d(2 + x^4) = (2 + x^4)'dx = 4x^3dx$, т.е. $dt = 4x^3dx$, откуда $x^3dx = \frac{1}{4} \cdot dt$.

Итак,

$$\int x^3(2 + x^4)^5dx = \int (2 + x^4)^5 \cdot x^3dx = \int t^5 \cdot \frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}\int t^5dt =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{24} \cdot t^6 + C = \frac{1}{24} \cdot (2 + x^4)^5 + C.$$

г) Для решения данного примера воспользуемся равенством $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}dx = d(\arcsin x)$ и заменой $t = \arcsin x$. Используя указанную замену и табличное интегрирование, получим результат:

$$\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1 - x^2}}dx = \int (\arcsin x)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}dx = \int (\arcsin x)^3 d(\arcsin x) =$$

$$= \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} \cdot \arcsin^4 x + C.$$

д) Воспользуемся заменой, существенно упрощающей решение данного примера: $t = 4 + 3^x$. Тогда $dt = (4 + 3^x)' dx = 3^x \cdot \ln 3 dx$, откуда $3^x dx = \frac{1}{\ln 3} dt$. Используя указанную замену и табличное интегрирование получим результат

$$\int \frac{3^x}{4 + 3^x} dx = \int \frac{1}{4 + 3^x} \cdot 3^x dx = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\ln 3} dt = \frac{1}{\ln 3} \cdot \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \cdot \ln|t| + C = \frac{1}{\ln 3} \cdot \ln|4 + 3^x| + C = \log_3(4 + 3^x) + C.$$

е) Для решения примера воспользуемся заменой $t = x^2 + 6x$. Тогда $dt = d(x^2 + 6x) = (x^2 + 6x)' dx = (2x + 6) dx = 2(x + 3) dx$, т.е. $dt = 2(x + 3) dx$ и $(x + 3) dx = \frac{1}{2} dt.$

Используя указанную замену и табличное интегрирование, получим результат

$$\int (x + 3) \cdot \cos(x^2 + 6x) dx = \int \cos(x^2 + 6x) \cdot (x + 3) dx =$$

$$= \int \cos t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t + C = \frac{1}{2} \sin(x^2 + 6x) + C.$$

Индивидуальные задания

Задание 1. Найти интеграл, результат проверить дифференцированием

1.	$\int \frac{3 dx}{\sqrt{4 - x^2}}$	2.	$\int \frac{5x^8 + 3}{x^3} dx$
3.	$\int \left(\frac{1}{1 + x^2} + \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}} \right) dx$	4.	$\int \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} dx$
5.	$\int \frac{2^x - 3^x}{4^x} dx$	6.	$\int \frac{2 dx}{x^2 - 9}$

7.	$\int \frac{\sqrt{x^3}+1}{\sqrt{x}+1}\,dx$	8.	$\int \frac{3-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx$
9.	$\int \frac{2^x \cdot e^x - 1}{2^x}\,dx$	10.	$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$

Задание 2. Найти интеграл, результат проверить дифференцированием

1.	$\int \sin\left(1-\frac{2x}{3}\right)dx$	6.	$\int \frac{1}{\sin^2(5x+1)}\,dx$
2.	$\int (1-5x)^{1/5}\,dx$	7.	$\int \sqrt[3]{3-7x}\,dx$
3.	$\int \cos\left(\frac{x}{2}+1\right)dx$	8.	$\int \left(1-\frac{x}{2}\right)^4 dx$
4.	$\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{3}}\,dx$	9.	$\int \frac{1}{(1-3x)^{1/5}}\,dx$
5.	$\int \frac{1}{(2x-1)^{1/2}}\,dx$	10.	$\int \frac{1}{3-5x}\,dx$

Задание 3. Найти интеграл, результат проверить дифференцированием

1.	$\int x\cos x^2\,dx$	2.	$\int x \cdot e^{1-x^2}\,dx$
3.	$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$	4.	$\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$
5.	$\int \frac{tg^5 x}{\cos^2 x}\,dx$	6.	$\int \frac{\cos x}{\sin^{3/5} x}\,dx$
7.	$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$	8.	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$

9.	$\int \frac{e^x}{2+e^x}dx$	10.	$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}dx$

Задание 4. Найти интеграл, применив метод интегрирования по частям. Результат проверить дифференцированием

1.	$\int (x+1)\cdot e^{3x}dx$	2.	$\int (2x-1)\sin 2x\,dx$
3.	$\int \mathrm{arctg}2x\ dx$	4.	$\int \ln x\,dx$
5.	$\int \arcsin(x+1)\ dx$	6.	$\int (1-3x)\cdot 2^x dx$
7.	$\int (4-3x)\cdot e^{-x}dx$	8.	$\int \ln(1-x)\,dx$
9.	$\int (2x-1)\cos x\ dx$	10.	$\int x\ln 2x dx$

Задание 5.

Найти интеграл от выражений, содержащих квадратный трехчлен

1.	$\int \frac{2x-3}{x^2-6x+25}dx$	2.	$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+6x+25}}dx$
3.	$\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}dx$	4.	$\int \frac{x+1}{x^2+2x+10}dx$
5.	$\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$	6.	$\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx$
7.	$\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$	8.	$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-6x+13}}dx$
9.	$\int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10}dx$	10.	$\int \frac{2x+2}{2x^2+x+1}dx$

Задание 6.

Найти интеграл от рациональной дроби, предварительно разложив ее на сумму простейших дробей.

1.	$\int \frac{x^2+1}{(x^2+2)(x^2+4x+4)}dx$	2.	$\int \frac{x-7}{x^3-4x^2+4x}dx$
3.	$\int \frac{x+3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$	4.	$\int \frac{x+3}{(x+1)(x^2+4)}dx$
5.	$\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x^2-2x+5)}dx$	6.	$\int \frac{x+7}{x^3-2x^2+2x}dx$
7.	$\int \frac{x^2+4x+8}{(x-1)(x^2+1)}dx$	8.	$\int \frac{x^3+x}{x^4-4x^2+4}dx$
9.	$\int \frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)}dx$	10.	$\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+2x+1)(x^2+9)}dx$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение первообразной функции.
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Дайте определение операции интегрирования. Как проверить результат интегрирования?
4. Сформируйте основные свойства неопределенного интеграла.
5. Запишите соотношения, устанавливающие связи между интегрированием и дифференцированием.
6. Объясните суть непосредственного интегрирования.
7. В чем суть способа интегрирования, введением множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала? Запишите соответствующую формулу.
8. Найдите интеграл $\int (5x-1)^2 dx$ двумя способами.
9. Напишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле.

10.Напишите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла.

19. Методы нахождения интегралов вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$.

20. Методы нахождения интегралов вида $\int tg^m x dx, \quad \int ctg^n x dx$.

21. Методы нахождения интегралов вида $\int stc^{2m} x dx, \quad \int cosec^{2n} x dx$.

