МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_________ О. Г. Локтионова
«___» декабря ________ 2015 г.

Элементы теории вероятностей

Методические указания и индивидуальные задания

Курск 2015

УДК 51-74

Составители: Л.И.Студеникина, Д.Н.Тютюнов

Рецензент

Кандидат физ-мат. наук, доцент кафедры
высшей математики В.*И.Дмитриев*

Элементы теории вероятностей: методические указания и индивидуальные задания предназначены для организации самостоятельной работы студентов специальностей «Таможенное дело», «Международные отношения» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Л.И.Студеникина, Д.Н.Тютюнов. Курск, 2015. 45 с.: табл. 4. Библиогр.: с.45.

В данной работе содержатся краткие теоретические положения, образцы выполнения типовых задач, 30 вариантов индивидуальных заданий.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______ . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 50 экз. Заказ____. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет3
05040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Введение

Данные методические указания предназначены для формирования умений и навыков у студентов по разделу «Теория вероятностей ».

Наличие таких указаний и индивидуальных заданий, имеющих профессиональную направленность в условиях сокращения аудиторных часов, представляется своевременным.

Теоретическое обеспечение по данному разделу математики достаточно полно отражено в учебных пособиях, предусмотренных рабочими программами. Тем не менее, в данной работе даются краткие теоретические сведения и разобрано достаточно большое количество задач, что очень удобно при организации самостоятельной работы.

Для подготовки студента к защите выполненных индивидуальных заданий представлен список литературы, отражающей в полной мере теоретический материал по данной теме.

1 Классификация событий

Опытом*, или *испытанием, называют всякое осуществление определенного комплекса условий или действий, при которых происходит соответствующее явление. Например, бросание игрального кубика или монеты, выстрел из оружия и т.д. Возможный результат опыта называют ***элементарным событием***, или ***исходом***. Множество **Ω** всех возможных взаимоисключающих исходов опыта ***называется пространством элементарных событий*** или ***пространством исходов***. Событие вообще – это множество всех таких исходов, которые вызывают его появление. О таких исходах говорят, что они благоприятствуют событию. События обозначаются заглавными буквами латинского алфавита A, B, C …. . К примеру, при однократном бросании монеты *исход Г*– выпадение герба, *исход Р*– выпадение решки, пространство **Ω**={Г,Р} ; в *опыте* с оружием *исход* A–попадание в мишень, B–промах. В опыте с кубиком *исход* A_1 –выпало значение 1, A_2 –значение 2, A_3 –значение 3, A_4 –значение 4, A_5 –значение 5, A_6 –значение 6, поэтому пространство элементарных событий **Ω**={1,2,3,4,5,6}. Событию A –"выпало нечетное число очков" – благоприятствуют исходы A_1, A_3, A_5.

Событие называется ***достоверным*** в данном опыте, если оно обязательно наступит в результате данного опыта. Например, выпадение не менее одного очка при бросании игральной кости.

Событие называется ***невозможным***, если оно заведомо не произойдет в результате проведения опыта. Так выпадение числа 7 при броске игральной кости является *невозможным*.

Два события называются ***совместимыми*** в данном опыте, если появление одного из них не исключает появление другого в этом опыте, то есть, если имеется хотя бы один исход, который благоприятствует как одному событию, так и другому. Выпадение орла или решки при подбрасывании двух монет – *совместимые* события.

Два события называются ***несовместимыми*** в данном опыте, если они не могут произойти вместе при одном и том же испытании. *Несовместимыми* являются попадание и промах при одном выстреле.

Два события называются ***противоположными***, если появление одного из них равносильно не появлению другого. Например, противоположными являются события выпадение орла или решки при одном подбрасывании симметричной монеты.

События называют ***равновозможными***, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое. Например, при подбрасывании игрального кубика события A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 являются равновозможными.

Суммой $A_1+A_2+\ldots+A_n$ нескольких событий $A_1, A_2,\ldots, A_n$ называется объединение множеств $A_1 \cup A_2\cup\ldots \cup A_n$. Таким образом, событию $A_1+A_2+\ldots+A_n$ благоприятствуют те и только те исходы, каждый из которых благоприятствует хотя бы одному из событий $A_1, A_2,\ldots, A_n$, то есть событие $A_1+A_2+\ldots+A_n$ заключается в том, что происходит хотя бы одно из событий $A_1, A_2,\ldots, A_n$.

Произведением нескольких событий $A_1, A_2,\ldots, A_n$ называется пересечение множеств $A_1\cap A_2\cap \ldots \cap A_n$. Произведение $A_1A_2\ldots A_n$ заключается в том, что происходит каждое из событий $A_1, A_2,\ldots, A_n$.

Несколько попарно несовместных событий образуют **полную группу**, если в результате испытания никакие другие события, кроме перечисленных, не могут произойти, то есть $A_1+A_2+\ldots+A_n = \Omega$.

2 Классическая вероятность. Комбинаторика

Комбинаторика изучает способы подсчета числа элементов в конечных множествах. Формулы комбинаторики используют при непосредственном вычислении вероятностей. Базовыми конфигурациями комбинаторики являются: перестановки, размещения, сочетания.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же "n" различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок конечного множества из "n" элементов равно $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot n$ обозначается P_n, таким образом $P_n = n!$

Пример. Сколько существует различных способов составить очередь из 5 человек?

Решение. Очередь – это перестановка из 5 элементов (человек), поэтому количество различных очередей равно $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ способам.

***Размещениями* из n элементов по m** называют наборы, содержащие m различных элементов из данных n элементов, и отличающиеся либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений из n элементов по m определяется формулой

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример. Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три различные должности из десяти кандидатов?

Решение. Задача сводится к нахождению числа размещений из 10 элементов по 3:

$$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

***Сочетаниями* из n элементов по m** называют наборы, содержащие m элементов из данных n элементов и отличающиеся составом элементов (порядок расположения элементов, то есть сочетание – это просто подмножество множества заданных элементов). Число всех сочетаний из n по m выражается формулой

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n} = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

Пример. На таможенном посту смена состоит из 6 человек. Сколькими способами можно отобрать из 10 сотрудников одну смену?

Решение. Смена – это сочетание из 10 человек по 6. Поэтому искомое число способов равно

$$C_{10}^6 = \frac{10!}{(10-6)!6!} = 210.$$

В комбинаторике рассматриваются также конфигурации, в которых допускаются неоднократные повторения одних и тех же элементов. Например, число 1231241 представляет собой перестановку, в которой элемент 1 повторяется 3 раза, элемент 2 –2 раза, 3 и 4 по одному разу. Это перестановки с повторениями (порядок расположения элементов важен), вычисляются по формуле

$$P_n(n_1, n_2, ...) = \frac{n!}{n_1! n_2! ...}, \quad \text{где} \quad n_1 + n_2 + ... = n.$$

Если некоторые элементы повторяются, то в этом случае комбинации с повторениями вычисляют по другим формулам. Например, если среди "n" элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д., то число перестановок с повторениями.

Если в размещениях из n элементов по m разрешено неоднократное использование любого элемента, то получаются наборы, которые называются размещениями с повторениями из n элементов по m. Число таких размещений равно n^m. Например, количество четырехзначных чисел, все цифры которых нечетны, равно 5^4=625, так как любое такое число представляет собой размещение из 5 цифр 1,3,5,7,9 по 4 (3531, 1977 и т.п.).

Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех исходов. При этом предполагается, что все исходы равновозможны.

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число исходов, благоприятствующих A;

n – число всех возможных исходов испытания.

Из определения вероятности вытекают ее свойства.

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице.

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Пример. Из 1000 таможенных деклараций, лежащих в стопке, 80 заполнены неверно. Какова вероятность, что наудачу взятая декларация, будет заполнена верно?

Решение.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

m=1000–80=920, число деклараций, заполненных верно. Искомая вероятность $P(A)=\frac{920}{1000}=0{,}92$.

3 Правила сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Теорема сложения вероятностей любых событий.

Вероятность появления хотя бы одного из двух событий, равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Если при вычислении вероятности события никаких ограничений не полагается, то такую вероятность называют **безусловной;** если же налагаются дополнительные условия, то вероятность события называют **условной.** Например, часто вычисляют вероятность события В при дополнительном условии, что произошло событие А.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события В, вычисленную в предположении, что событие А уже наступило. Условная вероятность события В при условии, что событие А уже наступило, равна

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}, \qquad P(A)>0.$$

Теорема умножения вероятностей. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило:

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B).$$

Событие А называется независимым от события В, если $P(A)=P_в(A)$, то есть вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет. А не зависит от В, только если В не зависит от А. В случае такой ситуации говорят просто о независимых событиях.

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

Пример. В коробке имеется 5 флагов стран-членов БРИКС. Флаги вынимают по одному и выкладывают в ряд. Какова вероятность, что последовательность будет такая: флаг России, ЮАР, Китая, Индии, Бразилии.

Решение. Всего 5 флагов. Вероятность того, что первым будет флаг России равна $\frac{1}{5}$. Теперь в коробке осталось 4 флага, поэтому вероятность того, что вторым будет флаг ЮАР равна $\frac{1}{4}$, затем осталось 3 флага и вероятность вытащить флаг Китая равна $\frac{1}{3}$, Индии − $\frac{1}{2}$, Бразилии − 1. Таким образом, искомую вероятность P найдем по теореме умножения $P=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{120}$.

4 Формула полной вероятности. Формулы Байеса

Формула полной вероятности является следствием основных теорем сложения и умножения.

Теорема. Пусть событие А может произойти вместе с одним из событий B_i, образующих полную группу несовместных событий. Пусть известны вероятности $P(B_i)$ этих событий (т.е. гипотез) B_i и условные вероятности $P_{B_i}(A)$ события А при гипотезах B_i. Тогда полная вероятность события А вычисляется как сумма произведений вероятности каждой гипотезы на соответствующую условную вероятность события А

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)$$

Пример. Собирается определенное число собак для таможенной службы из двух питомников. Первый питомник поставляет 60% всех собак для службы на данной границе, второй − 40%. Вероятность предоставления первым питомником собак с хорошим умением равна 0,9, вторым питомником − 0,8. Найти вероятность того, что случайно выбранная из предоставленных собак будет обладать этим умением.

Решение. Обозначим через А событие, состоящее в том, что случайно выбранная собака обладает хорошим умением акцентироваться на запахах, а через B_1,B_2 –гипотезы, состоящие в том, что это собака из первого, или второго, соответственно, питомника. Из условия задачи следует, что $P(B_1)=0,6$; $P(B_2)=0,4$; $P_{B_1}(A)=0,9$; $P_{B_2}(A)=0,8$.

Используя формулу полной вероятности, получаем $P(A)=0,6\cdot 0,9+0,4\cdot 0,8=0,86$.

Теорема. Пусть событие А может произойти с одним из несовместных событий B_i, образующих полную группу. Поскольку заранее неизвестно, какое из этих событий наступит, их называют гипотезами. Вероятности этих гипотез до опыта известны и равны $P(B_i)$. Произведем опыт, в результате которого произошло некоторое событие А. Тогда

$$P_A(B_i)=\frac{P_{B_i}(A)\cdot P(B_i)}{P(A)},\ i=1,2,\ldots,n.$$

Эти формулы называют ***формулами Байеса***.

Пример. Два вуза готовят сотрудников таможни. Первый вуз готовит 75% всех сотрудников данной таможни, второй – 25%. Первый вуз выпускает 95% высококвалифицированных кадров, второй – 90%. Выбранный наугад сотрудник этой таможни оказался хорошим специалистом. Найти вероятность того, что он окончил второй вуз.

Решение. Обозначим через А событие, состоящее в том, что выбранный сотрудник - хороший специалист, B_1, B_2 –гипотезы, состоящие в том, что выбранный наугад сотрудник – выпускник первого, или второго вуза соответственно. При этом по условию, $P(B_1)=0,75$; $P(B_2)=0,25$; $P_{B_1}(A)=0,95$; $P_{B_2}(A)=0,9$. В соответствии с формулами Байеса при n=2 имеем $P_A(B_2)=\dfrac{0{,}25\cdot 0{,}9}{0{,}75\cdot 0{,}95+0{,}25\cdot 0{,}9}=0{,}24.$ Обратите внимание на то, что знаменатель $P(A)=0{,}75\cdot 0{,}95+0{,}25\cdot 0{,}9$ вычисляется по формуле полной вероятности.

5 Повторные испытания

На практике зачастую приходится сталкиваться с ситуациями, которые можно представить в виде многократно повторяющихся испытаний при определенном комплексе условий. При этом важным бывает узнать результат не единичного опыта, а серии одинаковых испытаний.

Если вероятность наступления события А в каждом испытании не меняется в зависимости от исходов других, то такие испытания называются независимыми относительно события А. Если независимые повторные испытания проводятся при одном и том же комплексе условий, то вероятность наступления события А в каждом испытании одна и та же. Описанная последовательность независимых испытаний носит название **схемы Бернулли**.

Теорема. Пусть производится "n" независимых опытов, в каждом из которых может появиться или не появиться некоторое событие А, вероятность появления события А в каждом опыте равна "p", а вероятность не появления $q=1-p$. Тогда вероятность того, что событие А появится в n независимых испытаниях ровно k раз, равна

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Эта формула называется **формулой Бернулли**.

Пример. При заполнении таможенной декларации надо ответить на 6 вопросов. Вероятность правильного ответа на каждый вопрос 0,9. Найти вероятность правильного ответа на 5 из поставленных вопросов.

Решение. Вероятность события А (правильный ответ при заполнении декларации) $p=0{,}9$, тогда $q=1-0{,}9=0{,}1$. Искомая вероятность равна $P_6(5)=C_6^5\cdot 0{,}9^5\cdot 0{,}1^{6-5}=6\cdot 0{,}591\cdot 0{,}1=0{,}354.$

Наивероятнейшим числом появления события А в n независимых испытаниях называется такое число k_0, для которого вероятность $P_n(k_0)$ превышает или, по крайней мере, не меньше вероятности каждого из остальных возможных чисел k появления события А, то есть $P_n(c) \geq P_n(k)$. Для определения наивероятнейшего числа не обязательно вычислять вероятности возможных чисел появлений события, достаточно знать число испытаний n и вероятность появления события А в отдельном испытании. Если произведено "n" независимых испытаний и вероятность появления события А в каждом из них равна $p \neq 0$, то наивероятнейшее число k_0 заключено в пределах $np - q \leq k_0 \leq np + p$, где $q = 1 - p$.

