МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
______________ О.Г. Локтионова
«15» 12 __________ 2017г.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Методические указания к практическим и лабораторным занятиям для студентов направления 09.03.01

Курск 2017

УДК 621.396.4

Составители: Ж.Т. Жусубалиев, И.Е. Чернецкая

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент *Халин Ю.А.*

Аналитическое моделирование систем массового обслуживания: методические указания к практическим и лабораторным занятиям для студентов направления 09.03.01 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.; Ж.Т. Жусубалиев, И.Е. Чернецкая. – Курск, 2017. - 11 с.: ил. 3 – Библиогр.: с. 11

Рассматриваются элементы теории вероятностей и законы распределения случайных величин, наиболее часто используемые в теории массового обслуживания. Излагаются аналитические методы расчета одноканальных систем массового обслуживания. Приведены примеры и задачи для практических и лабораторных занятий.

Предназначены для студентов направления 09.03.01 очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 15.12.2017. Формат 60*84 1/16.
Усл. печ. л. 0,64. Уч.-изд. л. 0,57. Тираж 50 экз. Заказ 4792. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Изучить элементы теории вероятностей, аналитические методы расчета одноканальных систем массового обслуживания.

2 КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ [1,2]

Закон распределения случайной величины – соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан:

– *аналитически* в виде математического выражения;
– *таблично* в виде ряда распределения;
– *графически* в виде многоугольника распределения.

Закон распределения непрерывной случайной величины может быть задан в виде:

– *функции распределения* $F(x)$ случайной величины X, представляющей собой *вероятность* того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем некоторое заданное значение x: $F(x) = \mathrm{P}(X < x)$;

– *плотности распределения* $f(x)$, определяемой как производная от функции распределения $F(x)$ по x: $f(x) = F'(x)$.

Функция распределения однозначно определяется через плотность распределения как

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx .$$

Свойства функции распределения:

– $F(x)$ – неубывающая функция: если $x_j > x_i$, то $F(x_j) \geq F(x_i)$;

– функция распределения принимает значения от 0 до 1 , причѐм:

$$F(-\infty) = 0 \text{ и } F(+\infty) = 1.$$

Свойства плотности распределения:

– плотность распределения принимает только неотрицательные значения: $f(x) \geq 0$;

– площадь на графике, ограниченная плотностью распределения и осью абсцисс, всегда равна единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 .$$

Числовые характеристики случайных величин:

– *начальные* $\alpha_s[X]$ *моменты:*

$$a_s[X]=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^s p_i & - \textit{ для дискретной случайной величины};\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)dx & - \textit{ для непрерывной случайной величины},\end{cases} \tag{1}$$

– *центральные* $\beta_s[X]$ *моменты:*

$$\beta_s[X]=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - M[X])^s p_i & - \textit{ для дискретной величины};\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-M[X])^s f(x)dx & - \textit{ для непрерывной величины}.\end{cases} \tag{2}$$

Первый начальный момент случайной величины X называется *математическим ожиданием* и характеризует *среднее значение* случайной величины:

$$M[X]=a_1[X]=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i & - \textit{ для дискретной величины};\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx & - \textit{ для непрерывной величины}.\end{cases} \tag{3}$$

Второй начальный момент α_2[X] случайной величины X характеризует *разброс* значений случайной величины *относительно начала координат.*

Второй центральный момент называется *дисперсией* случайной величины: $D[X] = \beta_2[X]$ и характеризует *разброс* значений случайной величины *относительно математического ожидания*:

$$D[X]=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - M[X])^2 p_i & - \textit{ для дискретной величины};\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-M[X])^2 f(x)dx & - \textit{ для непрерывной величины}.\end{cases} \tag{4}$$

Дисперсия и второй начальный момент связаны зависимостью

$$D[X]=a_2[X]-(M[X])^2. \tag{5}$$

Среднеквадратическое отклонение σ ***[X]*** – характеристика *разброса*, *размерность которой совпадает с размерностью случайной величины*:

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}. \tag{6}$$

Коэффициент вариации v[X] – безразмерная характеристика разброса случайных величин, определенных в области положительных значений:

$$v[X]=\sigma[X]/M[X], \quad (\mathrm{M[X]}>0). \tag{7}$$

В моделях дискретных систем наиболее широко применяются следующие **законы распределений случайных величин:**

– *распределение Пуассона* (дискретный закон):

$$p_k = P(X = k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a}, \qquad (\mathrm{k} = 0,1,2,\ldots), \tag{8}$$

где a – параметр распределения ($a > 0$);

– *геометрическое распределение* (дискретный закон):

$$p_k = P(X = k) = \rho^k(1-\rho), \qquad (\mathrm{k} = 0,1,2,\ldots) \tag{9}$$

где ρ – параметр распределения ($0 < \rho < 1$);

– *равномерное распределение* (непрерывный закон) с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad \mathrm{a} < \mathrm{x} < \mathrm{b}; \\ 0 & \text{при} \quad \mathrm{x} > \mathrm{b}; \end{cases} \tag{10}$$

– *экспоненциальное распределение* (непрерывный закон) с функцией и плотностью

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x}; \quad \mathrm{f(x)} = \alpha \mathrm{e}^{-\alpha x}, \tag{11}$$

где $\alpha > 0$ – параметр распределения; $x \geq 0$; $\nu_{эксп}[X] = 1$.

– *распределение Эрланга k-го порядка* (непрерывный закон) с функцией и плотностью:

$$F_k(x) = 1 - e^{-\alpha x}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\alpha x)^i}{i!}; \quad \mathrm{f_k(x)} = \frac{\alpha(\alpha x)^{k-1}}{(k-1)!}\alpha \mathrm{e}^{-\alpha x}, \tag{12}$$

где α и k – параметры распределения ($\alpha \geq 0$; k = 1,2, …); $x \geq 0$;

$\nu_{Э_k}[X] = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \leq 1$; *математическое ожидание распределения Эрланга зависит от значения параметра k.*

Пример [1,2]. Дискретная случайная величина *X* принимает значения: 1;2;3 с вероятностями 0,2; 0,3; 0,5, соответственно.

1) Построить график функции распределения дискретной случайной величины *X*.

2) Вычислить математическое ожидание, дисперсию, второй начальный момент, среднеквадратическое отклонение и коэффициент вариации случайной величины *X*.

Дано: x_1=1, x_2=2, x_3=3;

$p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}3$; $p_3 = 0{,}5$.

Требуется:

1) построить график функции распределения *F(x);*

2) вычислить $M[X], D[X], \alpha_2[X], \sigma[X], \nu[X]$.

Решение:

1) График функции распределения случайной величины X приведен на рисунке 1.