Практическая работа 5. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменной

Пусть дана функция $z = f(x, y)$, определённая и непрерывная в некоторой области D. Полагая, например, $y = const$, получим производную $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$, которая называется частной производной первого порядка функции z по переменной x. Она также может обозначаться $f'_x(x, y)$.

Аналогично, полагая $x = const$, получим производную $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$, которая называется частной производной первого порядка функции z по переменной y. Она также может обозначаться $f'_y(x, y)$.

Частными производными второго порядка функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от её частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ или } f''_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ или } f''_{yy}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ или } f''_{xy}(x, y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ или } f''_{xy}(x, y).$$

Имеет место теорема о равенстве смешанных производных.

Теорема Шварца. Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой. В частности, для $z = f(x, y)$ имеем: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Пример. Для функции $z = \cos(3x - 4y)$ найти частные производные второго порядка.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = [y = \text{const}] = (\cos(3x - 4y))' = -\sin(3x - 4y) \cdot (3x - 4y)' =$$

$$= -\sin(3x - 4y) \cdot (3 \cdot x' - 0) = -3\sin(3x - 4y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = [x = \text{const}] = (\cos(3x - 4y))' = -\sin(3x - 4y) \cdot (3x - 4y)' =$$

$$= -\sin(3x - 4y) \cdot (0 - 4 \cdot y') = 4\sin(3x - 4y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = [y = \text{const}] = (-3\sin(3x - 4y))' = -3\cos(3x - 4y) \cdot (3x - 4y)' =$$

$$= -3\cos(3x - 4y) \cdot (3 \cdot x' - 0) = -9\cos(3x - 4y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = [x = \text{const}] = (-3\sin(3x - 4y))' = -3\cos(3x - 4y) \cdot (3x - 4y)' =$$

$$= -3\cos(3x - 4y) \cdot (0 - 4 \cdot y') = 12\cos(3x - 4y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = [x = \text{const}] = (4\sin(3x - 4y))' = 4\cos(3x - 4y) \cdot (3x - 4y)' =$$

$$= 4\cos(3x - 4y) \cdot (0 - 4 \cdot y') = -16\cos(3x - 4y).$$

Задание 1. Для функции z = f(x,y) найти частные производные

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и их значения в точке $x = x_0$, $y = y_0$.

Задание 2. Найти вторые частные производные

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 y}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Задание 3. Найти полный дифференциал функции z = f(x,y).

Задание 4. Найти градиент функции z = f(x,y) в точке $x = x_0$, $y = y_0$.

Задание 5. Найти производную функции z = f(x,y) в точке $x = x_0$, $y = y_0$ по направлению вектора (1, 2).

Задание 6. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности z = f(x,y) в точке $x = x_0$, $y = y_0$.

Задание 7. Разложить функцию z = f(x,y) по формуле Тейлора (при n = 2) в точке $x = x_0$, $y = y_0$.

№	f(x,y)	x_0	y_0	a	b	c	d
1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\frac{x^2}{y^2} \cdot \sin(x-y)$	0,1	1,2	–4	1	1	2
2	$\frac{x}{y^2} \cdot \cos(x+y)$	–0,2	1,8	–2	2	1	2
3	$\frac{x}{y^2} \cdot \ln(x^2+y)$	–1	1,8	–2	3	1	3
4	$\frac{y-4}{\sqrt{y}+2x^2} \cdot (3+x+y)$	–2	4,5	–3	3	1	5
5	$\frac{\sin(y+x^2)}{\sqrt{y}+2x^2}$	–2	4,5	–3	2	0	5
6	$\frac{\cos(y^2x)}{y+2x^2}$	–2	1	–3	1	0,5	2
7	$\sin(x+2y) \cdot \cos(x^2)$	–0,2	1	–1	1	0,5	1,5
8	$\frac{\sin(x-y)}{2+\cos(xy)}$	–0,6	1,2	–2	0	0	1,5
9	$\frac{e^{x-y}}{1.25-\cos(xy)}$	–0,5	1	–0,7	0	0,5	1,3
10	$\frac{\operatorname{arctg}(x+y)}{\cos(x^2+y^2)}$	–0,6	1,6	–0,7	0	1,4	1,9

Контрольные вопросы

1. Записать формулы для вычисления площади плоской фигуры, заданной в декартовой системе координат, в полярной системе координат, параметрически.
2. Записать формулы для вычисления длины дуги плоской кривой, заданной в декартовой системе координат, в полярной системе координат, параметрически.
3. Записать формулы для вычисления объёма и площади боковой поверхности тела, полученного вращением дуги кривой вокруг оси ОХ и вокруг оси ОУ, заданной в декартовой системе координат, в полярной системе координат, параметрически.
4. Что такое частная производная?
5. Как формулируется теорема о смешанных производных?
6. Сколько различных частных производных 4-го порядка имеет функция от трёх переменных?
7. Что такое полный дифференциал? Его геометрический смысл?
8. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.
9. В чём заключается геометрический смысл градиента?
10. Что такое производная по направлению?
11. Что такое локальный экстремум? Минимакс? Глобальный экстремум? Сформулируйте необходимые и достаточные условия экстремума функции двух переменных.
12. Как проходят линии уровня функции двух переменных в окрестности точки локального экстремума? Минимакса?

Практическая работа 6. Дифференциальные уравнения

Определение. Функция $y=\varphi(x)$ называется решением дифференциального уравнения, если при подстановке функции в обе части уравнения получаем верное равенство, т. е. тождество.

Определение. Функция $y=\varphi(x,C)$, где C – произвольная постоянная величина, называется общим решением дифференциального уравнения (8) в некоторой области D, если она удовлетворяет двум условиям:

1. При любом допустимом значении С функция $y = \varphi(x, C)$ – решение уравнения (8).

2. Для любой допустимой задачи Коши вида (9) существует постоянная C_0 такая, что выполнено равенство $y_0=\varphi(x_0,C_0)$. Это означает, что для любой допустимой задачи Коши существует хотя бы одно решение.

Эти определения показывают самые общие свойства структуры решения. Они показывают, что решений уравнения бесконечно много и для выделения решения из общего множества нужно уметь решить задачу Коши. В аналитическом виде схема решения задачи Коши для уравнения (8) такова:

1. Нужно найти общее решение $y=\varphi(x,C)$.

2. Подставим в общее решение значения x_0 и y_0 и получим уравнение $y_0=\varphi(x_0,C)$.

3. Решим это уравнение и найдем C_0.

4. Подставим значение C_0 в общее решение и найдем решение задачи Коши $y=\varphi(x,C_0)$.

Например, решение (3) является общим для уравнения (2). А решение (5) является решением задачи Коши.

Решение задачи Коши тоже может оказаться неединственным. Поэтому важно выявить условия, при которых решение задачи Коши единственно.

Теорема. Если функция $z=f(x,y)$ непрерывна и имеет частную производную по y, причем

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le M < \infty,$$

то уравнение (8) для любой задачи Коши имеет единственное решение. (Без доказательства).

Мы видим, что при достаточно широких условиях решение задачи Коши единственно.

Решение задачи Коши, если оно единственно и получается из общего решения при некотором значении C_0, называется частным решением.