Пример. Вероятность получения удачного результата при досмотре перевозимого груза на пограничном таможенном пункте (обнаружение в грузе запрещенных веществ) равна 0,75. Найти наивероятнейшее число положительных результатов, если общее количество досмотров за одну смену равно 10.

Решение. В этом примере n=10, p=0,75, q=0,25. Неравенство имеет вид $10 \cdot 0{,}75 - 0{,}25 \leq k_0 \leq 10 \cdot 0{,}75 + 0{,}75$, $7{,}25 \leq k_0 \leq 8{,}25$. Только одно целое число является решением этого двойного неравенства – число $k_0=8$.

Если число испытаний n велико, то вычислять вероятности по формуле Бернулли становится сложно. В этих случаях используют формулы для приближенного значения вероятностей $P_n(k)$.

Локальная теорема Лапласа.

Если вероятность "p" появления события А в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие А появится в "n" испытаниях ровно "k" раз, выражается приближенной формулой

$$P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\varphi(x)$ − функция четная, ее значения протабулированы и сведены в таблицу, в зависимости от значений "x". Если $x \geq 4$, то $\varphi(x) = 0$.

Пример. Вероятность поражения мишени биатлонистом при одном выстреле p=0,85. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах спортсмен поразит мишень 90 раз.

Решение. $n = 100; \quad p = 0{,}85; \quad q = 0{,}15; \quad k = 90.$

$$P_{100}(90) \cong \frac{1}{\sqrt{0{,}15 \cdot 100 \cdot 0{,}85}} \cdot \varphi(x).$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = 1{,}401.$$

$$\varphi(x) = \varphi(1{,}401) = 0{,}1497$$

$$P_{100}(90) \cong \frac{0{,}1497}{3{,}57} = 0{,}042.$$

Интегральная теорема Лапласа

Теорема. Если вероятность "p" наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1; k_2)$ того, что событие A появится в "n" испытаниях в пределах от "k_1" до "k_2" раз, равна

$$P_n(k_1; k_2) \cong \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \qquad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

$\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$ это так называемая «приведенная» функция Лапласа. $\Phi(x)$ − нечетная функция, ее значения протабулированы и сведены в таблицу. В таблице приведены значения интеграла от x=0 до x=5. Для x>5 можно принять $\Phi(x) = 0{,}5$.

Пример. Вероятность выхода из строя за смену одного станка равна 0,1. Чему равна вероятность того, что из строя выйдут от 2 до 12 станков, если в наличии их 100.

Решение.

а) $p=0{,}1$; $q=0{,}9$; $k_1=2$; $k_2=12$; $n=100$.

$$x_1=\frac{2-100\cdot 0{,}1}{\sqrt{100\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}\cong -2{,}66,\quad x_2=\frac{12-100\cdot 0{,}1}{\sqrt{100\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}\cong 0{,}67,$$

$$\Phi(0{,}67)=0{,}2486,\quad \Phi(-2{,}66)=-\Phi(2{,}66)=-0{,}4961$$

$$P_{100}(2;12)\cong 0{,}2486-(-0{,}4961)=0{,}7447.$$

Погрешность указанной формулы не превосходит $\frac{2}{\sqrt{npq}}$, так что она является довольно точной при больших значениях npq.

6 Дискретная случайная величина

Случайной величиной называют переменную величину, которая принимает значения, зависящие от исходов испытания (то есть в зависимости от случая).

На практике часто встречаются так называемые дискретные случайные величины. Случайная величина, принимающая различные значения, которые можно записать в виде конечной или бесконечной последовательности, называется ***дискретной случайной величиной***.

Случайные величины обозначаются заглавными буквами латинского алфавита X,Y,Z,…, а их значения строчными буквами. Законом распределения дискретной случайной величины называется соответствие между значениями $x_1,x_2,\ldots,x_n$ (пусть число значений конечно) этой случайной величины и их вероятностями $p_1,p_2,\ldots,p_n$. Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан таблично, аналитически, графически. При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая – их вероятности.

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

В одном испытании случайная величина принимает одно и только одно возможное значение, значит, события $X=x_1;\ldots;X=x_n$

образуют полную группу, следовательно, сумма вероятностей этих событий равна единице: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Пример. В связке из четырех ключей, только один подходит к сейфу. Попытки открыть замок повторяют до тех пор, пока не откроют сейф. Построить закон распределения для случайной величины X – числа опробованных ключей.

Решение. Число опробованных ключей может быть равно 1,2,3,4. Если X=1, то сейф открыли с первой попытки, причем вероятность $p(x=1)=\frac{1}{4}$. Если использовали два ключа: $p(x=2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$. (Первый не подошел). При использовании трех ключей (первый и второй не подошли, подошел третий ключ) вероятность равна $p(x=3)=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. Вероятность того, что необходимый ключ был последним, то есть попыток 4: $p(x=4)=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}$.

Закон распределения имеет следующий вид

x	1	2	3	4
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Причем, $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$.

Функцией распределения случайной величины X называется функция действительной переменной x, определяемая равенством $F(x)=P(X<x)$, где $P(X<x)$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x.

Вероятность того, что случайная величина X примет значения из полуинтервала $[\alpha,\beta)$, равна разности значений ее функции распределения F(x) на концах этого полуинтервала:

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Пример. Построить функцию распределения F(x) для случайной величины X из предыдущего примера.

Решение. Случайная величина **X** имеет четыре значения 1,2,3,4, которые делят числовую ось на пять интервалов:

(-∞,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,+∞). Если $X \le 1$, то неравенство $X<x$ невозможно и $F(x)=0$, при $1<x\le 2$

$F(x)=1/4$, при $1<x\le 2$

$F(x)=1/4+1/4=1/2$, при $3<x\le 4$

$F(x)=1/2+1/4=3/4$, при $x>4$

$F(x)=3/4+1/4=1.$

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i.$$

Дисперсией дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$$D[X]=M[X-M[X]]^2.$$

Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания

$$D[X]=M[X^2]-[M[X]]^2.$$

7 Непрерывная случайная величина

Случайная величина, принимающая все значения из некоторого промежутка, называется ***непрерывной случайной величиной***.

Функция распределения $F(x)=P(X<x)$ непрерывной случайной величины является непрерывно дифференцируемой.

Производная от функции распределения непрерывной случайной величины X называется плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=F'(x).$$

Следовательно, справедливо равенство

$$P(\alpha < X < \beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Связь между функцией распределения и плотностью распределения вероятностей устанавливается формулой

$F(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Основные свойства плотности распределения вероятности:

1) $f(x)\geq 0$

2) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

3) Если все возможные значения случайной величины X лежат внутри интервала (a,b), то $\int_{a}^{b} f(x)dx = 1$.

