

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна
Должность: проректор по учебной работе
Дата подписания: 27.01.2021 00:54:17
Уникальный программный ключ:
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Локтионова
«15» 12 2017г



БИФУРКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Методические указания к практическим и лабораторным
занятиям для студентов направления 09.03.01

Курск 2017

УДК 534.1

Составители: Ж.Т. Жусубалиев, И.Е. Чернецкая

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *Халин Ю.А.*

Бифуркации динамических систем: методические указания к практическим и лабораторным занятиям для студентов направления 09.03.01 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.; Ж.Т. Жусубалиев, И.Е. Чернецкая. – Курск, 2017. – 14 с.: ил.4. – Библиогр.: с. 14.

Изложены методы бифуркационного анализа динамических систем, описываемых дискретными отображениями. Приведены примеры бифуркационного анализа. Рассмотрены бифуркации седло-узел, удвоения периода и бифуркация Неймарка-Саккера. Приведены задачи для практических и лабораторных занятий.

Предназначены для студентов направления 09.03.01 очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 15.12.2017. Формат **60 × 84^{1/16}**.

Усл. печ. л. 0,81. Уч.-изд. л. 0,74. Тираж 50 экз. Заказ 4793. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. Цель работы

Изучение методов бифуркационного анализа дискретных моделей со сложной динамикой.

После получения уравнений для неподвижных точек и соответствующего характеристического уравнения необходимо решить весьма трудоемкую задачу, связанную с построением области устойчивости в пространстве параметров динамической системы. Бифуркационным ситуациям соответствует нарушение устойчивости неподвижных точек. Последнее происходит, когда абсолютное значение одного из корней характеристического уравнения становится равным единице.

2. Введение

Объект той или иной физической природы, в котором реализуется колебательный процесс, называется *колебательной системой*. О величинах, изменение которых во времени (динамика) составляет содержание колебательного процесса, говорят как о динамических переменных.

Наряду с динамическими переменными при рассмотрении колебательных систем приходится иметь дело также с параметрами. Это величины, которые считаются постоянными во времени, от значений которых зависит характер реализующегося в системе движения. В зависимости от параметров можно наблюдать разные по характеру динамические режимы: стационарные состояния, периодические режимы, квазипериодические и хаотические колебания. Смена установившихся движений, которая происходит в результате изменения какого-нибудь параметра рассматриваемой системы при его переходе через некоторое значение, называется *бифуркацией*. Если при этом смена установившихся движений происходит скачкообразно, то говорят о «жестком возникновении нового режима». В противном случае возникновение нового режима называется «мягким».

Обычно полагают, что изменение параметров происходит квазистатически — настолько медленно, что при исследовании уравнений движения параметры всякий раз считают постоянными величинами. Процесс изменения параметров можно рассматривать как движение по определенной траектории в пространстве, где по осям координат отложены параметры системы.

Не следует путать пространство параметров с фазовым пространством. Движение изображающей точки по траектории в фазовом пространстве — это результат собственной динамики системы. Траектория же в простран-

стве параметров задается исследователем, желающим изучить, как изменяется динамическое поведение системы при изменении параметров. Мы изучим основные типы локальных бифуркаций.

3. Бифуркации неподвижных точек

Слово *бифуркация* обозначает раздвоение, ветвление (от фр. *la bifurcation* — раздвоение).

Суть бифуркации лучше всего иллюстрирует задача об изгибе балки [29]. Представим себе балку прямоугольного сечения, на которую положен груз. Кладем сверху гири, увеличиваем нагрузку P , балка сжимается, но остается прямолинейной. Но, начиная с некоторого критического значения нагрузки P_* , она уже не может оставаться в этом положении и прогибается вправо или влево. Ей приходится «выбирать», куда прогнуться под действием случайных воздействий. При $P < P_*$ у балки есть единственная равновесная форма. При $P > P_*$ их три: прямолинейная форма, которая стала неустойчивой, и две устойчивые (одна соответствует прогибу вправо, а другая — влево). Если построить зависимость максимального прогиба балки от величины нагрузки P , то получается картинка, которую называют *бифуркационной диаграммой*. При $P = P_*$ изменяется число состояний равновесия и их устойчивость.