Кроме частных решений существуют еще особые решения, которые невозможно получить из общего.

Определение. Функция $y=\varphi(x)$ называется особым решением дифференциального уравнения, если оно является решением и не может быть получено из общего, как частное решение для некоторого значения C_0.

Вначале мы рассмотрим методы решений дифференциальных уравнений первого порядка. Точные методы решений возможны лишь для узких классов дифференциальных уравнений. Мы рассмотрим основные.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальные уравнения вида

$$y' = f(x)g(y), \tag{10}$$

где правая часть является произведением двух функций, из которых одна зависит только от x, а вторая только от y, называется уравнением с разделяющимися переменными. Решаем интегрированием:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C. \tag{13}$$

Найдем, если это возможно, первообразную от правой и левой части. Полученное равенство (или само равенство (13)) называется интегралом уравнения (10). Выразим, если возможно, из полученного равенства y в явном виде. Получим общее решение уравнения (10).

(14)

Их решения могут дать особые решения уравнения (14).

Пример. Найти решение уравнения $3e^x \operatorname{tg} \; y dx + \frac{1-e^x}{\cos^2 y} dy = 0$

или $\quad 3e^x \operatorname{tg} \; y dx = (e^x - 1)\frac{dy}{\cos^2 y} \quad \Big| \cdot \frac{1}{(e^x-1)\operatorname{tg} \;\; y}$

Разделим переменные

$$\frac{3e^x dx}{(e^x-1)}=\frac{dy}{tg\quad y\cos^2 y}.$$

предполагая, что

$(e^x-1)\sin\quad y\cos y\neq 0,$

Подведем под дифференциал и проинтегрируем

$$\int\frac{3d(e^x-1)}{(e^x-1)}=\int\frac{d(tg\quad y)}{tg\quad y}.$$

Получим

$$3\ln\left|e^x-1\right|+\ln|C|=\ln|tg\quad y|.$$

Освободимся от логарифмов. Получим общий интеграл

$$C(e^x-1)^3=tgy.$$

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Функция z=f(x,y) называется однородной функцией порядка m, если для любого λ выполняется равенство $f(\lambda x,\lambda y)\equiv\lambda^m f(x,y)$.

Пример. Функция $z=\sqrt{x+y}$ является однородной порядка 1/2, так как

$$z(\lambda x,\lambda y)=\sqrt{\lambda x+\lambda y}=\sqrt{\lambda}\sqrt{x+y}=\lambda^{1/2}\sqrt{x+y}=\lambda^{1/2}z(x,y).$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y'=f(x,y), \tag{1}$$

называется однородным, если функция z=f(x,y) является однородной функцией нулевого порядка, т. е. для любого λ выполняется равенство

$$f(\lambda x,\lambda y)\equiv f(x,y). \tag{2}$$

Положим λ=1/ x. Тогда

$$f(\lambda x,\lambda y)=f(x/x,\ y/x)=f(1,y/x).$$

Для решения однородного уравнения вида (1) введем замену

$$u=y/x \quad \text{или} \quad y=xu. \tag{3}$$

Тогда

$$y'=x'u+xu'=u+xu' \tag{4}$$

и
$$f(x,y)=f(1,u).$$

Подставим (3) и (4) в формулу (1).

$$u + xu' = f(1,u) \qquad \text{или} \qquad x\frac{du}{dx} = f(1,u) - u.\Big|\frac{dx}{x(f(1,u)-u)} \qquad (5)$$

Уравнение (5) – это уравнение с разделяющимися переменными. Предположим, что $f(1,u)-u\neq 0$, и разделим переменные

$$\frac{du}{f(1,u)-u} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем

$$\int\frac{du}{f(1,u)-u} = \int\frac{dx}{x}. \qquad (6)$$

Получим интеграл уравнения в виде

$$\int\frac{du}{f(1,u)-u} = \ln|x| + \ln|C|.$$

Если удается выразить первообразную функции через элементарные функции, то получим общий интеграл уравнения. Если из общего интеграла удастся выразить y в явном виде, получим общее решение уравнения (1).

Пример.

Найти решение уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$.

Решение. Функция $z = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$ является однородной функцией нулевого порядка, так как

$$z(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x} + \frac{(\lambda y)^2}{(\lambda x)^2} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = z(x,y)$$

По этому мы получили однородное дифференциальное уравнение. Введем замену

$$y = xu;$$

$$y' = u + xu'.$$

Получим

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{ux}{x} + \frac{(ux)^2}{x^2} \qquad \text{или} \qquad x\frac{du}{dx} = u^2.\Big|\frac{dx}{xu^2}$$

Пусть $x\neq0$, $u\neq0$. Разделим переменные $\dfrac{du}{u^2}=\dfrac{dx}{x}$.

Проинтегрируем: $\displaystyle\int\frac{du}{u^2}=\int\frac{dx}{x}$.

Получим: $-\dfrac{1}{u}=\ln|x|+\ln|C|$.

Вернемся к исходной замене: $-\dfrac{x}{y}=\ln|xC|$.

Находим общее решение: $y=-\dfrac{x}{\ln|xC|}$.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y'_x+P(x)y=Q(x), \tag{7}$$

где $P(x)$, $Q(x)$ – заданные функции.

Уравнение (7) названо линейным из-за сходства по внешнему виду с линейной функцией $y=kx+b$. Но сходство не только внешнее. Оно гораздо глубже, но мы не станем выяснять это. Для решения уравнения (7) используем замену

$$\begin{aligned} y&=u(x)v(x),\\ y'&=u'v+uv'. \end{aligned} \tag{8}$$

Подставим (8) в равенство (7)

$$u'v+uv'+P(x)uv=Q(x). \tag{9}$$

Произведем группировку

$$u'v+u(v'+P(x)v)=Q(x) \tag{10}$$

Подберем функцию v так, чтобы скобка обратилась в ноль, т.е.

$$v'+P(x)v=0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dv}{dx}=-P(x)v\,\Big|\,\frac{dx}{v}$$

Разделим переменные $\frac{dv}{v} = -P(x)dx.$

Проинтегрируем $\int \frac{dv}{v} = -\int P(x)dx.$

Получим

$$\ln|v| - \ln|C| = -\int P(x)dx \quad \text{или} \quad \left|\frac{v}{C}\right| = e^{-\int P(x)dx}.$$

Откуда $v = Ce^{-\int P(x)dx}.$

Так как нас интересует всего одна функция, то выберем постоянную C из соображений удобства. Положим C=1.

$$v = e^{-\int P(x)dx}. \tag{11}$$

Подставим в уравнение (10)

$$u'e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \quad \text{или} \quad \frac{du}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

Тогда

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1.$$

Из (8) находим общее решение

$$y = uv = e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1e^{-\int P(x)dx}. \tag{12}$$

Пример.

Найти решение уравнения $y'_x + xy = x^3.$

Решение. Уравнение является линейным, в котором P(x) = x, Q(x) = –x³. Введем замену

y=uv; y′=u′v+uv′.