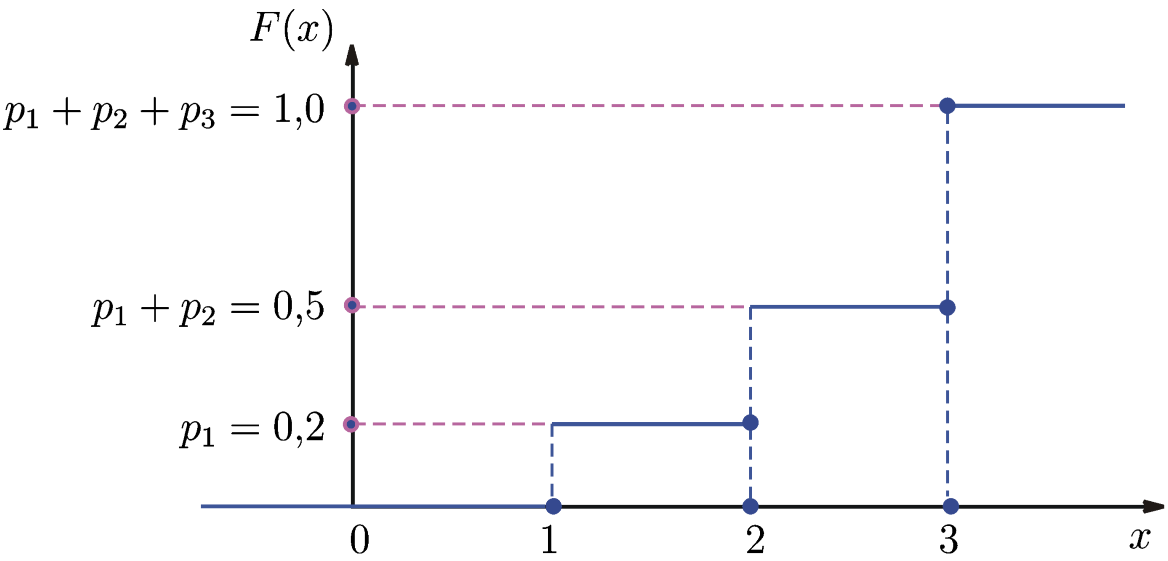

Рисунок 1– График функции распределения случайной величины X

Как можно видеть из рисунка 1, значения функции распределения *F(x)* для каждого значения случайной величины (x_1 , x_2 , x_3) увеличиваются на величину, равную соответствующей вероятности (p_1 , p_2 , p_3) появления этого значения, причем самое верхнее значение всегда равно 1.

2) Вычислим математическое ожидание:

$$M[X] = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot 2 + 0{,}5 \cdot 3 = 2{,}3.$$

Второй начальный момент:

$$\alpha_2[X] = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + p_3x_3^2 = 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot 4 + 0{,}5 \cdot 9 = 5{,}9.$$

Дисперсия:

$$D[X] = \alpha_2[X] - (M[X])^2 = 5{,}9 - 5{,}29 = 0{,}61.$$

Среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{0{,}61} \approx 0{,}781.$$

Коэффициент вариации:

$$\nu[X] = \frac{\sigma[X]}{M[X]} = \frac{0{,}78}{2{,}3} \approx 0{,}3396.$$

2 АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ОДНОКАНАЛЬНЫХ СМО

.

2.1. Основные понятия [1,2]

Система массового обслуживания (СМО) – математический (абстрактный) объект, содержащий один или несколько *приборов* **П** (*каналов*), обслуживающих *заявки* **З**, поступающие в систему, и *накопитель* **Н**, в котором находятся заявки, образующие *очередь* **О** и ожидающие обслуживания (см. рисунок 1).

Заявка (требование, запрос, вызов, клиент) – объект, поступающий в СМО и требующий обслуживания в обслуживающем приборе.

Совокупность заявок, распределенных во времени, образуют ***поток заявок***.

Обслуживающий прибор или просто прибор (устройство, канал, линия) – элемент СМО, функцией которого является обслуживание заявок. В каждый момент времени в приборе а обслуживании может находиться только одна заявка.

Обслуживание – задержка заявки на некоторое время в обслуживающем приборе.

Длительность обслуживания – время задержки (обслуживания) заявки в приборе.

