

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 07.10.2023 09:45:58

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e556c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники



## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОДНОМЕРНОЙ МИНИМИЗАЦИИ: МЕТОДЫ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

Методические указания к лабораторным и практическим занятиям для  
студентов направлений подготовки 09.03.01 и 09.04.01

Информатика и вычислительная техника

УДК 534.1

Составитель Ж.Т. Жусубалиев

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *Т.Н. Конаныхина*

**Численные методы одномерной минимизации: методы нулевого порядка:** методические указания к лабораторным и практическим занятиям для студентов направлений подготовки 09.03.01 и 09.04.01 Информатика и вычислительная техника/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Ж.Т. Жусубалиев. – Курск, 2022. – 16 с.: ил.17. – Библиогр.: с. 16.

Описываются алгоритмы численного поиска минимума функции одной переменной методами нулевого порядка (прямого поиска). Предназначены для студентов направлений подготовки 09.03.01, 09.04.01 очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 2022. Формат  $60 \times 84^{1/16}$ .  
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 50 экз. Заказ . Бесплатно.  
Юго-Западный государственный университет.  
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

## 1. Цель работы

Изучение численных алгоритмов одномерной минимизации методами нулевого порядка и получение практических навыков численного решения задач одномерной минимизации.

## 2. Постановка задачи

Как нам уже известно, что в точках, где функция  $f(x)$  достигает максимума или минимума, ее производная  $f'(x)$  равна нулю. Мы также знаем, как, пользуясь производной первого порядка, можно установить, что имеет функция  $f(x)$  в данной точке  $x = x_*$  (стационарной) максимум, минимум или перегиб. Для этого приходится нам вычислять  $f'(x)$  при значениях  $x$ , близких к  $x_*$ , справа и слева от  $x_*$ .

Мы знаем также другой метод, при котором к решению задачи привлекается вторая, третья и т.д. производные функции  $f(x)$ .

Важно отметить, что задача о нахождении того значения  $x$ , при котором данная функция  $f(x)$  достигает максимума, эквивалентна задаче нахождения минимума функции  $-f(x)$ .

То есть для этого достаточно поменять знак функции  $f(x)$  на противоположный. Поэтому далее мы будем рассматривать только задачи нахождения минимума  $f(x)$ .

Пусть требуется найти минимум функции  $f(x)$  на отрезке  $[a_0, b_0]$ . Обычно для этого применяют численные методы, при которых решение задачи находится с заданной точностью в результате вычисления конечного числа значений  $f(x)$  и ее производных в некоторых точках внутри заданного отрезка  $[a_0, b_0]$ . Этот интервал называется интервалом неопределенности.

Такие методы делятся на несколько классов. Фактически все эти методы основаны на предположении, что  $f(x)$  на отрезке  $[a_0, b_0]$  является **униmodalной**. Определение **униmodalности**  $f(x)$  дадим чуть позже.

Мы начнем с изучения численных методов одномерной минимизации, в которых используются только значения функции в некоторых точках заданного отрезка  $[a, b]$  и не требуются вычисления ее производных. Такие методы носят название **прямых методов** или **методов нулевого порядка**.

Определение. Функция  $f(x)$  называется униmodalной на интервале  $[a_0, b_0]$ , если она достигает глобального минимума на  $[a_0, b_0]$  в единственной точке  $x_*$ . Причем слева от  $x_*$  функция  $f(x)$  строго убывает, а справа от  $x_*$  — строго возрастает.