Тогда $u'v + uv' + xuv = x^3.$

Произведем группировку и выберем функцию v из уравнения

$$\frac{dv}{dx} + xv = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dx} = -xv.\Big|\frac{dx}{v}$$

Разделим переменные $\frac{dv}{v} = -xdx.$

Проинтегрируем $\int \frac{dv}{v} = -\int xdx.$

Получим $\ln|v| - \ln|C| = -\dfrac{x^2}{2}.$

Откуда $v = Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$

Положим C=1. Тогда

$$u'e^{-\frac{x^2}{2}} = x^3 \quad \text{или} \quad \frac{du}{dx} = x^3 e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Откуда

$$u = \int x^3 e^{\frac{x^2}{2}} dx = \left[\begin{array}{c|c} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = xe^{\frac{x^2}{2}} dx & v = \int xe^{\frac{x^2}{2}} dx = e^{\frac{x^2}{2}} \end{array}\right] =$$

$$= x^2 e^{\frac{x^2}{2}} - 2\int xe^{\frac{x^2}{2}} dx = x^2 e^{\frac{x^2}{2}} - 2e^{\frac{x^2}{2}} + C_1.$$

Общее решение $y = uv = x^2 - 2 + C_1 e^{-\frac{x^2}{2}}.$

Уравнения Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y'_x + P(x)y = Q(x)y^n, \tag{13}$$

где P(x), Q(x) – заданные функции, n≠0,n≠1. При n=0 получим линейное, при n=1 уравнение с разделяющимися переменными.

Разделим обе части уравнения на y^n. Получим

$$y^{-n}y'_x + P(x)y^{1-n} = Q(x),$$

Введем замену

$$z = y^{1-n}, z' = (1-n)y^{-n}. \tag{14}$$

Уравнение сведется к виду

$$z'_x + P(x)(1-n)z = Q(x)(1-n).$$

Это линейное относительно z уравнение. Его можно решать с помощью замены (8). Так как связь между функциями y и z задана формулой (14) можно использовать замену (8) непосредственно для уравнения (13).

Пример.

Найти решение уравнения

$$2xy\frac{dy}{dx}-y^2+x=0.$$

$$y'_x-\frac{y}{2x}=-\frac{1}{2y}.$$

Решение. Уравнение является уравнением Бернулли, в котором P(x) = −1/2 x, Q(x) = −1/2, n = −1. Введем замену

$$y=uv;\quad y'=u'v+uv'.$$

Тогда

$$u'v+uv'-\frac{uv}{2x}=-\frac{1}{2uv}.$$

Произведем группировку и выберем функцию v из уравнения

$$\frac{dv}{dx}-\frac{v}{2x}=0 \qquad \text{или} \qquad \frac{dv}{dx}=\frac{v}{2x}.\Big|\frac{dx}{v}\quad .$$

Разделим переменные $\frac{dv}{v}=\frac{dx}{2x}.$

Проинтегрируем $\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{2x}.$

Получим $\ln|v|-\ln|C|=\frac{1}{2}\ln|x|.$

Откуда $v=\frac{C}{\sqrt{x}}.$

Положим C=1. Тогда $u'\frac{1}{\sqrt{x}}=-\frac{1}{2u\frac{1}{\sqrt{x}}}$

Откуда находим

$$\frac{du}{dx}=\frac{x}{2u} \qquad \text{или} \qquad 2udu=xdx.$$

Проинтегрируем $\int 2udu=\int xdx.$

Получим

$$u^2 = \frac{x^2}{2} + C_1 \qquad \text{или} \qquad u = \sqrt{\frac{x^2}{2} + C_1}.$$

Общее решение

$$y = uv = \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{x^2}{2} + C_1} = \sqrt{\frac{x}{2} + \frac{C_1}{x}}.$$

Индивидуальные задания

Задание 1. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения

1. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$
2. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$
3. $\sqrt{4+y^2}\,dx - ydy = x^2ydy$
4. $\sqrt{3+y^2}\,dx - ydy = x^2ydy$
5. $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx$
6. $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0$
7. $x\sqrt{3+y^2}\,dx + y\sqrt{2+x^2}\,dy = 0$
8. $y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$
9. $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$
10. $x\sqrt{5+y^2}\,dx + y\sqrt{4+x^2}\,dy = 0$

Задание 2. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения

1.	$y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$	2.	$xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$

3.	$y' = \frac{x+y}{x-y}$	4.	$xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y$
5.	$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$	6.	$xy' = \frac{3y^3+4yx^2}{2y^2+2x^2}$
7.	$y' = \frac{x+2y}{2x-y}$	8.	$xy' = 2\sqrt{x^2+y^2} + y$
9.	$3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$	10.	$xy' = \frac{3y^3+6yx^2}{2y^2+3x^2}$

Задание 3. Найдите решение задачи Коши

1. $y' - \frac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 0$
2. $y' - y\,\mathrm{ctg}x = 2x\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
3. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad y(0) = 0$
4. $y' + y\,\mathrm{tg}x = \cos^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$
5. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = \frac{3}{2}$
6. $y' - \frac{1}{x+1}y = e^x(x+1), \quad y(0) = 1$
7. $y' - \frac{y}{x} = x\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
8. $y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}$
9. $y' + \frac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1$
10. $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}$

Задание 4. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения

1	$y'''x\ln x = y''$	2	$xy''' + y'' = 1$
3	$2xy''' = y''$	4	$xy''' + y'' = x + 1$
5	$\operatorname{tg}x \cdot y'' - y' + \dfrac{1}{\sin x} = 0$	6	$x^2y'' + xy' = 1$
7	$y'''\operatorname{ctg}2x + 2y'' = 0$	8	$x^3y''' + x^2y'' = 1$
9	$\operatorname{tg}x \cdot y''' = 2y''$	10	$y'''\operatorname{cth}2x = 2y''$

Задание 5. Найдите общее решение дифференциального уравнения

1	$y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$	2	$y'' + 3y' - 4y = (10x + 7)e^{x}$
3	$y'' - 3y' - 4y = (-10x - 3)e^{-x}$	4	$y'' - 2y' + y = 2e^{x}$
5	$y'' + 4y' + 4y = 4e^{-2x}$	6	$y'' + 5y' + 4y = (6x - 1)e^{-x}$
7	$y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}$	8	$y'' - 5y' + 4y = (-6x - 1)e^{x}$
9	$y'' + 6y' + 9y = 4e^{-3x}$	10	$y'' + 5y' + 6y = (2x + 1)e^{-2x}$

Практическая работа 7. Ряды

Вычислить значение определенного интеграла $J = \int\limits_0^{0,5} \dfrac{\operatorname{Ln}(1-x)}{x}dx$ с точностью до 0,001.

Интеграл J является несобственным. Так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{Ln}(1-x)}{x} = -1$, то положим $f(0) = -1$.