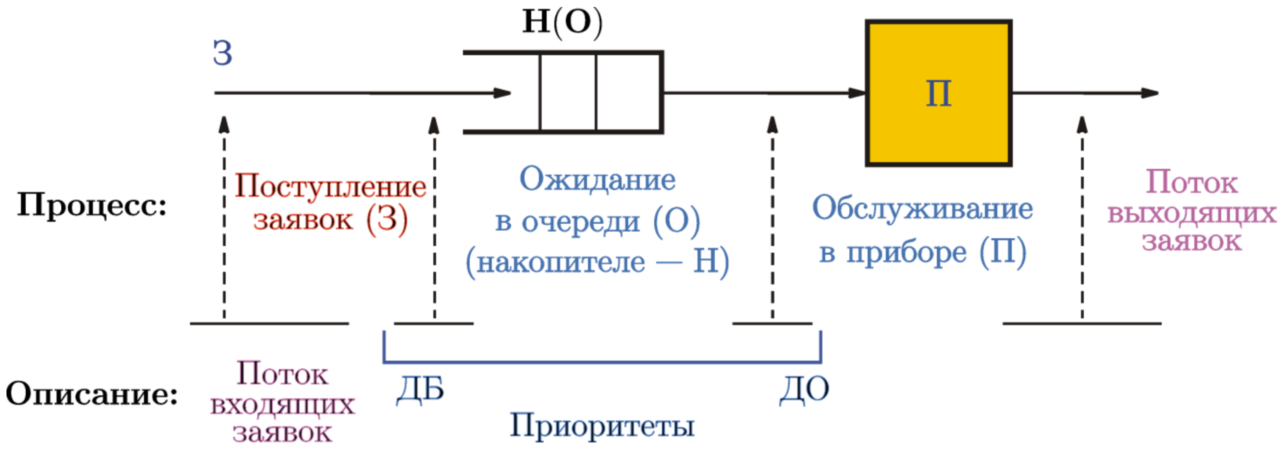

Рисунок 2 – Система массового обслуживания

Накопитель (буфер) – совокупность мест для ожидания заявок перед обслуживающим прибором. Количество мест для ожидания определяет ***ёмкость накопителя.***

Заявка, поступившая на вход СМО, может находиться в двух состояниях:

- в состоянии обслуживания (в приборе);

- в состоянии ожидания (в накопителе), если все приборы заняты обслуживанием других заявок.

Заявки, находящиеся в накопителе и ожидающие обслуживания, образуют ***очередь*** заявок. Количество заявок, ожидающих обслуживания в накопителе, определяет длину очереди.

Дисциплина буферизации – правило занесения поступающих заявок в накопитель (буфер).

Дисциплина обслуживания – правило выбора заявок из очереди для обслуживания в приборе.

Приоритет – преимущественное право на занесение (в накопитель) или выбор из очереди (для обслуживания в приборе) заявок одного класса по отношению к заявкам других классов.

2.2 Одноканальные СМО с однородным потоком заявок [1,2]

Рассмотрим одноканальную СМО с однородным потоком заявок при следующих предположениях (см. рисунок 3):

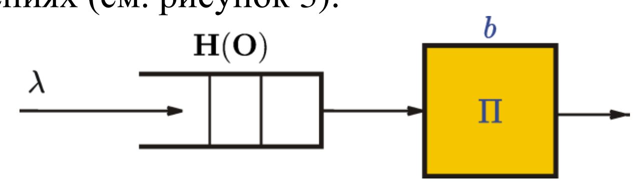

Рисунок 3 – Одноканальная СМО

1) СМО содержит *один обслуживающий прибор*, в котором в каждый момент времени может обслуживаться только одна заявка;

2) перед прибором имеется накопитель **Н** *неограниченной ёмкости*, что означает отсутствие отказов поступающим заявкам при их постановке в очередь **О**, то есть любая поступающая заявка всегда найдет в накопителе место для ожидания не зависимо от того, сколько заявок уже находится в очереди;

3) заявки поступают в СМО с интенсивностью λ;

4) средняя длительность обслуживания одной заявки в приборе равна b, причем длительности обслуживания разных заявок не зависят друг от друга;

5) обслуживающий прибор не простаивает, если в системе (накопителе) имеется хотя бы одна заявка, причем после завершения обслуживания очередной заявки мгновенно из накопителя выбирается следующая заявка;

6) заявки из накопителя выбираются в соответствии с бесприоритетной дисциплиной обслуживания в порядке поступления (ОПП) по правилу «первым пришел – первым обслужен» [1,2].

В системе существует стационарный режим, предполагающий отсутствие перегрузок, то есть нагрузка и, следовательно, загрузка системы меньше 1: $y = \rho = \lambda b < 1$.

В качестве расчётной характеристики обслуживания заявок в СМО будем использовать среднее время ожидания заявок.

Пусть заявки, поступающие в одноканальную СМО, образуют *простейший* поток с интенсивностью λ, а длительность τ_b обслуживания заявок распределена по *экспоненциальному* закону со средним значением b , причём $\rho = \lambda b < 1$, то есть система работает в установившемся режиме. Такая СМО с однородным потоком заявок называется ***экспоненциальной***.