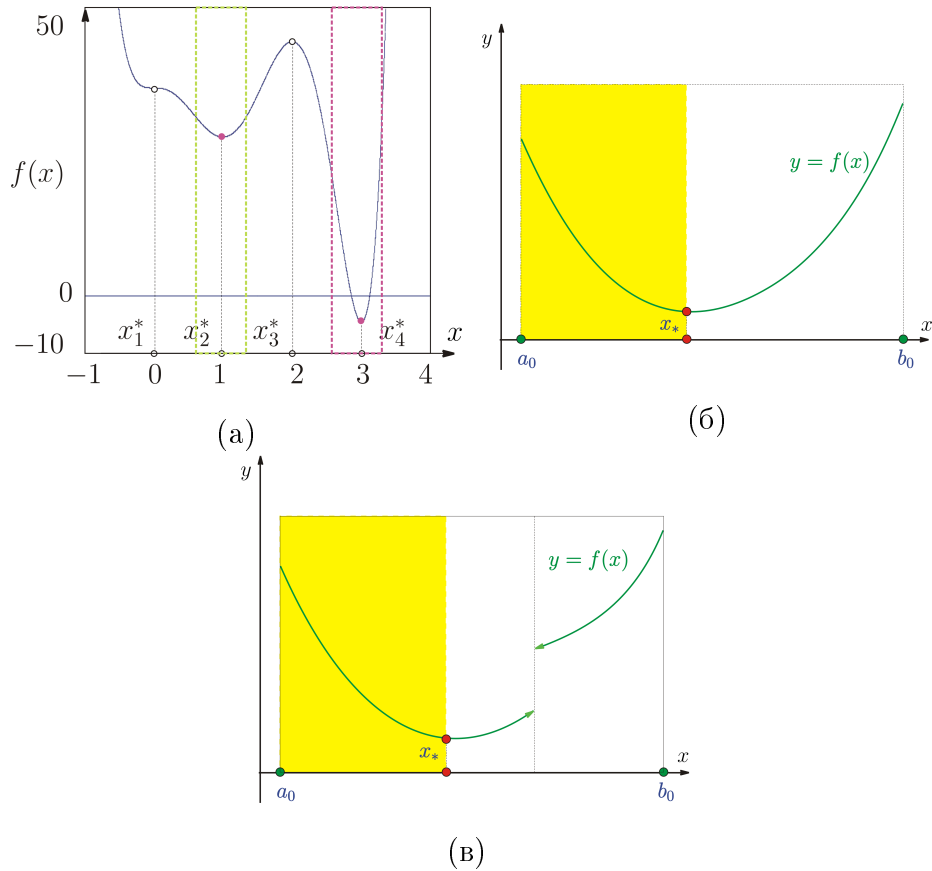
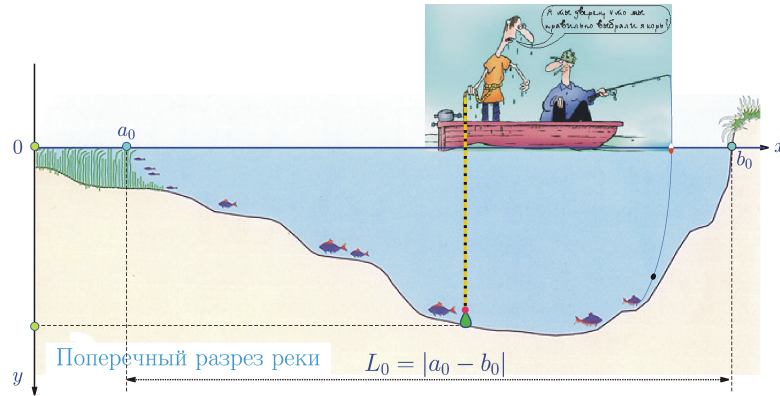


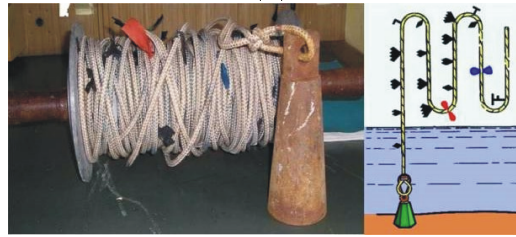
Рис. 1. (а) Функция, содержащая несколько локальных экстремумов и не являющаяся унимодальной. (б),(в) Унимодальные функции

## 2.1. Основные этапы численного решения задачи

- Выбор начального интервала неопределенности  $[a_0, b_0]$ . Границы  $a_0$  и  $b_0$  должны быть такими, чтобы функция  $f(x)$  была унимодальной.
- Уменьшение интервала неопределенности, на котором реализуется конечная последовательность преобразований исходного интервала с тем, чтобы уменьшить его длину до заранее установленной величины.
- Проверка условия окончания поиска. Поиск заканчивается, когда, например, длина  $|a_k - b_k|$ ,  $k = 1, 2, \dots$  текущего интервала неопределенности  $[a_k, b_k]$  оказывается меньше установленной величины.
- Заметим, что выбор критерия останова очень сложен, в особенности для плохо масштабированных задач. В полном объеме этот вопрос требует отдельного обсуждения.



(а)



(б)

Рис. 2. (а) Определение наибольшей глубины в поперечном сечении реки бросанием ручного лота. (б) Ручной лот

## 2.2. Пример. Определение наибольшей глубины водоема ручным лотом

Простейшим методом решения задачи является **метод перебора**. Разобъем отрезок  $[a_0, b_0]$  на  $N$  равных частей точками деления

$$x_k = a_0 + \frac{L_0}{N} \cdot k, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad L_0 = b_0 - a_0 = |a_0 - b_0|.$$

Выполним  $N$  измерений бросанием лота в точках  $x_k$  и найдем точку для которой глубина наибольшая. Заметим, что погрешность определения наибольшей глубины не превосходит величины

$$\varepsilon = \frac{L_0}{N}.$$

Число измерений (экспериментов) определяется величиной  $\varepsilon$ . При малых  $\varepsilon$ , число измерений  $N$  может достигать астрономических величин.