Разложим подынтегральную функцию в ряд и почленно проинтегрируем

$$\int_{0}^{0,5}\frac{\mathrm{Ln}(1-x)}{x}dx=\int_{0}^{0,5}\frac{-x-\dfrac{x^{2}}{2}-\dfrac{x^{3}}{3}-\Lambda-\dfrac{x^{n}}{n}-\Lambda}{x}dx=$$

$$=-\int_{0}^{0,5}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^{2}}{3}+\Lambda+\frac{x^{n-1}}{n}+\Lambda\right)dx=-\left(x+\frac{x^{2}}{4}+\frac{x^{3}}{9}+\Lambda+\frac{x^{n}}{n^{2}}+\Lambda\right)\Bigg|_{0}^{0,5}=$$

$$=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2}\cdot 4}+\frac{1}{2^{3}\cdot 9}+\Lambda+\frac{1}{2^{n}\cdot n^{2}}+\Lambda\right).$$

Определим, сколько слагаемых надо взять, чтобы погрешность вычислений не превышала 0,001. Для этого применим метод мажорирования.

$$R_{n}=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)^{2}}+\frac{1}{2^{n+2}(n+2)^{2}}+\frac{1}{2^{n+3}(n+3)^{2}}+\Lambda=$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{1}{(n+1)^{2}}+\frac{1}{2(n+2)^{2}}+\frac{1}{4(n+3)^{2}}+\frac{1}{8(n+4)^{2}}+\Lambda\right)\le$$

$$\le\frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{1}{(n+1)^{2}}+\frac{1}{2(n+1)^{2}}+\frac{1}{4(n+1)^{3}}+\Lambda\right)=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)^{2}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\Lambda\right)=$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)^{2}}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=\frac{2}{2^{n+1}(n+1)^{2}}=\frac{1}{2^{n}(n+1)^{2}},$$

$$R_{n}\le\frac{1}{2^{n}(n+1)^{2}}<0,001.$$

Для $n=5$ $\dfrac{1}{32\cdot 36}=\dfrac{1}{1152}<0,001$. Поэтому берем 5 слагаемых в разложении

$$\int_{0}^{0,5}\frac{\mathrm{Ln}(1-x)}{x}dx\approx-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{72}+\frac{1}{256}+\frac{1}{800}\right)=-0,5807.$$

$$-0,5817<J<-0,5797.$$

Пример. Вычислить значение определенного интеграла
$y=\int\limits_0^1 \frac{e^{2x}-1}{x}dx$ с точностью до 0,001.

Интеграл y является несобственным. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=2$, то положим F(0) = 2.

Обозначим $f(x)=e^{2x}-1$. Разложим f(x) в степенной ряд

$$f(x)=e^{2x}-1=2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+...+\frac{(2x)^n}{n!}+R_n(x),$$

где $R_n(x)$ – n-ый остаток, допускающий оценку Лагранжа.

$$|R_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1},\qquad \text{где}\qquad M=\max_{x\in[0,1]}|f^{(n+1)}(x)|.$$

Так как $f^{(n+1)}(x)=e^{2x}\cdot 2^{n+1}$ и экспонента достигает максимального значения на правом конце отрезка, то $M=e^2\cdot 2^{n+1}$. Следовательно,

$$|R_n(x)|\le\frac{e^2\cdot 2^{n+1}}{(n+1)!}|x|^{n+1}\le\frac{9\cdot 2^{n+1}}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

Значит,

$$\int\limits_0^1\frac{f(x)}{x}dx=\int\limits_0^1\frac{e^{2x}}{x}dx=\int\limits_0^1(2+\frac{2^2}{2!}x+\frac{2^3}{3!}x^2+...+\frac{2^n}{n!}x^{n-1}+\frac{R_n(x)}{x})dx=$$

$$=(2x+\frac{2^2}{2!\cdot 2}x+\frac{2^3}{3!\cdot 3}x^2+\frac{2^4}{4!\cdot 4}x^4+...+\frac{2^n}{n!\cdot n}x^n)\Big|_0^1+\int\limits_0^1\frac{R_n(x)}{x}dx=$$

$$=2+\frac{2^2}{2!\cdot 2}+...+\frac{2^n}{n!\cdot n}+R_n,$$

где $R_n=\int\limits_0^1\frac{R_n(x)}{x}dx.$

Оценим R_n сверху:

$$|R_n|\le\int\limits_0^1\left|\frac{R_n(x)}{x}\right|dx\le\int\limits_0^1\frac{9\cdot 2^{n+1}}{(n+1)!}|x|^n\,dx=\frac{9\cdot 2^{n+1}\cdot|x|^{n+1}}{(n+1)!(n+1)}\Bigg|_0^1=\frac{9\cdot 2^{n+1}}{(n+1)!(n+1)}.$$

Теперь подберем n так, чтобы

$$\frac{9\cdot 2^{n+1}}{(n+1)!(n+1)}<0{,}001.$$

Для этого n будем иметь $|R_n|<0{,}001$ и требуемая точность

$$n=8 \qquad \frac{9\cdot 2^{9}}{9!\cdot 9}=\frac{4}{2835}>0{,}001;$$

$$n=9 \qquad \frac{9\cdot 2^{10}}{10!\cdot 10}=\frac{4}{15750}<0{,}001.$$

$$\int_0^1\frac{e^{2x}-1}{x}dx\approx 2+\frac{2^2}{2!2}+\frac{2^3}{3!3}+\frac{2^4}{4!4}+\frac{2^5}{5!5}+\frac{2^6}{6!6}+\frac{2^7}{7!7}+\frac{2^8}{8!8}+\frac{2^9}{9!9}\approx 3{,}7165,$$

$$3{,}7155<J<3{,}7175.$$

Необходимо взять в сумме 9 слагаемых, и необходимая точность будет достигнута.

Индивидуальные задания

Задание 1. Записать ряд в развернутой форме $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$, если задан общий член $a\ n$ ряда. Выражение для общего члена взять в таблице

n	a_n	n	a_n
1	2	3	4
1.	$\frac{n\cdot 2^n}{n!}$	2.	$\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{2\cdot 7\cdot 12\cdot\ldots\cdot(5n-3)}$
3.	$\frac{n^2}{(n+2)!}$	4.	$(-1)^n\cdot\frac{1+2^n}{n^3}$
5.	$\frac{(-1)^{n+1}}{n^2(n+1)^2}$	6.	$\frac{1}{n^2}\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}$
7.	$\frac{n^2}{n!}$	8.	$\frac{-1+2\cdot(-1)^{n+1}}{n!}$
9.	$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$	10.	$\frac{\cos\frac{2\pi n}{3}}{\sqrt{n^2+1}}$

Задание 2. Найти сумму ряда

n	a_n	n	a_n
1.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)(n+4)}$	2.	$\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{2}{(n-2)(n-4)}$
3.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^{n-1}}{6^{n+1}}$	4.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(5^n + 1)^2}{3^{3n-1}}$
5.	$\sum\limits_{n=7}^{\infty} \frac{2}{(n-4)(n-6)}$	6.	$\sum\limits_{n=8}^{\infty} \frac{3}{(n-4)(n-7)}$
7.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2^n)^2}{4^n}$	8.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} + 3^n}{7^{n+1}}$
9.	$\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{3}{n(n-3)}$	10.	$\sum\limits_{n=6}^{\infty} \frac{1}{(n-4)(n-5)}$