Изменение числа и устойчивости установившихся движений (циклов, неподвижных точек, состояний равновесия) при изменении параметров называется *ветвлением*, или *бифуркацией движений*. Значения параметров, при которых происходит смена установившихся движений, называются *точками ветвления*, или *точками бифуркаций*.

Понятие бифуркации связано с понятием *структурной устойчивости*, или *грубости*. Это понятие было введено в качественную теорию дифференциальных уравнений Андроном и Понтрягиным. Оно, фактически, было призвано способствовать выяснению физической важности тех или иных решений динамической системы. Решение, которое можно сопоставить с физически наблюдаемым динамическим процессом, не должно качественно менять своих свойств при малых изменениях параметров. Известно, что непрерывная функция обладает таким свойством: если она положительна при каком-то значении аргумента, то и при малых изменениях аргумента она остается положительной. Поэтому свойство положительности (или отрицательности) — грубое, а вот свойство функции быть равной нулю — негрубое. Аналогично устойчивость или неустойчивость — грубые свойства движений, а нейтральная устойчивость или состояние бифуркации является негрубой. Например, если ламинарный поток устойчив при некотором числе Рейнольдса, то он

устойчив и при достаточно малом изменении этого числа.

Следующее понятие — это *гиперболичность*. Рассмотрим дискретное отображение, зависящее от параметра α :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(\alpha, \mathbf{x}_k) \quad , \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Пусть \mathbf{x}_0 — неподвижная точка отображения (1), то есть $\mathbf{x}_0 = \Phi(\alpha, \mathbf{x}_0)$. Обозначим через J матрицу Якоби, вычисленную в неподвижной точке \mathbf{x}_0 . Соответствующее этой неподвижной точке характеристическое уравнение в общем виде может быть записано

$$\chi(\rho, \alpha) = \det(J(\alpha) - \rho E) = 0. \quad (2)$$

Корни этого уравнения ρ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ называются *мультипликаторами* неподвижной точки. Пусть r_-, r_0, r_+ — число мультипликаторов неподвижной точки, лежащих внутри, на и вне единичной окружности в комплексной плоскости $\{\rho \in \mathbb{C} : |\rho| = 1\}$ соответственно.

Определение 1. *Неподвижная точка называется гиперболической, если $r_0 = 0$, то есть нет мультипликаторов, лежащих на единичной окружности. Гиперболическая точка называется седловой, если $r_- r_+ \neq 0$.*

Понятие гиперболичности естественным образом обобщается на цикл любого конечного периода m . Поскольку гиперболические неподвижные точки или циклы являются грубыми, то кандидатами на точки бифуркации становятся те значения параметров, при которых неподвижная точка или цикл оказываются негиперболическими. Это дает эффективный инструмент для поиска точек бифуркаций.

Итак, *бифуркационным значением параметра, или точкой ветвления, называется значение параметра, при котором динамическая система является структурно неустойчивой*. Структурная устойчивость бывает локальной и глобальной. Поэтому выделяют локальные и глобальные бифуркации. Мы будем говорить только о локальных бифуркациях.

Пусть при некоторой совокупности значений параметров неподвижная точка \mathbf{x}_0 (или цикл) является гиперболической. В общем случае существуют три возможности нарушения условия гиперболичности при непрерывном изменении параметров. Это случаи, когда один из мультипликаторов, например ρ_1 , обращается в $+1$, то есть $\rho_1 = +1$, или $\rho_1 = -1$, или комплексно-сопряженная пара мультипликаторов выходит на границу единичного круга: $\rho_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$, $0 < \theta_0 < \pi$ (рис. 1).

Соответствующие бифуркационные совокупности параметров α удовлетворяют уравнению (2) при подстановке в него бифуркационных значений ρ ,