**Как уменьшить число экспериментов? Рассмотрим далее методы, позволяющие уменьшить число экспериментов.**

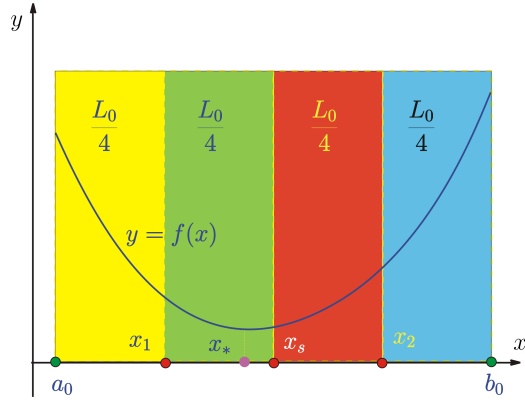


Рис. 3. Выбор пробных точек:  $L_0 = |a_0 - b_0|$  — длина интервала неопределенности;  $x_1, x_2, x_s$  — пробные точки

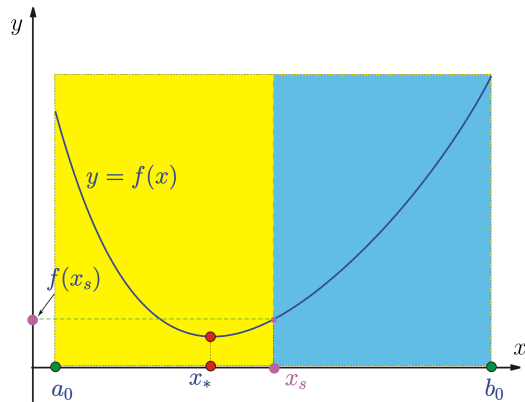


Рис. 4.

### 2.3. Метод деления интервала пополам

Метод позволяет исключить половину текущего интервала неопределенности на каждой итерации. Иногда этот метод называют **трехточечным поиском на равных интервалах**, поскольку реализация метода основана на выборе трех пробных точек  $x_1, x_2$  и  $x_s$ , равномерно распределенных в интервале поиска.

- Шаг 1. Задать начальный интервал неопределенности  $[a_0, b_0]$  и требуемую точность  $\varepsilon > 0$  определения точки минимума  $x_*$  функции  $f(x)$ .
- Шаг 2. Вычислить среднюю точку  $x_s = \frac{a_0 + b_0}{2}$  и длину интервала неопределенности  $L_0 = |a_0 - b_0|$ . Вычислить значение функции в средней точке, т.е.  $f(x_s)$  (рис. 4).

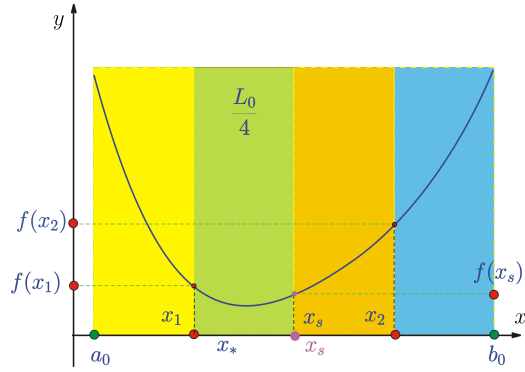


Рис. 5.

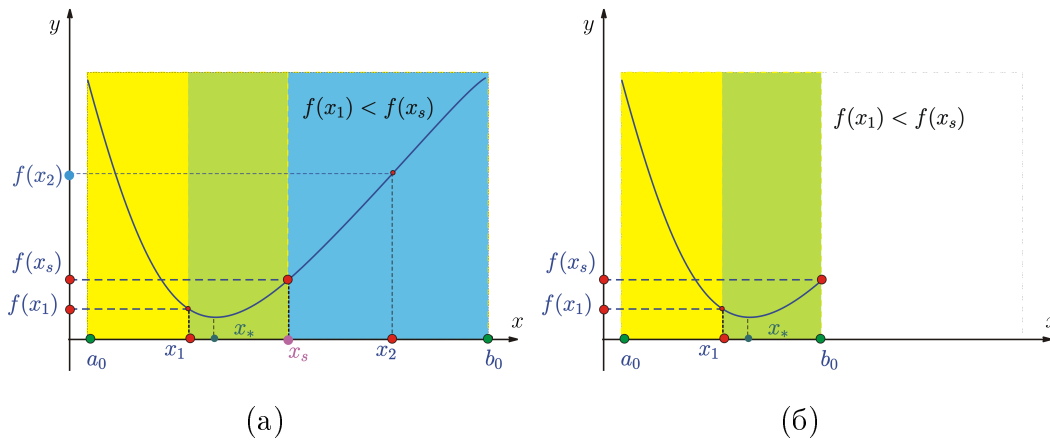


Рис. 6.