Задание 3. Исследовать сходимость ряда, применяя признак Даламбера, Коши (с радикалом) и интегральный признак Коши

n	a_n	a_n	a_n
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n (n-1)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n^2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$
2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2} \right)^n$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$
4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n (2n)!}{2n!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2} \right)^{n^2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+2}{(3n+5)\cdot 2^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+5} \right)^n$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$
6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1} \right)^{n^3}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot \ln^2(n+1)}$

7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\cdot \ln(n+3)}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{5n}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{(n^2+2)\cdot 2^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^6+4}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{5^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot \ln 2n}$

Задание 4. Вычислить с заданной точностью до 0,001

n	$f(x_0)$	$\int_0^b f(x)\,dx$
1	2	3
1	$\sqrt[3]{7}$	$\cos x^3$
2	$\sin 0{,}21$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
3	$\sqrt[3]{9}$	$\frac{\sin x}{x} - 1$
4	$\cos 0{,}22$	$\frac{\sin 2x}{2} - x$
5	$1/\sqrt{e}$	$\frac{\ln(1+x^2)}{x}$
6	$\ln 1{,}1$	e^{-2x^2}
7	$\cos 0{,}4$	$\frac{\operatorname{sh} x}{x} - \operatorname{ch} x$
8	$\sqrt[3]{10}$	$\cos\sqrt{x}$
9	$\ln 1{,}2$	$\cos(10x^2)$
10	$\sin 9°$	e^{-7x^2}

Контрольные вопросы

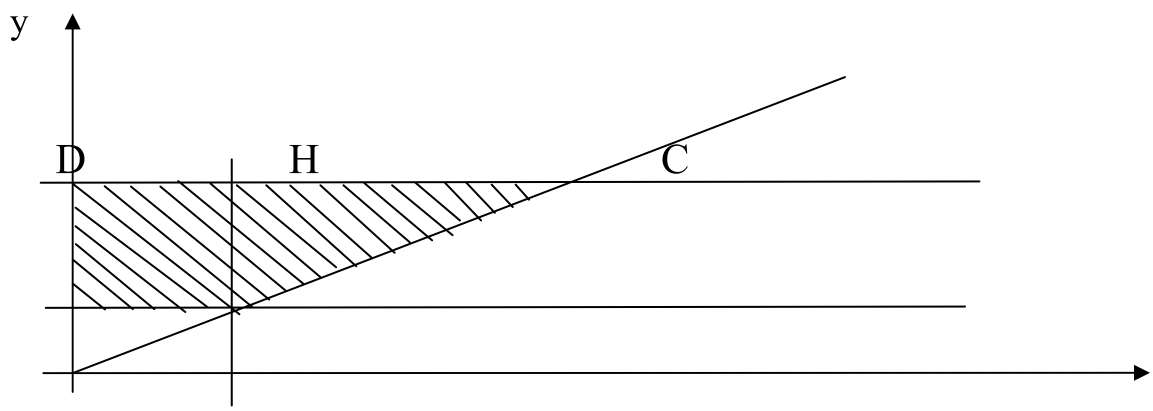
1. Что называется функциональным рядом?
2. Область сходимости функционального ряда.
3. Ряд Тейлора для функции $f(x)$ по степеням $x - a$.
4. Что называется степенным рядом?
5. Область сходимости степенного ряда. Теорема Абеля.
6. Оценка остатка функционального ряда.
7. Применение степенных рядов к приближенным вычислениям.
8. Теорема о непрерывности суммы функционального ряда.
9. Теорема о почленном интегрировании и почленном дифференцировании функционального ряда.
10. Равномерная сходимость степенного ряда. Теорема Вейерштрасса.
11. Разложение в ряд основных функций: e^x, Cos x, Sin x, ln(1+x), $(1+x)^m$.
12. Условия разложимости функций в ряд Тейлора.

Практическая работа 8. Кратные и криволинейные интегралы

Пример 1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x,y)\,dx .$$

Решение. См рисунок.



Область интегрирования органичена прямыми y = 1, y = 3, x =0, x = 2y. На рисунке она представляет трапецию.

При интегрировании в другом порядке, вначале по y, необходимо разбить область ABCD прямой BH, параллельной Oy на две части, так как нижняя линия границы этой области состоит из двух частей AB и BC, которые имеют уравнения y = 1 и y = x/2.

Поэтому интеграл при изменении порядка интегрирования окажется равным сумме двух интегралов

$$\int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x,y)\,dx = \int_0^2 dx \int_1^3 f(x,y)\,dy + \int_2^6 dx \int_{x/2}^3 f(x,y)\,dy.$$

Индивидуальные задания

Задание 1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле, сделав чертеж области интегрирования

№	Задание	№	Задание
1.	$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$	2.	$\int_0^3 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{3-y} f(x,y)dx$
3.	$\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$	4.	$\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$
5.	$\int_0^a dx \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$	6.	$\int_{R/2}^{2R} dy \int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x,y)dx$
7.	$\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$	8.	$\int_2^6 dx \int_{2x-4}^{x+2} f(x,y)dy$
9.	$\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy$	10.	$\int_0^3 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{6-2y} f(x,y)dx$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Предварительно сделать чертеж области интегрирования

№№	f(x,y)	Уравнения линий, ограничивающих область D
1	$\frac{y^2}{x}$	$y = x, y = 2x, x = 2, x = 4$
2	x^3y^2	$x^2 + y^2 = R^2$
3	$x^2 + y$	$y = x^2, y^2 = x$
4	$\frac{x^2}{y^2}$	$x = 2, y = x, yx = 1$
5	$\cos(x + y)$	$x = 0, y = \pi, y = x$
6	$\sqrt{1 - x^2 - y^2}$	$x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0$
7	$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, a > 1$	$y = x, y = -x, x^2 + y^2 = 1.$
8	$\sqrt{x^2 - y^2}$	$y = x, y = -x, x = 1$
9	$\lambda^{\frac{x}{y}}$	$y^2 = x, x = 0, y = 1.$
10	$\frac{x}{x^2 + y^2}$	$y = \frac{x^2}{2}, y = x$

Задание 3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной данными линиями

№№	Уравнения линий	№№	Уравнения линий
1.	$x = y^2 - 2y; x + y = 0$	2.	$3x^2 = 25y; 5y^2 = 9x$

3.	$y = 2 - x; y^2 = 4x + 4$	4.	$xy = 4; x + y = 5$
5.	$y^2 = 4x - x^2; y^2 = 2x$ (вне параболы)	6.	$x + y = 1; x + 3y = 1;$ $x = y; x = 2y$
7.	$3y^2 = 25x; 5x^2 = 9y$	8.	$\rho = 4\sin\varphi; \rho = 2\sin\varphi$
9.	$y = 4x - x^2; y = 2x^2 - 5x$	10.	$\rho = a\cos 2\varphi$

Задание 4. Вычислить объем тела, ограниченного данными поверхностями. Найти координаты центра масс этого тела в предположении, что оно однородно