Математическое ожидание (среднее значение) непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку [a;b], выражается неопределенным интегралом

$$M[X] = \int_{a}^{b} x\, f(x)dx.$$

Если возможные значения случайной величины разбросаны по всей оси Ox, то

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx.$$

Дисперсией непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата её отклонения от среднего значения. Если возможные значения X принадлежат отрезку [a;b], то

$$D[X] = \int_{a}^{b} [x - M[X]]^2 \cdot f(x)dx.$$

Если возможные значения случайной величины разбросаны по всей оси OX, то

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - M^2[X].$$

9 Индивидуальные задания

Задание 1 − Комбинаторика

1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 2,5,6,7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза.
2. У Петра пятеро друзей: Саша, Дима, Олег, Федя, Сергей. Петру подарили три пригласительных билета на концерт. Укажите все возможные варианты выбора двух друзей для похода на концерт. Сколько всего таких вариантов?
3. Находясь в условиях задачи №2, Петр решил все пригласительные билеты отдать друзьям. Какие при этом возможны варианты? Сколько таких вариантов?
4. Из цифр 1,2,3 составьте все возможные двузначные числа при условии, что: а) цифры не повторяются; б) цифры могут повторяться.
5. На международную конференцию прибыло 25 представителей различных стран. Однако, в виду регламента выступить с докладом смогут лишь 15 участников конференции. Сколькими способами можно выбрать этих 15 выступающих.
6. В отделе МИДа 12 сотрудников владеют китайским языком и 7 - арабским. Для проведения конференции требуется выделить 4 сотрудников, владеющих китайским, и 2 – арабским. Сколькими способами это можно сделать?
7. Почтальон должен разнести 5 писем в 5 различных организаций. Сколько маршрутов он может выбрать?
8. Сколькими способами могут распределиться призовые места среди 9 участников спортивных соревнований?
9. Сколькими способами можно сшить трехцветный флаг с горизонтальными полосами, если имеется материал из шести различных цветов?
10. Сколькими способами 8 человек могут встать в очередь в железнодорожную кассу за билетами?
11. Сколько шестизначных чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6?
12. Сколько существует шестизначных телефонных номеров, в которых все цифры различные и первая цифра отлична от нуля?

13. В шахматном турнире участвуют 9 человек. Каждый из них сыграл с каждым по одной партии. Сколько всего партий было сыграно?
14. На станции 8 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 5 поездов?
15. Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры различны и первая цифра отлична от нуля?
16. Сколькими способами 5 студентов, сдающих экзамен, могут занять места в аудитории, в которой стоят 16 одноместных столов?
17. В группе 6 студентов успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать двух студентов для участия в олимпиаде по математике?
18. В группе 12 парней и 7 девушек. Для уборки территории требуется выделить 4 парня и 2 девушки. Сколькими способами это можно сделать?
19. Сколькими способами можно выбрать три лица на три различные должности из 11 кандидатов?
20. Сколькими различными способами могут разместиться за круглым столом 5 человек?
21. Сколькими способами можно выбрать три лица на три одинаковые должности из 10 кандидатов?
22. Из отдела, в котором работают заведующий отделом и 7 сотрудников, в командировку должны поехать 3 человека. Сколькими способами это можно сделать, если: а) заведующий отделением должен ехать в командировку; б) заведующий отделением не должен ехать в командировку.
23. Девушка помнит, что телефон подруги оканчивается цифрами 9,4,3, но забыла, в каком порядке эти цифры следуют. Указать наибольшее число вариантов, которые ей придется перебрать, чтобы дозвониться подруге.
24. Сколькими способами могут быть расставлены 8 участников финального забега на восьми беговых дорожках?
25. На соревнования по легкой атлетике приехала команда из 12 спортсменок. Сколькими способами тренер может определить, кто из них побежит в эстафете 4 на 100 м на первом, втором, третьем и четвертом этапах?

26. В книжном магазине продается 6 различных наборов, посвященных олимпийской тематике. Сколькими способами можно выбрать три из них?
27. Сколько существует выражений, тождественно равных произведению abcde, которые получаются из него перестановкой множителей.
28. В читальном зале студенту предложили на выбор из новых поступлений 10 книг и 5 журналов. Сколькими способами можно выбрать 3 книги и 2 журнала?
29. Сколькими способами можно распределить 7 разных книг между семью студентами?
30. В комнате имеется 6 стульев. Сколькими способами можно разместить на них 6 приглашенных дипломатов?

Задание 2 − Классическая вероятность

1. Из 18 собранных телевизоров 4 оказались с дефектами. Какова вероятность того, что 2 наугад выбранные телевизора будут без дефектов?
2. Какова вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет более 3-х очков?
3. Студент записал в тетрадь произвольное двузначное число. Какова вероятность того, что сума цифр этого числа оказалось равной 6?
4. Для открытия сейфа надо набрать в определенной последовательности пять цифр (без их повторения): 1, 2, 3, 4, 5. Какова вероятность того, что набрав цифры в произвольном порядке, вы откроете сейф?
5. В пачке находятся одинаковые по размеру тетради: 8 тетрадей в линейку и 6 в клетку. Из пачки наугад берут 3 тетради. Какова вероятность того, что это тетради в клетку?
6. В коробке 6 красных и 4 зеленых карандаша. Из коробки наугад вынимают 5 карандашей. Какова вероятность того, что среди них 3 красных и 2 зеленых?
7. В ящике 10 деталей, одна из которых нестандартная. Наугад берут 2 детали. Какова вероятность того, что обе детали окажутся стандартными?

8. Брошены 2 игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков не превосходит 7?
9. Из букв А, Е, Ж, К, М, Н, О, Т составляется наугад слово, состоящее из 6 букв. Какова вероятность того, что получится слово «ТАМОЖЕННИК»?
10. В партии из 10 деталей имеется 3 бракованные. Наугад отобраны 3 детали. Тогда вероятность того, что все отобранные детали будут бракованными, равна..
11. В ящике 20 деталей, 4 из них – нестандартные. Какова вероятность того, что среди 6 наугад взятых деталей нестандартных не окажется?
12. В ящике 20 деталей, 4 из них – нестандартные. Какова вероятность того, что среди 6 наугад взятых деталей окажется 5 стандартных и 1 нестандартная?
13. Игральная кость бросается 1 раз, тогда вероятность того, что число очков, выпавших на верхней грани, будет меньше трех, равна…
14. Для новогодней лотереи отпечатали 1000 билетов, из которых 80 выигрышных. Какова вероятность того, что купленный билет окажется выигрышным?
15. 4 билета в театр распределили по жребию между 15 мальчиками и 12 девочками, какова вероятность того, что билеты достались 2 мальчикам и 2 девочкам?
16. В книге 250 страниц. Чему равна вероятность того, что наугад открытая страница будет иметь порядковый номер, кратный 5?
17. Подбрасываются 2 игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее: получить в сумме 7 или 8?
18. Наугад выбрано натуральное число, не превосходящее 30. Какова вероятность того, что это число кратно 3?
19. Наугад выбрано натуральное число, не превосходящее 10. Какова вероятность того, что это число является простым?
20. Из букв слова «дифференциал» наугад выбирается 1 буква. Какова вероятность того, что эта буква будет: а) гласной; б) согласной; в) ч?