- Шаг 3. Вычислить две пробные точки:

$$x_1 = a_0 + \frac{L_0}{4}; \quad x_2 = b_0 - \frac{L_0}{4}.$$

- Шаг 4. Вычислить значения функции  $f(x)$  в пробных точках, т.е.  $f(x_1)$ ,  $f(x_2)$  (рис. 5). Сравнить  $f(x_1)$  и  $f(x_s)$ .
  - 4.1. Если  $f(x_1) < f(x_s)$ , то исключить отрезок  $[x_s, b_0]$ , положив  $b_0 \leftarrow x_s$ . Средней точкой нового интервала становится  $x_1$ :  $x_s \leftarrow x_1$  (рис. 6). Перейти к шагу 6.
  - 4.2. Если  $f(x_1) \geq f(x_s)$ , то перейти к шагу 5.
- Шаг 5. Сравнить  $f(x_2)$  и  $f(x_s)$ .
  - 5.1. Если  $f(x_2) < f(x_s)$ , то исключить отрезок  $[a_0, x_s]$ , положив  $a_0 \leftarrow x_s$  и  $x_s \leftarrow x_2$  (рис. 7). Перейти к шагу 6.
  - 5.2. Если  $f(x_2) \geq f(x_s)$ , то исключить отрезки  $[a_0, x_1]$  и  $[b_0, x_2]$ , положив  $a_0 \leftarrow x_1$  и  $b_0 \leftarrow x_2$ ,  $x_s$  — средняя точка (рис. 8). Перейти к шагу 6.

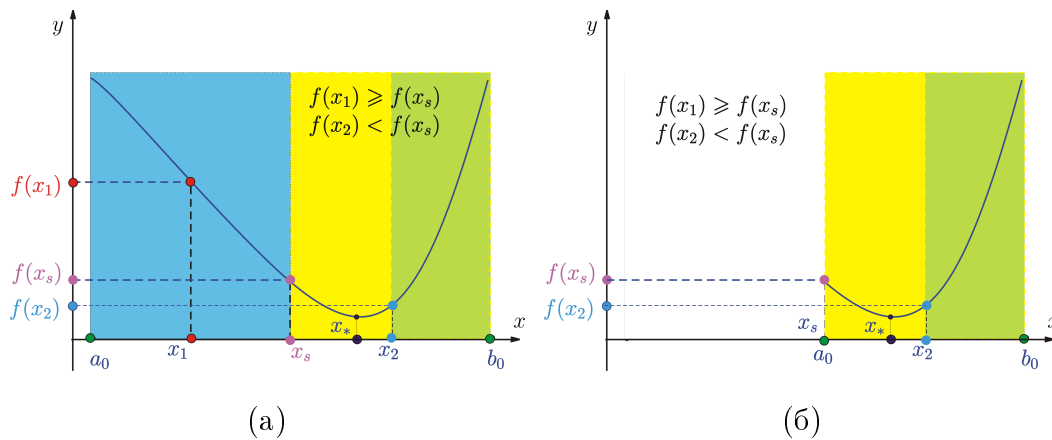


Рис. 7.

- Шаг 6. Вычислить длину текущего интервала неопределенности:

$$L_0 = |a_0 - b_0|.$$

Если  $L_0 < \varepsilon$ , то закончить поиск. В качестве приближенного решения задачи можно взять середину последнего интервала поиска. В противном случае вернуться к шагу 3.

- **ЗАМЕЧАНИЕ.** Средняя точка последовательно получаемых интервалов всегда совпадает с одной из пробных точек  $x_1$  и  $x_2$  или  $x_s$ , найденных на предыдущей итерации. Следовательно, на каждой итерации требуется не более двух вычислений значения функции.
- Число итераций, необходимое для определения точки минимума  $x_*$  с точностью  $\varepsilon$  находится из неравенства:

$$\frac{L_0}{2^k} \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Отсюда

$$k \geq \frac{\ln(L_0/\varepsilon)}{\ln 2}.$$

Здесь  $L_0$  — длина начального интервала неопределенности.

### 3. Метод дихотомии

Алгоритм метода опирается на анализ значений функции в двух точках. Для нахождения этих точек текущий интервал неопределенности делится