№№	Уравнения поверхностей	№№	Уравнения поверхностей
1.	$z = 0; z = y; x = 0$ $x = 4; y = \sqrt{25 - x^2}$	2.	$z = 0; z = x^2; y = 0;$ $x + y = 4$
3.	$z = 0; z = 16 - x^2;$ $y = 0; x + y = 8; x = 0$	4.	$z = 0; z = 4\sqrt{y}; x = 0;$ $2x + y = 6$
5.	$z = 0; z = y^2;$ $x + 2y = 8; x = 0;$	6.	$z = 0; z = 9 - x^2; x = 0;$ $x + 2y = 8; y = 0;$
7.	$z = 0; z = 9 - x^2;$ $x = 0; y = 0;$ $2y + x = 6$	8.	$z = 0; z = 2y; x = 0;$ $x = 6; x + y = 9$
9.	$z = 0; z = 1 - x^2;$ $y = 0; y = 5 - x$	10.	$z = 0; z = y^2;$ $x^2 + y^2 = 9$

Задание 5

№1

Вычислить криволинейные интегралы:

1) $\int\limits_{AB} x^5 d\lambda$ по кривой $y = x^4$ от точки (0;0) до (1;1)

2) $\int\limits_{AB} xyd\lambda$ по дуге винтовой линии $x = 2\cos t, y = 2\sin t;\ 0 \le t \le \pi/2$.

3) $\int\limits_{AB} x^2 dx + \dfrac{dy}{y^2}$ по кривой $x = \dfrac{1}{y}$ от A(1;1) до B(4; 1/4).

4) $\int\limits_{AB} ydx - xdy$ по астроиде $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ (0 \le t \le \pi/2)$.

Вычислить поверхностные интегралы:

5) $\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z - \frac{1}{2})dS,$ S – часть поверхности $2z = 2 - x^2 - y^2$, отсеченная плоскостью Oxy.

6) $\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)dxdz,$ S – внутренняя сторона поверхности $2y = x^2$, отсеченная плоскостями y=2, z=0, z=1.

7) С помощью формулы Гаусса-Остроградского вычислить $\iint\limits_S (\sqrt{z} - x)dydz + (x - y)dxdz + (y^2 - z)dxdy,$ S – замкнутая поверхность 3x–2y+z=6, x=0, y=0, z=0.

№2

Вычислить криволинейные интегралы:

1) $\int\limits_{AB} \dfrac{x^3}{y^3} d\lambda$ по кривой $xy = 1$ между точками A(1;1) и B(2;1/2).

2) $\int\limits_{AB} (x - y)d\lambda$ по кривой $x = 3\cos t, y = 2\sin t,\ (0 \le t \le \pi)$.

3) $\int\limits_{AB} (x^2 + y)dx + (x + y^2)dy$ по отрезку от точки A(–1;1) до B(0;2).

4) $\int\limits_{AB} dx + ydy$ по кривой $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t),\ (0 \le t \le 2\pi)$

Вычислить поверхностные интегралы:

5) $\iint_S (x^2+y^2+z)dS$, S – верхняя половина сферы $x^2+y^2+z^2=9$.

6) $\iint_S (2x+3y+4z)dxdy$, S – внешняя сторона плоскости $x+y+z-6=0$, лежащая в первом октанте.

7) С помощью формулы Гаусса-Остроградского вычислить $\iint_S xyddz+zydxdz+xzddy$, S – внешняя сторона куба $-1\le x\le 1\ 0,\ 0\le y\le 2,\ -2\le z\le 0$.

№3

Вычислить криволинейные интегралы:

1) $\int_{AB} y^2 d\lambda$ по кривой $y=e^x$ от точки A(0;1) до B(1;e).

2) $\int_{AB} y d\lambda$ по кривой $x=t-\sin t, y=1-\cos t\quad (0\le t\le \pi)$.

3) $\int_{AB} xdy-ydx$ по кривой $y=x^3$ от (1;1) до (3; 27).

4) $\int_{AB} ydy-xdx$ по кривой $x=\sqrt{\cos t}, y=\sqrt{\sin t}$, $(0\le t\le \pi/2)$.

Вычислить поверхностные интегралы:

5) $\iint_S z(x+y)dS$, S – часть поверхности $z=\sqrt{4-y^2}$, отсекаемая плоскостями x=0, x=2.

6) $\iint_S (x^2+y^2+z^2)dxdz$, S – внешняя сторона поверхности $y=\sqrt{x^2+z^2}$, отсеченная плоскостями y=0, y=1.

7) С помощью формулы Гаусса-Остроградского вычислить $\iint_S (e^y+2x)dydz+(x-y)dxdz+(2z-1)dxdy$,

S – внешняя сторона пирамиды, отсеченная плоскостями $x+2+z=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

№4

Вычислить криволинейные интегралы:

1) $\int\limits_{AB} \sqrt{1+x^4}\,d\lambda$ по кривой $3y = x^3$ $(1 \le x \le 2)$

2) $\int\limits_{AB} y\,d\lambda$ по циклоиде $x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t),$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

3) $\int\limits_{AB} x^3dx + x^2dy$ по кривой $y = x^2$ от A(1;1) до B(3;9).

4) $\int\limits_{AB} x^2ydx + y^2xdy$ по кривой $x = t, y = t^3$ $(0 \le t \le 1)$.

Вычислить поверхностные интегралы:

5) $\iint\limits_{S} \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\,dS,$ S –часть конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, заключенной между плоскостями z=0,z=1.

6) $\iint\limits_{S} (x^2 - 2y^2 + 6z)dxdy,$ S – внешняя сторона поверхности $y^2 = 6z,$ отсеченная плоскостями z=6, x=0, x=3.

7) С помощью формулы Гаусса-Остроградского вычислить $\iint\limits_{S} xdydz + ydxdy + zdxdy,$ S – поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ $0 \le z \le 2$.

№5

Вычислить криволинейные интегралы:

1) $\int\limits_{AB} x\,d\lambda$ по кривой $2y = x^2$ от точки A(0;0) до B(1;1/2)

2) $\int\limits_{AB} (x^2 + y^2)d\lambda$ по кривой $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$, $-1 \le t \le 0$.

3) $\int\limits_{AB} (x + y)dx - xdy$ по прямой, соединяющей точки A(0;0) и B(4;2).

4) $\int\limits_{AB} xydx + y^2dy$ по кривой $x = t^2, y = t,$ $(1 \le t \le 2)$.

Вычислить поверхностные интегралы:

5) $\iint\limits_{S} (7z^2 - 3x^2 - 3y^2)dS,$ S – часть поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

между плоскостями z=1, z=2.

6) $\iint\limits_S xyzdxdz,$ S – внешняя сторона поверхности $2x+3y+z-6=0,$ ограниченной плоскостями x=0, y=0, z=0.

7) С помощью формулы Гаусса-Остроградского вычислить $\iint\limits_S (x^2-y)dydz+(y+e^z)dzdx+(z^3-\ln x)dxdy,$ S – внешняя сторона прямоугольного параллелепипеда $1 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 1,$ $0 \le z \le 2$.