С использованием метода средних значений можно получить следующие выражения для расчета средних значений [1,2]:

– времени ожидания заявок

$$w = \frac{\rho b}{1-\rho}; \tag{16}$$

– времени пребывания заявок

$$u = w + b = \frac{b}{1-\rho}; \tag{17}$$

– длины очереди заявок

$$l = \lambda w = \frac{\rho^2}{1-\rho};$$

– числа заявок в системе (в очереди и на обслуживании)

$$m = \lambda u = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Из последнего выражения вытекает, что среднее число заявок в системе $m = l + \rho$, где второе слагаемое определяет среднее число заявок, находящихся на обслуживании в приборе. Кроме того, $u = w$.

3 ЗАДАЧИ К ПРАКТИЧЕСКИМ И ЛАБОРАТОРНЫМ ЗАНЯТИЯМ [1,2]

Задача 1 Дискретная случайная величина X принимает значения x_1 и x_2 с вероятностями p_1 и p_2 соответственно (см. таблицу 1). Построить график функции распределения дискретной случайной величины X. Вычислить математическое ожидание, дисперсию, второй начальный момент, среднеквадратичное отклонение и коэффициент вариации случайной величины X.

Таблица 1

Вариант	x_1	x_2	p_1	p_2
1	2	10	0,1	0,9
2	50	2	0,2	0,8
3	-10	50	0,6	0,4
4	10	5	0,6	0,4
5	-100	-2	0,1	0,9
6	100	50	0,2	0,8
7	10	20	0,3	0,7
8	10	-20	0,7	0,3
9	1	50	0,4	0,6
10	0	40	0,8	0,2

Задача 2. Дискретная случайная величина X принимает значения x_1, x_2, x_3 с вероятностями p_1, p_2, p_3 соответственно (таблица 2). Нарисовать график функции распределения дискретной случайной величины X. Вычислить математическое ожидание, дисперсию, второй начальный момент , среднеквадратичное ожидание и коэффициент вариации случайно величины X.

Таблица 2

Вариант	x_1	x_2	x_3	p_1	p_2	p_3
1	1	2	3	0,1	0,4	0,5
2	-1	2	3	0,2	0,4	0,2
3	1	5	10	0,5	0,4	0,1
4	-5	-1	10	0,4	0,4	0,2
5	100	50	10	0,1	0,8	0,1
6	10	20	100	0,2	0,4	0,2

7	-10	20	10	0,5	0,4	0,1
8	10	50	-40	0,4	0,4	0,2
9	30	40	20	0,1	0,8	0,1
10	3	2	1	0,1	0,4	0,5

Задача 3. Чему равно математическое ожидание, дисперсия, второй начальный момент и коэффициент вариации детерминированной величины **x**, принимающий всякий раз значение ***x***? Построить график функции и плотности распределения величины ***x***.

Таблица 3

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
x	100	25	1	0	-1	-20	-2,5	-0,5	0,4	0,5

Задача 4. В одноканальную СМО с интенсивностью λ поступают заявки, интенсивность обслуживания которых равна μ. Рассчитать характеристики функционирования системы (таблица 4): а) *нагрузку* и *загрузку*; б) средние значения *времён ожидания* и *пребывания* заявок в системе в) средние значения *длины очереди* и *числа заявок* в системе.

Таблица 4

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
λ, с$^{-1}$	3,5	2,4	1,5	0,8	3,0	4,5	4,0	9,0	20	30
μ, с	7,0	4,0	2,0	1,0	2,0	5,0	3,0	10	15	40

Задача 5. В одноканальную СМО типа M/M/1 с интенсивностью λ поступают заявки, средняя длительность обслуживания которых равна *b* (см. таблицу 5). Рассчитать характеристики функционирования системы: а) *нагрузку* и *загрузку*; б) средние значения *времён ожидания* и *пребывания* заявок в системе в) средние значения *длины очереди* и *числа заявок* в системе.

Таблица 5

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
λ, с$^{-1}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
b, с	9,5	3,0	2,5	2,0	1,0	1,5	0,5	1,0	1,0	0,8

---

1. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 363 с.

2. Алиев Т.И., Муравьева-Витковская Л.А., Соснин В.В. Моделирование: задачи, задания, тесты. – СПб: НИУ ИТМО, 2011. – 197 с.