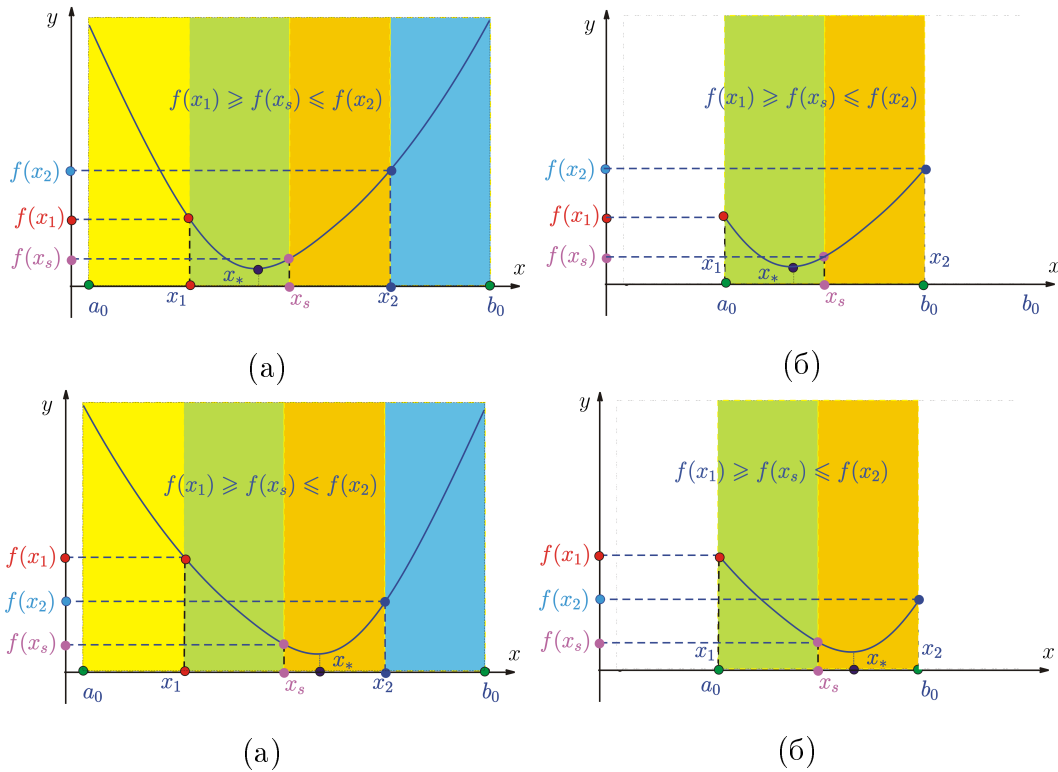


Рис. 8.

пополам, и в обе стороны от середины откладывается отрезок длиной  $\frac{\delta}{2}$ , где  $\delta$  — малое положительное число.

Условия окончания процесса поиска стандартные: поиск заканчивается, когда длина текущего интервала неопределенности оказывается меньше установленной величины.

Алгоритм включает следующие шаги.

- Шаг 1. Задать начальный интервал неопределенности  $[a_0, b_0]$ , требуемую точность  $\varepsilon > 0$  определения точки минимума  $x_*$  и  $\delta > 0$  — малое число.
- Шаг 2. Вычислить две пробные точки:

$$x_1 = \frac{a_0 + b_0 - \delta}{2}; \quad x_2 = \frac{a_0 + b_0 + \delta}{2}$$

Вычислить значения функции  $f(x)$  в пробных точках, т.е.  $f(x_1)$ ,  $f(x_2)$  (см. рис. 9(a)).

- Шаг 3. Сравнить  $f(x_1)$  и  $f(x_2)$ .

3.1. Если  $f(x_1) < f(x_2)$ , то исключить отрезок  $[x_2, b_0]$ , положив  $b_0 \leftarrow x_2$  (рис. 9(б)). Перейти к шагу 4.

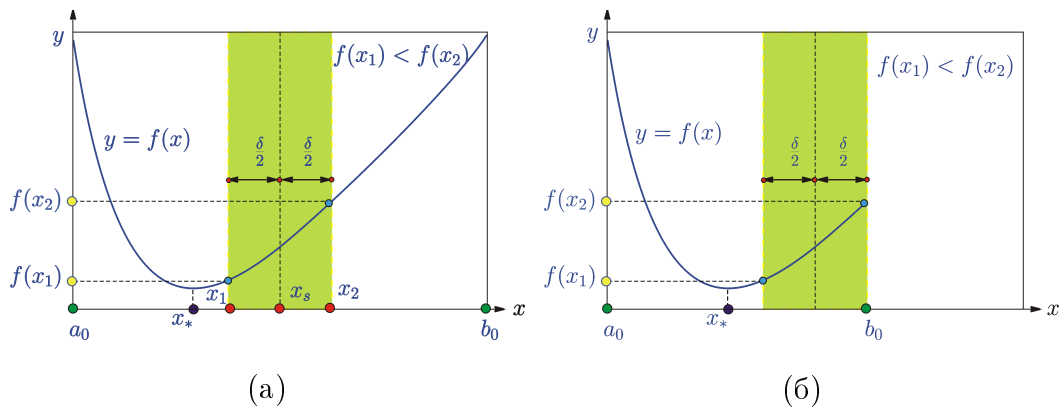


Рис. 9.