Задание 6. Вычислить криволинейные интегралы:

1) $\int\limits_{AB}(x+y)d\lambda$ по отрезку прямой, соединяющей точки A(1;0) и B(2;3)

2) $\int\limits_{AB}\sqrt{x^2+y^2}d\lambda$ по кривой $x=\cos t+t\sin t,\quad y=\sin t-t\cos t,$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

3) $\int\limits_{AB}(x^2-2xy)dx+(2xy+y^2)dy$ по параболе кривой $y=x^2$ от A(1;1) до B(2;4).

4) $\int\limits_{AB}\dfrac{x^2dy-xydx}{y^2}$ по кривой $y=t^2, x=t-1\quad(-1 \le t \le 1)$.

Вычислить поверхностные интегралы:

2) $\iint\limits_S (z^2+x^2+y^2)dS,$ S –полусфера $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

3) $\iint\limits_S (\sqrt{z}+1+x)dydz,$ S – внешняя поверхность конуса $z^2=x^2+y^2,$ ограниченного плоскостью z=1, z=0.

7) С помощью формулы Гаусса-Остроградского вычислить $\iint\limits_S (e^{-z}-x)dydz+(xz+3y)dxdz+(z+x^2)dxdy,$ S – внешняя сторона замкнутой поверхности: $2x+y+z=2,\ x=0, y=0, z=0$

№7

Вычислить криволинейные интегралы:

1) $\int\limits_{AB} x dS$ по кривой $2y = x^2$ от точки $A(0;0)$ до $B(1;1/2)$

2) $\int\limits_{AB} \frac{d\lambda}{x^2 + y^2 - x}$ по кривой $x = 3\cos t, y = 3\sin t$ $(0 \le t \le \pi)$.

3) $\int\limits_{AB} (x^2 + y)dx + y^3 dy$ по дуге кривой $y = e^x$ от $A(0;1)$ до $B(1;e)$.

4) $\int\limits_{AB} \left(\frac{x^2}{y} dx - \frac{y^2}{x} dy \right)$ по кривой $x = \frac{1}{t}, y = t^2, (1 \le t \le 2)$.

Вычислить поверхностные интегралы:

5) $\iint\limits_{S} (x^2 + y^2 + 4z)dS$, S – часть поверхности

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$, отсеченная плоскостями $z=1$, $z=2$.

6) $\iint\limits_{S} (x^4 - y)dydz$, S – внешняя поверхность параболоида

$y = x^2 + z^2$, ограниченного плоскостью $y=1$.

7) С помощью формулы Гаусса-Остроградского вычислить

$$\iint\limits_{S} (\cos z + \frac{x}{4})dydz + (e^x + \frac{y}{4})dxdz + (\frac{z}{4} - 1)dxdy,$$

S – внешняя поверхность пирамиды: $x + 2y + 3z - 6 = 0$,

$x = 0, y = 0, z = 0$

№8

Вычислить криволинейные интегралы:

1) $\int\limits_{AB} 4x^3 d\lambda$ по кривой $3y = x^3$ от $A(0;0)$ до $B(1;1/3)$

2) $\int\limits_{AB} \sqrt{x^2 + y^2} d\lambda$ по кривой $x = 2(\cos t + t\sin t)$, $y = 2(\sin t - t\cos t)$, $(0 \le t \le 2\pi)$.

3) $\int\limits_{AB} (x^3 - y^2)dx + ydy$ по дуге кривой $y = 2^x$ от $A(0;1)$ до $B(1;2)$.

4) $\int\limits_{AB} \left(\frac{x^3}{y^2} dx - \frac{y}{x} dy \right)$ по кривой $x = t^3, y = \frac{1}{t}$ $(1 \le t \le 2)$.

Вычислить поверхностные интегралы:

5) $\iint\limits_S (3x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 4)dS,$ S – часть поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2},$ отсеченная плоскостями z=0, z=2

6) $\iint\limits_S (3x - 2y)dydz,$ S – внешняя поверхность конуса $z^2 = 4(x^2 + y^2)$, отсекаемая плоскостью z=2.

7) С помощью формулы Гаусса-Остроградского вычислить

$$\iint\limits_S (5x^2 - 6y)dydz + (11x^2 + 2y)dxdz + (x^2 - \sqrt{z})dxdy,$$

S – внешняя поверхность прямоугольного параллелепипеда $-1 \le x \le 1; \quad 0 \le y \le 2; \quad 0 \le z \le 1.$

Контрольные вопросы

1. Двойной интеграл. Области интегрирования.
2. Двойной интеграл в полярных и криволинейных координатах.
3. Якобиан преобразования координат.
4. Геометрические приложения двойного интеграла.
5. Тройной интеграл и его приложения.
6. Векторное и скалярное поля.
7. Понятие дивергенции и ротора.
8. Теорема Остроградского-Гаусса.

Список рекомендуемой литературы

1. Ильин В.А. Высшая математика : учебник / В. А. Ильин, А. В. Куркина ; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова. - 3-е изд., перераб. и доп. - М. : Проспект, 2011. - 608 с. - Текст : непосредственный
2. Балдин, К.В. Высшая математика: учебник / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев; под общ. ред. К.В. Балдина. – 2-е изд., стер. – Москва : Флинта, 2016. – 361 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=79497 (дата обращения: 14.04.2020). – Текст: электронный.

3. Магазинников, Л.И. Высшая математика: дифференциальное исчисление / Л.И. Магазинников, А.Л. Магазинников ; Томский Государственный Университет Систем Управления и Радиоэлектроники (ТУСУР). – Томск : ТУСУР, 2017. – 188 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=481033 (дата обращения: 13.04.2020). – Текст : электронный.
4. Шапкин, А.С. Задачи с решениями по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике , математическому программированию : учебное пособие / А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. – 8-е изд. – Москва : Дашков и К°, 2017. – 432 с. – (Учебные издания для бакалавров). – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450779 (дата обращения: 14.04.2020). – Текст : электронный.
5. Ильин В.А. Линейная алгебра : учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. - 6-е изд., стереотип. - Москва : Физматлит, 2010. - 278 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 4). - URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974 (дата обращения 01.09.2021) . - Режим доступа: по подписке. - Текст : электронный.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие. Т. 1 / Н. С. Пискунов. - Изд., стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2007. - 416 с. - Текст : непосредственный.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие. Т.2 / Н. С. Пискунов. – М. : Интеграл-Пресс, 2007. – 544 с. - Текст : непосредственный.
8. Тютюнов Д. Н. Неопределённый интеграл. Техника интегрирования [Текст] : [учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям "Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроитель-ных производств", "Автоматизация технологических процессов и производств"] / Д. Н. Тютюнов, Л. И. Студеникина. – Старый Оскол: ТНТ, 2016. – 115 с.
9. Тютюнов, Д.Н. Функции нескольких переменных. [Текст]: учебное пособие / Д. Н. Тютюнов, Л. И. Студеникина, Е.В.Скрипкина. – Курск: ЗАО «Университетская книга», 2016. – 158 с.