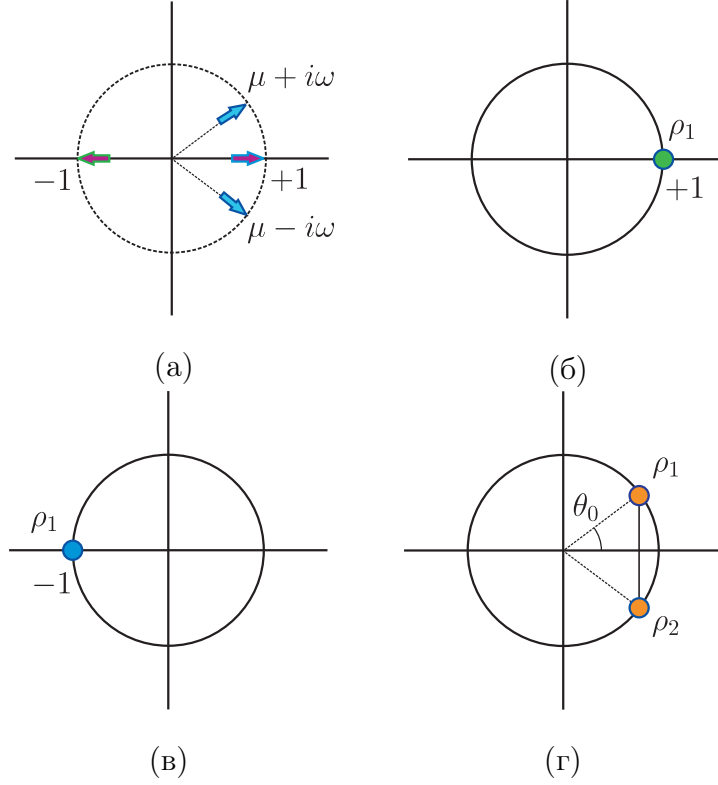


Рис. 1. (а) Возможные условия нарушения гиперболичности неподвижной точки. (б) Один из мультипликаторов, например ρ_1 , обращается в $+1$. (в) Один из мультипликаторов обращается в -1 . (г) Комплексно-сопряженная пара мультипликаторов $\rho_{1,2} = \mu \pm i\omega$ достигает границы единичного круга $\rho_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$, $0 < \theta_0 < \pi$

а именно:

$$\chi(1, \alpha) = 0; \quad \chi(-1, \alpha) = 0; \quad \chi(e^{\pm i\theta} \alpha) = 0 \quad (0 < \theta < \pi). \quad (3)$$

Границы области устойчивости рассматриваемой неподвижной точки (цикла) удовлетворяют уравнениям (3). Будем обозначать эти граничные поверхности пространства параметров через N_+ , N_- , N_φ соответственно.

Определение 2. Бифуркация, связанная с обращением мультипликатора ρ_1 в $+1$, называется бифуркацией «седло-узел».

При переходе через границу N_+ происходит слияние устойчивого цикла с неустойчивым с последующим их исчезновением. В этом случае по одну сторону бифуркационной поверхности N_+ расположена область существования двух периодических движений — устойчивого и неустойчивого, по другую сторону — область значений параметров, при которых рассматриваемых периодических движений не существует.

В особом случае той же бифуркационной ситуации $\rho_1 = +1$, когда устойчивое периодическое движение симметрично, оно переходит в неустойчивое с одновременным слиянием с парой неустойчивых либо рождением пары устой-

чивых симметричных движений того же периода.

Определение 3. *Бифуркация, связанная с обращением мультипликатора ρ_1 в -1 , называется бифуркацией удвоения периода.*

При пересечении границы N_- происходит удвоение периода колебаний. При этом исходное движение продолжает существовать, но становится неустойчивым. В момент бифуркации исходное движение либо сливается с неустойчивым удвоенного периода (субкритическая бифуркация удвоения периода), либо порождает устойчивое движение с удвоенным периодом (суперкритическая бифуркация удвоения периода).

Определение 4. *Бифуркация, связанная с появлением комплексно-сопряженной пары мультипликаторов, лежащих на единичной окружности, то есть $\rho_{1,2} = e^{\pm i\theta}$ ($0 < \theta < \pi$) называется бифуркацией Неймарка — Саккера.*

Бифуркация может быть супер- и субкритической. В зависимости от этого либо из устойчивой неподвижной точки рождается замкнутая инвариантная кривая, а сама неподвижная точка становится неустойчивой, либо устойчивая неподвижная точка сливается с неустойчивой замкнутой кривой. В результате этого неподвижная точка теряет устойчивость. В этом случае фазовые траектории динамической системы располагаются на замкнутой инвариантной кривой, а само движение периодически или квазипериодично.

