

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 07.10.2023 09:45:58

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f6c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

## МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники



### **ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ МЕТОДАМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

Методические указания к лабораторным и практическим занятиям для  
студентов направлений подготовки 09.03.01 и 09.04.01

Информатика и вычислительная техника

УДК 534.1

Составитель Ж.Т. Жусубалиев

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *Т.Н. Конаныхина*

**Численное решение задач безусловной минимизации методами второго порядка:** методические указания к лабораторным и практическим занятиям для студентов направлений подготовки 09.03.01 и 09.04.01 Информатика и вычислительная техника/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Ж.Т. Жусубалиев. – Курск, 2022. – 7 с.: – Библиогр.: с. 7.

Описываются численные методы безусловной многомерной минимизации методами второго порядка. Описаны алгоритмы методов Ньютона и Ньютона - Рафсона. Предназначены для студентов направлений подготовки 09.03.01, 09.04.01 очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать                      2022. Формат **60 × 84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>**.  
Усл. печ. л.                      . Уч.-изд. л.                      . Тираж 50 экз. Заказ                      . Бесплатно.  
Юго-Западный государственный университет.  
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

## 1. Цель работы

Изучение численных методов многомерной безусловной минимизации методами второго порядка – алгоритмов методов Ньютона и Ньютона - Рафсона.

## 2. Постановка задачи

Пусть дана функция многих переменных  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , которая имеет непрерывные частные производные во всех его точках.

Требуется найти локальный минимум функции  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , т.е. такую точку  $\mathbf{x}_* \in \mathbb{R}^n$ , в которой она принимает минимальное значение

$$\mathbf{x}_* = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

## 3. Метод Ньютона

Идея метода Ньютона, как и методов первого порядка, состоит в построении последовательности приближений  $\mathbf{x}^{(0)}$ ,  $\mathbf{x}^{(1)}$ ,  $\mathbf{x}^{(2)}$ , ..., точки  $\mathbf{x}_*$ , таких что  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{k+1}) < \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  (т.е. выполняется условие убывания).

Такая последовательность вычисляется

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)}, \quad , k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где направление спуска  $\mathbf{p}^{(k)}$  определяется по формуле

$$\mathbf{p}^{(k)} = -\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^k). \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)})$  – матрица Гессе. Если  $\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)}) > 0$  (положительно-определена), то  $\mathbf{p}^{(k)}$ , выбранное таким образом, гарантирует условие убывания функции  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{k+1}) < \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$ .

Формула получена из следующих соображений:

1. Минимизируемая функция  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  аппроксимируется в каждой точке последовательности  $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$  квадратичной функцией

$$\Phi_k(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) + \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) + \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)})^T \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}). \quad (3)$$

2. Находим минимум этой функции из условия  $\nabla \Phi_k(\mathbf{x}) = 0$ :

$$\nabla \Phi_k(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) + \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) = 0. \quad (4)$$

Пусть матрица  $\mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k)})$  положительно-определена, следовательно невырождена. Тогда существует обратная матрица  $\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)})$ , так что функция  $\Phi_k(\mathbf{x}^k)$  имеет единственную точку глобального минимума.

Решив уравнение (4) относительно  $\mathbf{x}$ , найдем точку минимума квадратичной функции  $\Phi_k(\mathbf{x})$ .

Примем эту точку за следующее приближение  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  точки минимума функции  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots . \quad (5)$$

**Алгоритм** включает следующие шаги

- Шаг 1. Задать  $\mathbf{x}^{(0)}$ ,  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$  и  $m$  и найти найти градиент функции и матрицу Гессе в произвольной точке.
- Шаг 2. Положить  $k = 0$ .
- Шаг 3. Вычислить  $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$ .
- Шаг 4. Проверить условие останова  $\|\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\| < \varepsilon_1$ :
  - (а) если условие выполняется, то  $\mathbf{x}_* = \mathbf{x}^{(k)}$ ;
  - (б) если нет, то перейти к шагу 5.
- Шаг 5. Проверить условие  $k > m$ :
  - (а) если условие выполняется, то мы говорим, что принудительно завершаем работу алгоритма (вопрос, насколько близко  $\mathbf{x}^{(k)}$  к  $\mathbf{x}_*$ , требует дополнительного исследования);
  - (б) если нет, то перейти к шагу 6.
- Шаг 6. Вычислить матрицу  $\mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k)})$ .
- Шаг 7. Вычислить матрицу  $\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)})$ .
- Шаг 8. Проверить условие  $\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)}) > 0$ :
  - (а) если  $\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)}) > 0$ , то перейти к шагу 9;
  - (б) если нет, то перейти к шагу 10, положив  $\mathbf{p}(\mathbf{x}^k) = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$ .
- Шаг 9. Вычислить

$$\mathbf{p}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}) = -\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^k).$$

- Шаг 10. Найти

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}(\mathbf{x}^k),$$

положив  $\alpha_k = 1$ , если  $\mathbf{p}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}) = -\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$  или выбрать  $\alpha_k$  из условия  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{k+1}) < \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$ .