21. На пяти одинаковых карточках написаны буквы: У, Р, К, Ч, А. Карточки перемешиваются и наугад складываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «РУЧКА»?
22. Среди 25 студентов группы, в которой 10 девушек, разыгрывается 5 билетов. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 2 девушки?
23. В партии из 15 деталей имеется 9 стандартных. Наудачу отобраны 6 деталей. Найдите вероятность того, что среди отобранных деталей 4 стандартных.
24. В группе 11 юношей и 11 девушек. Для дежурства случайным образом отобраны 3 студента. Найдите вероятность того, что все дежурные окажутся юношами?
25. В ящике 9 белых и 2 черных шаров. Найдите вероятность того, что из двух вынутых наудачу шаров один белый, а другой черный. Вынутый шар в урну не возвращается.
26. В партии из 17 деталей имеется 9 стандартных. Наудачу отобраны 9 деталей. Найдите вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 4 стандартных.
27. В ящике 4 голубых и 5 красных шаров. Из ящика наугад вынимают 2 шара. Найдите вероятность того, что эти шары разного цвета.
28. Из 10 билетов выигрышными являются 2. Чему равна вероятность того, что среди взятых наудачу 5 билетов один выигрышный?
29. В ящике 10 шаров, из которых 2 белых, 3 красных и 5 голубых. Наудачу извлечены 3 шара. Найдите вероятность того, что все 3 шара разного цвета.
30. Студент выучил к экзамену 20 вопросов из 30. Билет состоит из трех вопросов. Какова вероятность того, что студент знает все 3 вопроса?

Задание 3 − Теоремы сложения, умножения

1. Подбрасывается игральный кубик. Чему равна вероятность того, что выпадет нечетное число очков?
2. Монета подброшена 3 раза. Какова вероятность того, что цифра выпадет ровно два раза?

3. В конференц. зале находится 8 англичан и 5 немцев. В течение некоторого времени к трибуне выходят 3 политика с докладом. Найти вероятность того, что все 3 политика – англичане?
4. Три стрелка попадают в мишень соответственно с вероятностью 0,85; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что при одном выстреле хотя бы один из них попадет в цель.
5. В каждом из трех ящиков находится по 30 деталей. В первом ящике 27, во втором 28, в третьем 25 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Какова вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.
6. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным 2, или 7, или тому и другому одновременно.
7. Дипломатическая организация отправила приглашения представителям трех стран. Вероятность своевременной доставки приглашения первому представителю равна 0,95, второму - 0,9, третьему - 0,8. Найти вероятность следующих событий:
   а) только один представитель получит приглашение вовремя;
   б) хотя бы один представитель получит приглашение с опозданием.
8. В мастерской работают 2 мотора, независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение первого часа первый мотор не потребует внимания мастера, равна 0,85, а для второго мотора эта вероятность равна 0,8. Найти вероятность того, что в течение часа ни один из моторов не потребует внимания мастера.
9. Вероятность попадания в цель при стрельбе из трех орудий $P_1=0{,}75$; $P_2=0{,}8$; $P_3=0{,}85$. Какова вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе из всех орудий?
10. Вероятности появления каждого из трех независимых событий A1, A2, A3 соответственно равны $P_1=0{,}9$; $P_2=0{,}8$; $P_3=0{,}7$. Найти вероятность появления только одного из этих событий.
11. Найти вероятность того, что при подбрасывании игрального кубика на верхней грани окажется четное или кратное трем число очков.
12. Слово «ЛОТОС», составленное из букв-кубиков, рассыпано на отдельные буквы, которые затем перемешаны и сложены в ко-

робке. Найти вероятность того, что при этом появится слово сто.

13. Студент знает ответы на 20 вопросов из 26. Предположим, что вопросы задаются последовательно один за другим. Найти вероятность того, что три подряд заданные вопросы – счастливые.
14. В ящике находится10 деталей, из которых 4 первого типа, 6 – второго. Для сборки агрегата нужно взять деталь первого типа, а затем – второго. Какова вероятность того, что при выборке наугад, детали будут взяты в нужной последовательности.
15. Вероятность того, что студент сдаст экзамен по математике на 4 равна 0,75, а экзамен по физике P=0,65. Какова вероятность того, что студент хорошо сдаст и математику и физику?
16. Вероятность того, что событие появится хотя бы один раз в трех независимых испытаниях, равна 0,875. Найти вероятность появления события в одном испытании.
17. В коробке имеется 5 карточек с буквами И, Ф, Ь, Л, М. Карточки вынимают по одной и выкладывают в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «ФИЛЬМ»?
18. Три станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены не выйдет из строя, равна 0,9. Для второго и третьего станков эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,85. Найти вероятность того, что в течение смены ни один станок не выйдет из строя.
19. Три станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены не выйдет из строя, равна 0,9. Для второго и третьего станков эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,85. Найти вероятность того, что в течение смены из строя выйдет 1 станок.
20. Три стрелка, для которых вероятности попадания равны соответственно 0,75; 0,8; 0,85 производят по одному выстрелу. Определить вероятность того, что только 2 стрелка попадут в цель.
21. В мешочке содержится 10 одинаковых кубиков с номерами от 1 до 10. Наугад извлекают по одному 3 кубика. Найти вероятность того, что последовательно появятся кубики с номерами 1,2,3 (кубики извлекаются без возвращения).
22. Известно, что в пятизначном номере телефона все цифры разные. Найти вероятность того, что среди них есть цифры 1 и 2.

23. В ящике 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров. Наугад вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что вынутые шары разного цвета, если известно, что синий шар не вынут?
24. В пакетике 4 красных, 5 желтых и 6 зеленых леденцов. Найти вероятность наугад вынуть подряд 3 конфеты одного цвета.
25. Подброшены монеты и игральный кубик. Найти вероятность того, что на монете выпала цифра, а на кубике число 6.
26. Подброшены монеты и игральный кубик. Найти вероятность того, что на монете выпала цифра, а на кубике число очков, кратное трем.
27. Три стрелка, для которых вероятности попадания в мишень равны соответственно 0,75; 0,8; 0,85 производят по одному выстрелу. Найти вероятность того, что только два стрелка попадут в мишень.
28. На 100 лотерейных билетов приходится 5 выигрышных. Какова вероятность выигрыша хотя бы по одному билету, если приобретено 2 билета.
29. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,8; второй – 0,9; третий – 0,95. Найти вероятность того, что студент сдаст а) только два экзамена, б) все три экзамена.
30. Из урны, в которой 6 белых и 4 черных, наудачу по одному извлекают 2 шара без возвращения. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Задание 4 − Полная вероятность. Формула Бейеса

1. На таможенный контроль поступают одинаковые товары, изготовленные двумя предприятиями. Производительность товаров первого предприятия вдвое больше, чем второго. Процент брака у первого 0,08, а у второго – 0,06. Проверенный товар не удовлетворяет требованиям контроля. Найти вероятность того, что товар, изготовлено первым предприятием.
2. Имеются три партии компьютеров индивидуального пользования, насчитывающие соответственно 20, 30 и 50 штук. Вероятности того, что компьютеры, представленные разными заводами-изготовителями, пройдут таможенный контроль, равны со-

ответственно для этих партий 0,7, 0,8 и 0,9. Какова вероятность того, что выбранный наудачу один из ста данных компьютеров пройдет таможенную аттестацию?