3.1. Пример бифуркационного анализа. Отображение Хенона. Бифуркации седло-узел и удвоения периода

В качестве первого примера рассмотрим отображение Хенона:

$$x_k = 1 - \alpha x_{k-1}^2 + y_{k-1}; \quad y_k = \beta x_{k-1}, \quad |\beta| < 1, \quad -1 < \alpha < 3, \quad (4)$$

где α — коэффициент нелинейности; β — коэффициент диссипации.

Отображение (4) было введено французским астрофизиком М. Хеноном (в другой транскрипции — М. Энон) в качестве отображения Пуанкаре для трехмерной дифференциальной системы. С тех пор оно интенсивно изучалось многими авторами, как численно, так и с более теоретической точки зрения, с различными целями.

Неподвижные точки могут быть найдены из системы уравнений

$$\begin{cases} x = 1 - \alpha x^2 + y; \\ y = \beta x. \end{cases}$$

Исключая из этих уравнений y , получим

$$\alpha x^2 + (1 - \beta)x - 1 = 0. \quad (5)$$

Таким образом, отображение (4) имеет не более двух неподвижных точек:

$$x_{1,2} = \frac{\beta - 1 \pm \sqrt{(1 - \beta)^2 + 4\alpha}}{2\alpha}; \quad y_{1,2} = \beta x_{1,2}.$$

Найдем матрицу Якоби

$$J(x, y, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} -2\alpha x & 1 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}.$$

Для седло-узловой бифуркации имеем

$$\chi(1, \alpha, \beta) = \det(J(x, y, \alpha, \beta) - E) = 0, \quad (6)$$

где x, y — координаты неподвижной точки.

Это условие эквивалентно

$$1 + 2\alpha x - \beta = 0.$$

Уравнение кривой седло-узловой бифуркации N_+ можно найти из уравнения неподвижной точки (5) и бифуркационного условия (6).

$$\begin{cases} \alpha x^2 + (1 - \beta)x - 1 = 0; \\ 1 + 2\alpha x - \beta = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Исключая из системы (7) переменную x , получим уравнение кривой N_+ в форме явной зависимости между параметрами α и β :

$$N_+ = \left\{ (\alpha, \beta) : \alpha = -\frac{(\beta - 1)^2}{4} \right\}.$$

Вдоль этой кривой отображение имеет неподвижную точку с мультипликатором $\rho_1 = +1$.

Условие бифуркации удвоения периода записывается в виде

$$\chi(-1, \alpha, \beta) = \det(J(x, y, \alpha, \beta) + E) = 0. \quad (8)$$

Комбинируя условие (8) с уравнением неподвижной точки (5), имеем

$$\begin{cases} \alpha x^2 + (1 - \beta)x - 1 = 0; \\ 1 - 2\alpha x - \beta = 0. \end{cases}$$

Исключая из этой системы переменную x , получим уравнение искомой бифуркационной кривой N_- :

$$N_- = \left\{ (\alpha, \beta) : \alpha = \frac{3(\beta - 1)^2}{4} \right\}.$$

При переходе через линию N_- в область значений $\alpha > \frac{3(\beta - 1)^2}{4}$ неподвижная точка (цикл периода 1) теряет устойчивость и мягко возникает устойчивый цикл удвоенного периода.

Таким образом, область устойчивости неподвижной точки ограничена кривой седло-узловой бифуркации N_+ и кривой бифуркации удвоения периода N_- (рис. 2).

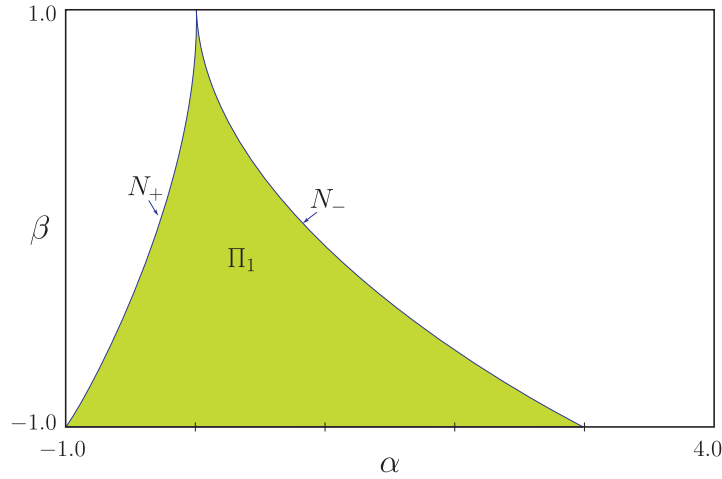


Рис. 2. Границы седло-узловой бифуркации N_+ и бифуркации удвоения периода N_-

4. Бифуркация Неймарка-Саккера

Рассмотрим двумерное отображение

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\alpha, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