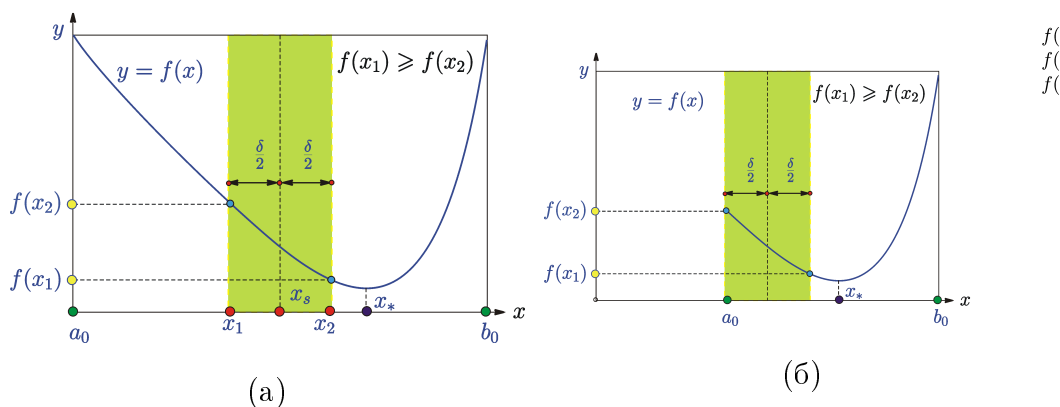


Рис. 10.

3.2. Если  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , то исключить отрезок  $[a_0, x_1]$ , положив  $a_0 \leftarrow x_1$  (рис. 10). Перейти к шагу 4..

- Шаг 4. Вычислить длину текущего интервала неопределенности:

$$L_0 = |a_0 - b_0|.$$

Если  $L_0 < \varepsilon$ , то закончить поиск. В качестве приближенного решения задачи можно взять середину последнего интервала поиска. В противном случае вернуться к шагу 2.

Число  $\delta$  выбирается на интервале  $(0.0; 2\varepsilon)$ .

#### 4. Метод золотого сечения

Золотое сечение получило распространение в архитектуре и живописи с XV века, благодаря великому итальянскому ученому и художнику Леонардо да Винчи. Пусть дан отрезок  $AB$ . Говорят, что точка  $C$  выполняет золотое

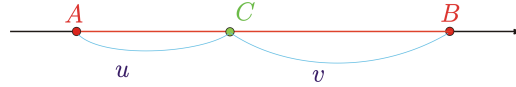


Рис. 11.

сечение  $AB$ , если

$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{AC}.$$

Определение *Золотым сечением отрезка  $AB$  называется такое его деление на две неравные части, при котором отношение длины всего отрезка к длине его большей части равно отношению большей части к длине меньшей.*

#### 4.1. Некоторые свойства золотого сечения

Обозначим  $AC = u$ ,  $BC = v$  (см. рис. 11), а отношение  $\Phi = v/u$  (от имени древнегреческого скульптора Фидия). **Чему равно отношение  $\Phi$  для золотого сечения?**

Имеем

$$\frac{v}{u} = \frac{v+u}{v}.$$

отсюда

$$\frac{v}{u} = 1 + \frac{u}{v}$$

и

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}.$$

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0.$$

Нас интересуют только положительные корни этого уравнения, поэтому

$$\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1.618034.$$

Причем,  $1/\Phi = \frac{2}{\sqrt{5} + 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618034$ .

Кроме точки  $C$ , существует еще одна точка  $D$ , осуществляющая золотое сечение (см. рис. 12):

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AB}{AD}.$$

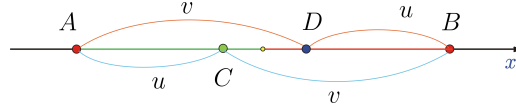


Рис. 12.

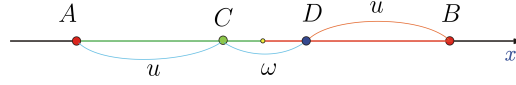


Рис. 13.

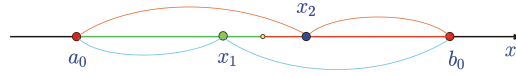


Рис. 14.

Очевидно, как и в предыдущем случае,

$$\frac{AD}{DB} = \Phi.$$

Таким образом,  $\frac{CB}{AC} = \Phi$ ,  $\frac{AD}{DB} = \Phi$ , что эквивалентно:

$$\frac{AB - AC}{AC} = \Phi, \quad \frac{AB - DB}{DB} = \Phi,$$

откуда  $(1 + \Phi)AC = AB$ ,  $(1 + \Phi)DB = AB$   
и значит  $AC = DB$ .

**Утверждение.** Точка  $C$  выполняет золотое сечение отрезка  $AD$ , а точка  $D$  – золотое сечение отрезка  $CB$  (см. рис. 13).