3.

4. В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на первом заводе, 20 деталей – на втором,18– на третьем. Вероятность того, что деталь, изготовленная на первом заводе стандартна, равна 0,9. Для деталей, изготовленных на втором и третьем заводах, соответственно– 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.
5. Известно, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина?
6. В швейной мастерской работают три мастера, производительности которых относятся как 5:6:7. Для первого мастера вероятность изготовления изделия отличного качества равна 0,95, для второго и третьего мастеров эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Изготовленное изделие оказалось отличного качества. Найти вероятность того, что это изделие изготовлено вторым мастером.
7. В ящике содержится 6 деталей, изготовленных на первом заводе, 5 деталей – на втором и 6 деталей на третьем. Вероятности изготовления брака на заводах с номерами 1,2,3 соответственно равны 0,03; 0,04; 0,01. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется качественной.
8. Имеется три одинаковых по виду ящика. В первом ящике 23 белых шара, во втором 10 белых и 12 черных, в третьем 21 черный шар. Из наугад выбранного ящика вынули белый шар. Найти вероятность того, что шар вынут из второго ящика.
9. С первого станка - автомата на сборочный конвейер поступает 15% деталей, со второго и третьего по 34% и 51%, соответственно. Вероятности выдачи бракованных деталей составляют для каждого из них соответственно 0,3%,0,35% и 0,05%. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь окажется бракованной.

10. С первого станка - автомата на сборочный конвейер поступает 15% деталей, со второго и третьего по 35% и 50%, соответственно. Вероятности выдачи бракованных деталей составляют для каждого из них соответственно 0,2%,0,05% и 0,09%. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь окажется бракованной, и она изготовлена на втором станке.
11. В среднем из 100 клиентов банка 37 обслуживается первым операционистом и 63 – вторым. Вероятность того, что клиент будет обслужен без помощи заведующего отделением, только самим операционистом, составляет p_1=0,54 и p_2=0,92 соответственно для первого и второго служащих банка. Какова вероятность того, что клиент, для обслуживания которого потребовалась помощь заведующего, был направлен к первому операционисту?
12. Студент пользуется тремя библиотеками, комплектование которых осуществляется независимо друг от друга. Нужная ему книга может быть в данных библиотеках с вероятностями 0,29; 0,36 и 0,45 соответственно. Какова вероятность того, что учащийся достанет нужную ему книгу, обратившись наугад в одну из этих библиотек?
13. Детали, изготовленные в цехе, попадают к одному из 2-х контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к 1-му контролеру, равна 0,3; ко 2-му – 0,7. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной 1-м контролером, равна 0,95; 2-м контролером –0,98. Годная деталь при проверке оказалась стандартной. Найдите вероятность того, что эту деталь проверял 1-й контролер.
14. Имеется три одинаковых по виду ящика. В первом ящике 12 белых шара и 8 черных, во втором 10 белых и 12 черных, в третьем 20 черных и 5 белых. Из наугад выбранного ящика вынули белый шар. Найти вероятность того, что шар вынут из первого ящика.
15. В ящике содержится 8 деталей, изготовленных на первом заводе, 7 деталей – на втором и 5 деталей на третьем. Вероятности изготовления брака на заводах с номерами 1,2,3 соответственно равны 0,04; 0,02; 0,01. Найти вероятность того, что извлеченная

деталь окажется качественной, и она изготовлена на первом заводе.

16. В центральную бухгалтерию корпорации поступили пачки накладных для проверки и обработки. 54% пачек были признаны удовлетворительными: они содержали 1% неправильно оформленных накладных. Остальные пачки были признаны неудовлетворительными, так как они содержали 6% неправильно оформленных накладных. Какова вероятность того, что взятая наугад накладная оказалась неправильно оформленной?
17. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс (A, B, C). Вероятности обращения в каждую из касс зависят от их местонахождения и равны соответственно 0,35, 0,6 и 0,05. Вероятности того, что к моменту прихода пассажира, имеющиеся в кассе билеты распроданы, равны соответственно 0,4, 0,5 и 0,15. Найти вероятность того, что билет куплен.
18. Находясь в условиях задачи №15ответить на вопрос, в какой из касс это могло произойти с наибольшей вероятностью?
19. Фирма А занимает 17% рынка электронной техники, фирма В–45%, Фирма С–38%. Доля мобильных телефонов в поставках фирмы А составляет 10%, в поставках фирмы В–35, в поставках фирмы С–22%. Случайный покупатель приобрел мобильный телефон. Какова вероятность того, что этот телефон произведен фирмой С?
20. В центральную бухгалтерию корпорации поступили пачки накладных для проверки и обработки. 39% пачек были признаны удовлетворительными: они содержали 4% неправильно оформленных накладных. Остальные пачки были признаны неудовлетворительными, так как они содержали 9% неправильно оформленных накладных. Какова вероятность того, что взятая наугад накладная оказалась неправильно оформленной?
21. Детали, изготовленные в цехе, попадают к одному из 2-х контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к 1-му контролеру, равна 0,6; ко 2-му – 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной 1-м контролером, равна 0,96; 2-м контролером –0,95. Годная деталь при проверке оказалась стандартной. Найдите вероятность того, что эту деталь проверял 2-й контролер.

22. В группе спортсменов 15 бегунов, 5 велосипедистов и 10 штангистов. Вероятность выполнить квалификационную норму: для бегуна–0,8, для велосипедиста–0,9, для штангиста–0,85. Найти вероятность того, что выбранный наудачу спортсмен выполнит норму.
23. В первом ящике содержится 10 деталей, из них 8 стандартных, во втором– 25, из них 23 стандартных, в третьем–15, из них 14 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу выбранного ящика–стандартная?
24. В партии таблеток на первом автомате изготовлено 75% таблеток, на втором 25%. Первый автомат выпускает 95% стандартных таблеток, второй 90%. Выбранная наугад таблетка оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена вторым автоматом.
25. В первой урне 8 белых и 4 черных шара, во второй 10 белых и 5 черных. Выбирают наугад урну и из нее шар. Какова вероятность того, что выбранный шар белый?
26. В первой урне 6 белых и 4 черных шара, во второй 8 белых и 3 красных. Выбирают наугад урну и из нее 1 шар. Шар оказался белым. Какова вероятность того, что он выбран из первой урны?
27. Фирма А занимает 15% рынка электронной техники, фирма В–45%, Фирма С–40%. Доля мобильных телефонов в поставках фирмы А составляет 14%, в поставках фирмы В–25%, в поставках фирмы С–26%. Случайный покупатель приобрел мобильный телефон. Какова вероятность того, что этот телефон произведен фирмой В?
28. Студент пользуется тремя библиотеками, комплектование которых осуществляется независимо друг от друга. Нужная ему книга может быть в данных библиотеках с вероятностями 0,31; 0,38 и 0,42 соответственно. Какова вероятность того, что учащийся достанет нужную ему книгу, обратившись наугад в одну из этих библиотек?
29. В ящике содержится 10 деталей, изготовленных на первом заводе, 17 деталей – на втором и 13 деталей на третьем. Вероятности изготовления брака на заводах с номерами 1,2,3 соответственно равны 0,06; 0,03; 0,05. Найти вероятность того, что из-

влеченная деталь окажется качественной, и она изготовлена на первом заводе.