которое для малых $|\alpha|$ имеет неподвижную точку

$$\mathbf{x}_0 = (0, 0)$$

с мультипликаторами

$$\rho_{1,2} = |\rho(\alpha)|e^{\pm i\theta(\alpha)}, \quad |\rho(0)| = 1, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad 0 < \theta_0 < \pi,$$

т.е. при бифуркационном значении параметра

$$\alpha = \alpha_0 = 0$$

комплексно-сопряженные мультипликаторы $\rho_{1,2}$ расположены на границе единичной окружности.

Замечание (тригонометрическая и показательная формы комплексных чисел): Пусть $\rho = \mu + i\gamma$ — комплексный мультипликатор, где μ, γ

– действительная и мнимая части, соответственно; i – мнимая единица ($i^2 = -1$).

$$\begin{aligned}\rho &= \mu + i\gamma = \sqrt{\mu^2 + \gamma^2} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \gamma^2}} + i \frac{\gamma}{\sqrt{\mu^2 + \gamma^2}} \right) = \\ &= |\rho| (\cos \theta + i \sin \theta), \\ |\rho| &= \sqrt{\mu^2 + \gamma^2}, \quad \cos \theta = \frac{\mu}{|\rho|}, \quad \sin \theta = \frac{\gamma}{|\rho|}.\end{aligned}$$

Здесь θ – аргумент комплексного числа.

Принимая во внимание, что тригонометрические и показательные функции связаны формулой Эйлера

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta},$$

можно записать комплексное число ρ в показательной форме

$$\rho = |\rho| e^{i\theta}.$$

Отметим, что модуль $|\rho|$ комплексных чисел вида $e^{i\theta}$ равен 1.

Определение [1]. Бифуркация неподвижной точки, при которой комплексно-сопряженная пара мультипликаторов попадает на границу единичной окружности, т.е. $\rho_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ (рис. 1(г)) называется бифуркацией Неймарка-Саккера (Neimark-Sacker bifurcation). Бифуркация реализуется только, если $n \geq 2$.

Анализ бифуркации Неймарка-Саккера основывается на следующей теореме.

Теорема [1]. Пусть двумерное отображение

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\alpha, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

имеет для малых значений параметра $|\alpha|$ неподвижную точку

$$\mathbf{x}_0 = (0, 0)$$

с мультипликаторами

$$\rho_{1,2} = |\rho(\alpha)| e^{\pm i\theta(\alpha)}, \quad |\rho(0)| = 1, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad 0 < \theta_0 < \pi.$$

Пусть выполнены следующие условия

$$\begin{aligned}r'(0) &\neq 0, \quad r(0) = |\rho(0)|, \quad (r(\alpha) = |\rho(\alpha)|), \\ e^{i k \theta_0} &\neq 1, \quad k = 1, 2, 3, 4.\end{aligned}$$

Тогда существует окрестность неподвижной точки $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$, в которой рождается единственная замкнутая инвариантная кривая при прохождении параметром α бифуркационного значения $\alpha_0 = 0$ (рис. 3).

5. Пример бифуркационного анализа

Ряд задач из биологии и экологии может быть сведен к анализу логистического отображения с задержкой

$$x_{k+1} = \alpha x_k(1 - y_k); \quad y_{k+1} = x_k, \quad x_k > 0, \quad y_k > 0.$$

Отображение имеет неподвижную точку $(0, 0)$ для всех значений параметра α . При $\alpha > 1$ возникает нетривиальная неподвижная точка с координатами

$$x = y = 1 - \alpha^{-1}.$$

Матрица Якоби, вычисленная в нетривиальной неподвижной точке, имеет вид

$$J(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы Якоби определяются выражением

$$\rho_{1,2}(\alpha) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} - \alpha}.$$

Если $\alpha > 5/4$, то мультипликаторы комплексные. Т.к. $|\rho_{1,2}|^2 = \rho_1\rho_2 = \alpha - 1$, то

$$r(\alpha) = |\rho_{1,2}| = \sqrt{\rho_1\rho_2} = \sqrt{\alpha - 1}.$$

Следовательно, в точке $\alpha = \alpha_0 = 2$ нетривиальная неподвижная точка теряет устойчивость, когда комплексно-сопряженная пара мультипликаторов выходит на границу единичного круга.