**Доказательство.**

Обозначим  $AC = DB = u$ ,  $CD = \omega$ . По определению золотого сечения

$$\frac{u + \omega}{u} = \frac{2u + \omega}{u + \omega}$$

или  $1 + \frac{\omega}{u} = 1 + \frac{u}{u + \omega}$ , откуда  $\frac{\omega}{u} = \frac{u}{u + \omega}$  и  $\frac{u}{\omega} = \frac{u + \omega}{u}$ . Отсюда и следует утверждение.

## 4.2. Алгоритм

- На первом шаге алгоритма рассматриваем начальный отрезок неопределенности  $[a_0, b_0]$  и выбираем две пробные точки  $x_1$  и  $x_2$ , выполняющие золотое сечение отрезка  $[a_0, b_0]$ . Эти точки расположены симметрично относительно середины отрезка (рис. 14):  $x_1 = a_0 + \frac{2}{3 + \sqrt{5}}(b_0 - a_0) =$

$$a_0 + (2 - \Phi)(b_0 - a_0);$$

$$x_2 = a_0 + \frac{2}{1 + \sqrt{5}}(b_0 - a_0) = a_0 + (\Phi - 1)(b_0 - a_0).$$

Здесь

$$\frac{b_0 - a_0}{b_0 - x_1} = \frac{b_0 - x_1}{x_1 - a_0} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \quad \frac{b_0 - a_0}{x_2 - a_0} = \frac{x_2 - a_0}{b_0 - x_2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Таким образом, чтобы выполнить процедуру сокращения интервала неопределенности  $[a_0, b_0]$  необходимо двумя внутренними точками  $x_1$  и  $x_2$  разделить текущий интервал неопределенности на три части.

Эти точки выбирают симметрично относительно середины отрезка  $[a_0, b_0]$  таким образом, чтобы каждая из них производила золотое сечение  $[a_0, b_0]$ .

Пробные точки  $x_1$  и  $x_2$  находятся по формулам:

$$x_1 = a_0 + \frac{2}{3 + \sqrt{5}}(b_0 - a_0) = a_0 + (2 - \Phi)(b_0 - a_0);$$

$$x_2 = a_0 + \frac{2}{1 + \sqrt{5}}(b_0 - a_0) = a_0 + (\Phi - 1)(b_0 - a_0).$$

- Шаг 1. Задать начальный интервал неопределенности  $[a_0, b_0]$ , требуемую точность  $\varepsilon > 0$  определения точки минимума  $x_*$  целевой функции.
- Шаг 2. Вычислить две пробные точки:

$$x_1 = a_0 + \frac{2}{3 + \sqrt{5}}(b_0 - a_0) = a_0 + (2 - \Phi)(b_0 - a_0);$$

$$x_2 = a_0 + \frac{2}{1 + \sqrt{5}}(b_0 - a_0) = a_0 + (\Phi - 1)(b_0 - a_0)$$

- Шаг 3. Вычислить значения целевой функции в этих пробных точках (рис. 15), т.е.

$$f(x_1), \quad f(x_2).$$

- Шаг 4. Сравнить  $f(x_1)$  и  $f(x_2)$ .

4.1. Если  $f(x_1) < f(x_2)$ , то исключить отрезок  $[x_2, b_0]$ , положив  $b_0 \leftarrow x_2$ ,  $x_2 \leftarrow x_1$ ;  $f(x_2) \leftarrow f(x_1)$ ,  $x_1 \leftarrow a_0 + \frac{2}{3 + \sqrt{5}}(b_0 - a_0)$  (рис. 16). Перейти к шагу 5. Таким образом новый интервал неопределенности  $[a_0, b_0] = [a_0, x_2]$ . Нужно вычислить  $x_1 = a_0 + \frac{2}{3 + \sqrt{5}}(b_0 - a_0)$  и  $f(x_1)$ , а  $f(x_2)$  уже известно.

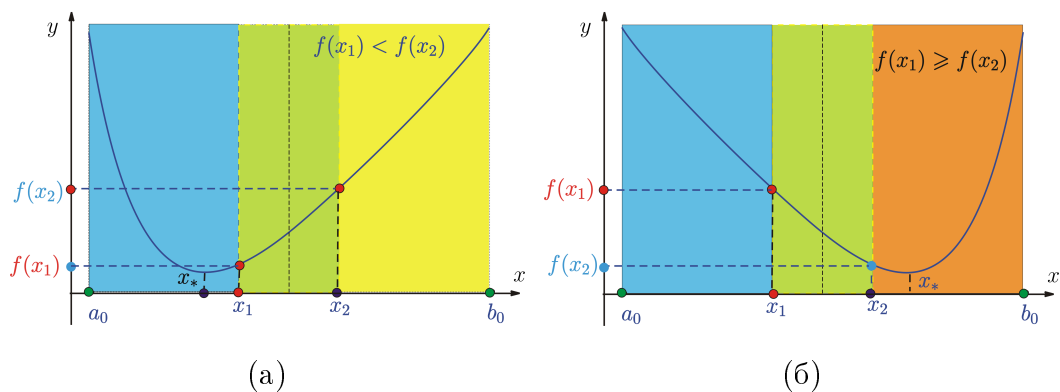


Рис. 15.