30. Собирается партия исправных изделий с двух предприятий. Первое предприятие поставляет 60% всех изделий, второе − 40%. Вероятность исправной работы изделия первого предприятия равна 0,9, второго − 0,8. Найти вероятность того, что случайно взятое изделие будет работать исправно.
31. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, второго − 0,9. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь стандартная.

Задание 5 − Дискретная случайная величина

1.Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	1	2	3	4
p	0,1	0,25	c	0,3

Вычислить: а) значение с, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(1 \le X \le 3)$?

2.Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	1	3	5	7
p	0,35	c	0,10	0,30

Вычислить: а) значение с, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(1 \le X \le 5)$ равна ?

3.Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	11	13	14	16
p	0,25	c	0,15	0,35

Вычислить: а) значение с, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(11 \le X \le 13)$ равна?

4.Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	2	3	6	7
p	0,34	c	0,16	0,20

Вычислить: а) значение c, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(3 \le X \le 7)$ равна ?

5.Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	0	2	5	6
p	0,01	c	0,45	0,34

Вычислить: а) значение c, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(0 \le X \le 5)$ равна?

6.Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	21	23	25	27
p	0,30	c	0,10	0,30

Вычислить: а) значение c, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(21 \le X \le 25)$ равна?

7.Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	4	5	6	7
p	0,2 5	c	0,15	0,30

Вычислить: а) значение c, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(4 \le X \le 5)$ равна?

8.Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	11	12	13	14
p	0,22	c	0,18	0,30

Вычислить а) значение с, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(11 \le X \le 13)$ равна?

9. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	4	6	8	10
p	0,25	c	0,25	0,20

Вычислить: а) значение с, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(6 \le X \le 10)$ равна?

10. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	13	14	15	16
p	0,14	c	0,26	0,13

Вычислить: а) значение с, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(13 \le X \le 15)$ равна?

11. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	22	23	25	26
p	0,17	c	0,19	0,23

Вычислить: а) значение с, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(23 \le X \le 25)$ равна?

12. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	24	27	29	31
p	0,21	c	0,24	0,30

Вычислить а) значение с, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(24 \le X \le 29)$ равна?

13. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	34	36	38	40
p	0,15	c	0,35	0,20

Вычислить: а) значение с, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(36 \le X \le 40)$ равна?

14. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	0,4	0,6	0,8	1
p	0,19	c	0,25	0,20

Вычислить: а) значение с, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(0{,}6 \le X \le 1)$ равна?

15. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	0,54	0,66	0,68	0,71
p	0,26	c	0,29	0,31

Вычислить: а) значение с, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(0{,}66 \le X \le 0{,}71)$ равна?

16. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	4	6	7	9
p	0,12	c	0,25	0,23

Вычислить: а) значение с, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(6 \le X \le 9)$ равна?

17. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	4	6	8	12
p	0,31	c	0,24	0,32

Вычислить: а) значение с, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(6 \le X \le 12)$ равна?

18. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	22	26	28	32

p	0,24	c	0,28	0,21

Вычислить а) значение с, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(26 \le X \le 32)$ равна?

19. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	44	46	48	50
p	0,23	c	0,27	0,20

Вычислить: а) значение с, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(46 \le X \le 50)$ равна?

20. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	1	3	5	7
p	0,25	c	0,25	0,32

Вычислить: а) значение с, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(3 \le X \le 7)$ равна?

21. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	54	56	58	60
p	0,24	c	0,25	0,21

Вычислить: а) значение с, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(56 \le X \le 60)$ равна?

22. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	4	6	8	10
p	0,25	c	0,25	0,20

Вычислить: а) значение с, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(6 \le X \le 10)$ равна?

23. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	23	26	29	30
p	0,22	c	0,24	0,20

Вычислить: а) значение c, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(26 \le X \le 30)$ равна?

24. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	17	18	19	20
p	0,12	c	0,15	0,40

Вычислить: а) значение c, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(18 \le X \le 20)$ равна?

24. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	64	66	68	71
p	0,11	c	0,28	0,29

Вычислить: а) значение c, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(66 \le X \le 71)$ равна?

25. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	35	36	38	42
p	0,15	c	0,35	0,20

Вычислить: а) значение c, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(36 \le X \le 42)$ равна?

26. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

x	16	20	24	28
p	0,32	c	0,24	0,20

Вычислить а) значение с, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(16 \le X \le 20)$ равна?

27. Дискретная случайная величина Х задана законом распределения.

x	2	5	8	11
p	0,23	c	0,28	0,24

Вычислить а) значение с, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(8 \le X \le 11)$ равна?

28. Дискретная случайная величина Х задана законом распределения.

x	74	75	78	79
p	0,25	c	0,15	0,20

Вычислить а) значение с, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(75 \le X \le 79)$ равна?

29. Дискретная случайная величина Х задана законом распределения

x	52	56	58	60
p	0,14	c	0,27	0,26

Вычислить а) значение с, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(56 \le X \le 60)$ равна?

30. Дискретная случайная величина Х задана законом распределения.

x	22	24	27	29
p	0,26	c	0,23	0,24

Вычислить а) значение с, б) математическое ожидание, в) дисперсию данной случайной величины, г) вероятность $P(24 \le X \le 29)$ равна?

Задание 6 − Непрерывная случайная величина

Непрерывная случайная величина X задана своей функцией распределения вероятностей F(x). Требуется:

1) найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;
2) вычислить математическое ожидание и дисперсию X;
3) определить вероятность того, что X примет значение из интервала (a,b)

1. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x}{5}, & 0<x\le 5\\ 1, & x>5\end{cases}$

$a=1,\quad b=4$

2. $F(X)=\begin{cases}0, & x<0\\ -\cos x+1, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

$a=\dfrac{\pi}{3};\quad b=\pi$

3. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \sin 2x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{4}\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$

$a=0,\quad b=\dfrac{\pi}{6}$

4. $F(X)=\begin{cases}e^x, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$

$a=-\infty;\quad b=-1$

5. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \dfrac{x^2-4}{5}, & 2<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$

$a=2,5;\quad b=3$

6. $F(X)=\begin{cases}0, & x<0\\ 2\sin x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{6}\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$

$a=\dfrac{\pi}{12};\quad b=\dfrac{\pi}{6}$

7. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \dfrac{x^2-1}{8}, & 1<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$

$a=2,\quad b=3$

8. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \dfrac{x^2-4}{12}, & 2<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$

$a=3;\quad b=4$

9. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \dfrac{x^2-1}{3}, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

$a=1{,}5,\quad b=2$

10. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{1}{8}x^3, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

$a=1;\quad b=2$

11. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \dfrac{x^2-1}{48}, & 1<x\le 7\\ 1, & x>7\end{cases}$

$a=2,\quad b=5$

12. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$

$a=0;\quad b=\dfrac{1}{2}$

13. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \dfrac{1}{2}(x^2-x), & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

$a=1{,}5,\quad b=1{,}8$

14. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 4\\ \dfrac{1}{2}\sqrt{x}-1, & 4<x\le 16\\ 1, & x>16\end{cases}$