Мультипликаторы в бифуркационной точке $\alpha = \alpha_0 = 2$ равны

$$\rho_{1,2} = \mu \pm i\gamma = \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\theta_0},$$

Здесь

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{2}, \quad \sin \theta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_0 = \pi/3.$$

Проверим условие невырожденности, учитывая, что $\theta_0 = \pi/3$

$$r(\alpha) = \sqrt{\alpha - 1}, \quad r'(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha - 1}}, \quad r'(\alpha_0) = r'(2) = \frac{1}{2} \neq 0,$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \neq 1, \quad e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \neq 1,$$

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi \neq 1,$$

$$e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \neq 1.$$

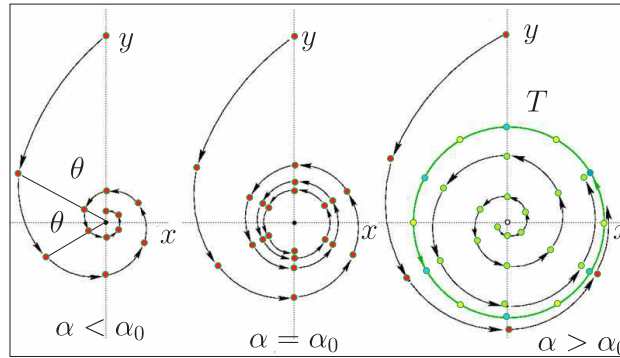


Рис. 3. Суперкритическая бифуркация Неймарка-Сакера

Следовательно, в системе из неподвижной точки рождается замкнутая инвариантная кривая T .

Движение на замкнутой инвариантной кривой T определяется *числом вращения* w [1-3]:

$$w = \frac{\theta}{2\pi} \pmod{1}.$$

Когда оно иррационально, замкнутая кривая всюду плотно заполняется траекториями (сечение Пуанкаре представляет собой гладкую замкнутую кривую) и динамика квазипериодична (рис. 4(а)).

В случае, если w — рациональное число:

$$w = \frac{p}{q},$$

где p, q — целые числа, то говорят, что имеет место резонанс $p : q$, так как через q итераций траектория замыкается на замкнутой инвариантной кривой (для рассматриваемого примера $w = \frac{\theta_0}{2\pi} = 1 : 6$, $\theta_0 = \pi/3$).

При рациональном числе вращения на замкнутой инвариантной кривой имеется четное число периодических орбит, половина из которых устойчивые, а половина — седловые. Сама же инвариантная кривая образована замыканием неустойчивых многообразий W_{\pm}^U седлового цикла (рис. 4(б)).

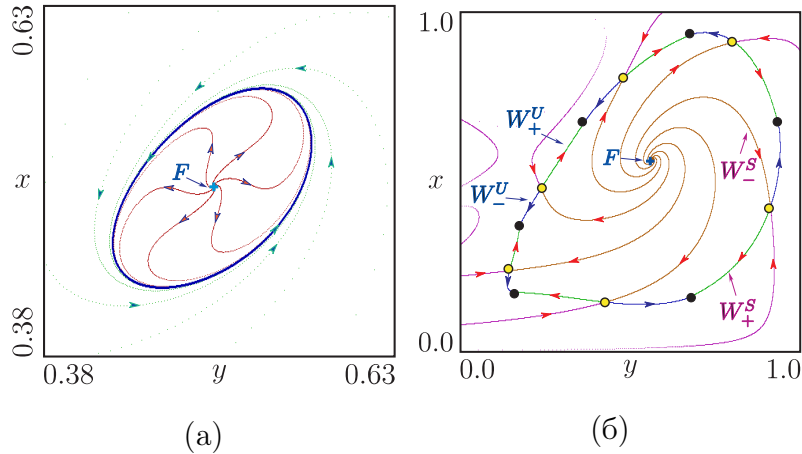


Рис. 4. (а) Замкнутая инвариантная кривая с иррациональным числом вращения. (б) Замкнутая инвариантная кривая с числом вращения $1 : 6$. Здесь F – неустойчивая неподвижная точка. W_{\pm}^U, W_{\pm}^S устойчивые и неустойчивые многообразия седлового 6-цикла