- Шаг 11. Проверить выполнение условий  $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}^{k+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\| < \varepsilon_2$  и  $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| < \varepsilon_2$ :
  - (а) если условия выполняются то  $\mathbf{x}_* = \mathbf{x}^{(k+1)}$  и закончить поиск.
  - (б) если хотя бы одно из условий не выполняется, то положить  $k = k + 1$  и перейти к шагу 3.

#### 4. Метод Ньютона - Рафсона

Постановка задачи такая же, как и для метода Ньютона. Поэтому не будем ее повторять, а сразу же перейдем к решению задачи.

Последовательность  $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  приближений к точке минимума  $\mathbf{x}_*$  вычисляется

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha_k \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Шаг  $\alpha_k$  рассчитывается для каждого шага  $k$  из условия

$$\alpha_k = \min_{\alpha > 0} \varphi_k(\alpha), \quad \varphi_k(\alpha) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(k)} - \alpha \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\right).$$

#### Алгоритм

- Шаг 1. Задать  $\mathbf{x}^{(0)}$ ,  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$  и  $m$  и найти найти градиент функции им матрицу Гессе в произвольной точке.
- Шаг 2. Положить  $k = 0$ .
- Шаг 3. Вычислить  $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$ .
- Шаг 4. Проверить условие останова  $\|\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\| < \varepsilon_1$ :
  - (а) если условие выполняется, то  $\mathbf{x}_* = \mathbf{x}^{(k)}$ ;
  - (б) если нет, то перейти к шагу 5.

- Шаг 5. Проверить условие  $k > m$ :
  - (а) если условие выполняется, то мы говорим, что принудительно завершаем работу алгоритма (вопрос, насколько близко  $\mathbf{x}^{(k)}$  к  $\mathbf{x}_*$ , требует дополнительного исследования);
  - (б) если нет, то перейти к шагу 6.
- Шаг 6. Вычислить матрицу  $\mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k)})$ .
- Шаг 7. Вычислить матрицу  $\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)})$ .
- Шаг 8. Проверить условие  $\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)}) > 0$ :
  - (а) если  $\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)}) > 0$ , то перейти к шагу 9;
  - (б) если нет, то перейти к шагу 10, положив  $\mathbf{p}(\mathbf{x}^k) = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$ .

- Шаг 9. Вычислить шаг  $\alpha_k$

$$\alpha_k = \min_{\alpha > 0} \varphi_k(\alpha), \quad \varphi_k(\alpha) = \mathbf{f} \left( \mathbf{x}^{(k)} - \alpha \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) \right).$$

- Шаг 10. Найти

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}(\mathbf{x}^k).$$

- Шаг 11. Проверить выполнение условий  $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}^{k+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\| < \varepsilon_2$  и  $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| < \varepsilon_2$ :
  - (а) если условия выполняются то  $\mathbf{x}_* = \mathbf{x}^{(k+1)}$  и закончить поиск;
  - (б) если хотя бы одно из условий не выполняется, то положить  $k = k + 1$  и перейти к шагу 3.

### Задания к лабораторным и практическим занятиям

1. Решить численно задачу минимизации квадратичной функции

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{x}$$

методами Ньютона и Ньютона -Рафсона. За сколько итераций сходится каждый из методов?

Здесь

$$A = \begin{bmatrix} N & -N \\ -N & N + 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3N - 1 \\ 5N + 3 \end{bmatrix}.$$

Параметр  $N$  равен номеру студента в списке группы.

2. Найти минимум функции Розенброка

$$f(\mathbf{x}) = 100(x_1^2 - x_2)^2 + (x_1 - 1)^2, \quad \mathbf{x}^{(0)} = (-1, 1)^T.$$

методами Ньютона и Ньютона - Рафсона.

3. Найти максимум функции

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(x_1 + 1)^2 + x_2^2}, \quad \mathbf{x}^{(0)} = (-1, 1)^T.$$

методами Ньютона и Ньютона - Рафсона.

4. Найти минимум функций

$$f(\mathbf{x}) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2, \quad \mathbf{x}^{(0)} = (8, 9)^T;$$
$$f(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2, \quad \mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)^T;$$

методами Ньютона и Ньютона - Рафсона.

### Библиографический список

1. *Амосов, А.А.* Вычислительные методы для инженеров: Учебное пособие / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова – М.: Высш. шк., 1994. – 544 с

2. *Аттетков, А. В.* Введение в методы оптимизации [Текст]: учебное пособие / А. В. Аттетков, В. С. Зарубин, А. Н. Канатников. - М. : Финансы и статистика, 2008. - 272 с.

3. *Гончаров, В. А.* Методы оптимизации [Текст] : учебное пособие / В. А. Гончаров. - М. : Юрайт, 2010. - 191 с.

4. *Пантелеев, А. В.* Методы оптимизации в примерах и задачах [Текст] : учебное пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. - 2-е изд., испр. - М. : Высшая школа, 2005. - 544 с.