$a=8;\quad b=16$

15. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \frac{1}{6}(x^2-x), & 1<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$

$a=2,\quad b=3$

16. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 5\\ (x-5)^2, & 5<x\le 6\\ 1, & x>6\end{cases}$

$a=5{,}5,\quad b=6$

17. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le -\frac{\pi}{6}\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right), & -\frac{\pi}{6}<x\le\frac{\pi}{3}\\ 1, & x>\frac{\pi}{3}\end{cases}$

$a=0,\quad b=\frac{\pi}{3}$

18. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 2x, & 0<x\le\frac{1}{2}\\ 1, & x>\frac{1}{2}\end{cases}$

$a=\frac{1}{8},\quad b=\frac{1}{4}$

19. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 8,\\ (x-8)^2, & 8<x\le 9\\ 1, & x>4\end{cases}$

$a=8{,}2;\quad b=9$

20. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x}{5}, & 0<x\le 5\\ 1, & x>5\end{cases}$

$a=2,\quad b=4$

21. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x}{7}, & 0<x\le 7\\ 1, & x>7\end{cases}$

$a=4,\quad b=5$

22. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \frac{1}{5}x+\frac{1}{5}, & -1<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$

$a=1,\quad b=3$

23. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ (x-6)^2, & 6<x\le 7\\ 1, & x>7\end{cases}$

$a=6{,}5,\quad b=7$

24. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 3\\ \frac{1}{4}(x-3)^2, & 3<x\le 5\\ 1, & x>5\end{cases}$

$a=4,\quad b=5$

25. $F(X)=\begin{cases}0 & \\ (x-9)^2, & 9<x<10\\ 1 & \end{cases}$

$a=9{,}3,\quad b=9{,}8$

26. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}, & -1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

$a=0,\quad b=1$

27. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x}{10}, & 0<x\le 10\\ 1, & x>10\end{cases}$

$a=5,\quad b=7$

28. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le -\pi\\ \frac{1}{2}(\cos x+1), & -\pi\le x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$

$a=-\frac{\pi}{2},\quad b=-\frac{\pi}{2}$

29. $F(X)=\begin{cases}0, & x\le -\frac{\pi}{4}\\ \frac{1}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}, & -\frac{\pi}{4}<x\le\frac{3\pi}{4}\\ 1, & x>\frac{3\pi}{4}\end{cases}$

$a=3;\quad b=4$

30. $$F(X)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ -x^2+4x-3, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

$a=1,\quad b=1{,}5$

Теоретические вопросы

1. Что называется опытом, или испытанием?
2. Что называется событием?
3. Какое событие называют а) достоверным, б) невозможным в данном опыте?
4. Какие события называют а) совместимыми, б) несовместимыми в данном опыте?
5. Что называют полной группой событий?
6. Что называют классической вероятностью события?
7. Чему равна вероятность достоверного события?
8. Чему равна вероятность невозможного события?
9. В каких пределах заключена вероятность любого события?
10. Что называют перестановками? По какой формуле вычисляют число перестановок из n различных элементов?
11. Что называют размещениями? По какой формуле вычисляют число размещений из n различных элементов по m элементов?
12. Что называют сочетаниями?
13. Каким равенством связаны число перестановок, размещений и сочетаний?
14. Что называют суммой, или объединением, двух событий? Приведите примеры суммы двух событий.
15. Что называют произведением, или пересечением двух (нескольких) событий? Приведите примеры произведения трех событий.
16. Чему равна вероятность суммы событий, образующих полную группу?
17. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
18. Сформулируйте теорему о вероятности суммы n несовместных событий.
19. Как определяется независимость n событий?
20. Чему равна вероятность произведения n независимых событий?
21. Как найти вероятность появления хотя бы одного из n независимых событий, имеющих одинаковые вероятности?
22. Сформулируйте теорему о полной вероятности.
23. Запишите формулы Бейеса.
24. Что называют случайной величиной?
25. Какую величину называют дискретной случайной величиной?

26. Что называют законом распределения дискретной случайной величины?
27. Как определяется функция распределения для дискретной случайной величины X?
28. Как с помощью функции распределения F(X) вычислить вероятность того, что случайная величина X примет значение из полуинтервала [α,β)?
29. Какую величину называют непрерывной случайной величиной?
30. Как определяется функция распределения для непрерывной случайной величины?
31. Что называют плотностью распределения случайной величины?
32. Какие свойства имеет плотность распределения?
33. Как с помощью плотности распределения найти вероятность попадания значений случайной величины X в интервал (α,β)?
34. Как определяется математическое ожидание для случайных величин X, принимающей конечное множество значений?
35. Как определить математическое ожидание непрерывной случайной величины, все значения которые принадлежат отрезку [α,β]?
36. Каковы свойства математического ожидания случайной величины?
37. Как определяется дисперсия случайной величины? Что она характеризует?
38. По какой формуле можно вычислить дисперсию дискретной случайной величины?
39. По каким формулам можно вычислить дисперсию непрерывной случайной величины, все значения которой принадлежат отрезку [α,β]?
40. Что такое среднее квадратичное отклонение?

Список рекомендуемой литературы

1. Вентцель Е. С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. [Текст] : учебное пособие. / Е.С.Вентцель, Л.А.Овчаров. − М.:1986.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебное пособие для бакалавров. / В.Е.Гмурман. − М.: Высшая школа, 2012. − 479с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. [Текст] : учебное пособие. / В.Е.Гмурман. −М.: Высшая школа, 2011. −404с.
4. Кочетков Е.С., Смерчинская С.О. Теория вероятностей в задачах и упражнениях. [Текст] : учебное пособие. / Е.С.Кочетков, С.О.Смерчинская − М.: Форум – Инфра – М, 2005.
5. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов. [Текст]: учебное пособие. / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. –СПБ.: Питер, 2006,−464 с.
6. Гусак А.А., Бричикова Е.А. Теория вероятностей, справочное пособие к решению задач. [Текст]: учебное пособие. / А.А. Гусак, Е.А. Бричикова, –Изд-е 4-е,стереотип.–Минск: ТетраСистемс, 2003, −288 с.

Предисловие

В настоящее время произошло существенное сокращение аудиторного времени на изучение математических дисциплин. Поэтому, наличие учебного пособия, компактно содержащего краткие теоретические сведения и большое количество подробно разобранных задач соответствующей тематики и допускающего возможность его универсального использования, оказывается весьма полезным.

Настоящее пособие полностью соответствует учебным программам курса математики для инженерных специальностей и предназначается как для преподавателей (с обучающими и контролирующими аспектами), так и для студентов (изучение, освоение и овладение материалом раздела – модуля курса). Пособие может быть использовано на практических занятиях по математике, при самостоятельной работе над разделом курса, при выполнении индивидуальных заданий студентами различных форм обучения.

Преимущество данной работы перед аналогичными заключается, в большой мере, в высокой доступности, достигаемой за счет тщательной детализации используемых методов.

Разумеется, предлагаемое пособие не может претендовать на замену каких – либо широко известных учебных изданий по данной тематике. Тем не менее, авторы предполагают, что и студентам и преподавателям будет удобно использовать его в своей работе.