6. Задачи для практических и лабораторных занятий

1. Для логистического отображения с задержкой

$$x_{k+1} = y_k, \quad y_k = \lambda x_k(1 - y_k) + \varepsilon$$

найдите неподвижные точки, матрицу Якоби, а также ее след и определитель как функции параметров λ и ε . Найдите линии бифуркации седло-узел, бифуркации удвоения периода и бифуркации Неймарка-Саккера и нанесите их на плоскость (λ, ε) . Проверьте условия бифуркации Неймарка-Саккера.

2. Для двумерного необратимого отображения

$$x_{k+1} = y_k, \\ y_{k+1} = by_k - cx_k + x_k^2$$

найдите неподвижные точки, матрицу Якоби, а также ее след и определитель как функции параметров b и c . Найдите линии бифуркации седло-узел, бифуркации удвоения периода и бифуркации Неймарка-Саккера и нанесите их на плоскость (b, c) . Проверьте условия бифуркации Неймарка-Саккера.

3. Для двумерного отображения

$$x_{k+1} = ax_k + y_k, \quad y_{k+1} = bx_k + x_k^3$$

постройте области устойчивости неподвижных точек на плоскости параметров (a, b) .

4. Для двумерного кусочно-гладкого отображения

$$x_{k+1} = e^{\lambda_1} x_k + e^{\lambda_1(1-z_k)} - e^{\lambda_1}; \\ y_{k+1} = e^{\lambda_2} y_k + e^{\lambda_2(1-z_k)} - e^{\lambda_2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \tag{9}$$

$$z_k = \begin{cases} 0, & \varphi_k \leq 0; \\ \frac{\alpha\Omega}{q} \varphi_k, & 0 < \varphi_k < \frac{q}{\alpha\Omega}; \\ 1, & \varphi_k \geq \frac{q}{\alpha\Omega}, \end{cases}$$

$$\varphi_k = x_k - \vartheta y_k + \frac{q}{2\Omega} \quad (0 \leq z_k \leq 1)$$

рассчитайте численно границу бифуркации Неймарка-Саккера на плоскости параметров (α, Ω) . Параметры: $q = 17,8$, $P = 2q$, $\lambda_1 \approx -0.977$, $\lambda_2 \approx -0.232$, $2 < \alpha < 30$, $3 < \Omega < 20$.

5. Напишите программу расчета линии бифуркации Неймарка-Саккера на плоскости параметров (α, Ω) для двумерного отображения

$$\begin{cases} x_{k+1} = e^{\lambda_1} x_k + s_k \{e^{\lambda_1(1-z_k)/2} - e^{\lambda_1(1+z_k)/2}\}; \\ y_{k+1} = e^{\lambda_2} y_k + s_k \{e^{\lambda_2(1-z_k)/2} - e^{\lambda_2(1+z_k)/2}\}, \end{cases}$$

$$s_k = \begin{cases} 1, & \varphi_k \geq 0; \\ -1, & \varphi_k < 0, \end{cases}$$

$$z_k = \begin{cases} \frac{\alpha\Omega}{P} \varphi_k, & |\varphi_k| < \frac{P}{\alpha\Omega}; \\ 1, & |\varphi_k| \geq \frac{P}{\alpha\Omega}, \end{cases}$$

где $\varphi_k = x_k - \vartheta y_k + \frac{q}{\Omega}$. Параметры: $q = 17,8$, $P = 2q$, $\lambda_1 \approx -0.977$, $\lambda_2 \approx -0.232$, $2 < \alpha < 30$, $2 < \Omega < 20$.

Библиографический список

1. *Постнов, Д. Э.* Введение в динамику итерируемых отображений [Текст] / Д. Э. Постнов. Саратов.: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. 160 с.
2. *Жусубалиев, Ж. Т.* Бифуркации в широтно-импульсных системах автоматического управления [Текст]: учебное пособие / Ж. Т. Жусубалиев, В. С. Титов, О. О. Яночкина; Курск. гос. техн. ун-т. 2-е изд., перераб. и доп. Курск, 2009. 124 с. Библиогр.: с. 119-123.