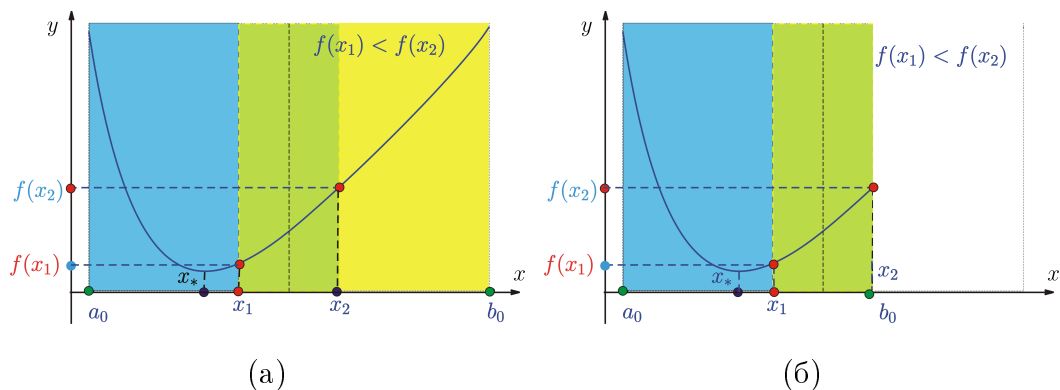


Рис. 16.

4.2. Если  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , то исключить отрезок  $[a_0, x_1]$ , положив  $a_0 \leftarrow x_1$ ;  $x_1 \leftarrow x_2$ ;  $f(x_1) \leftarrow f(x_2)$ ,  $x_2 \leftarrow a_0 + \frac{2}{1 + \sqrt{5}}(b_0 - a_0)$  (рис. 17). Перейти к шагу 5.

Таким образом новый интервал неопределенности  $[a_0, b_0] = [x_1, b_0]$ . Нужно вычислить  $x_2 = a_0 + \frac{2}{1 + \sqrt{5}}(b_0 - a_0)$  и  $f(x_2)$ , а  $f(x_1)$  уже известно.

- Шаг 5. Вычислить длину текущего интервала неопределенности:

$$L_0 = |a_0 - b_0|.$$

Если  $L_0 < \varepsilon$ , то закончить поиск. В качестве приближенного решения задачи можно взять середину последнего интервала поиска. В противном случае вернуться к шагу 3.

## 5. Задания к лабораторным и практическим занятиям

- 1. Напишите программу вычисления машинного эпсилона `masheps`. Введите счетчик, который позволит узнать в конце программы, какой сте-

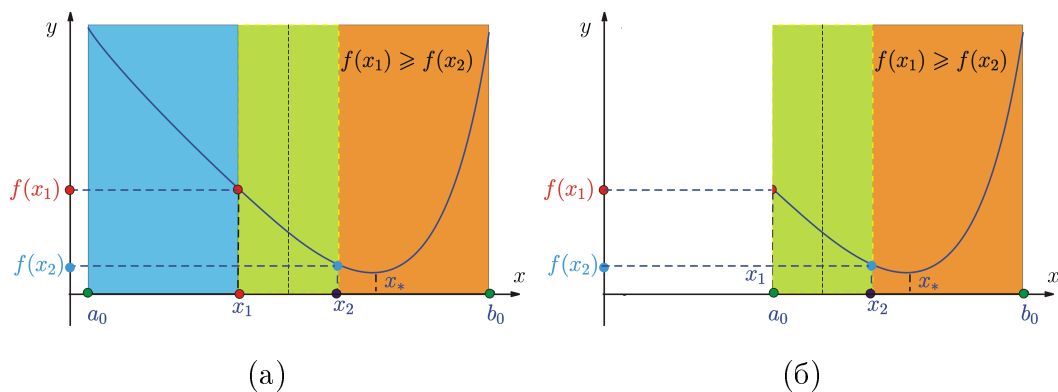


Рис. 17.

пению двойки является `masheps`.

**Указание.** Алгоритм может выглядеть следующим образом:

```

masheps := 1
while 1 + masheps > 1 do
masheps :=  $\frac{masheps}{2}$ 

```

- **2.** Методами деления интервала пополам, золотого сечения, дихотомии решите задачу одномерной минимизации:

(1)  $f(x) = x^3 - \sin x$ ,  $L_0 = [0; 1]$ ;

(2)  $f(x) = x^4 + x^2 + x + 1$ ,  $L_0 = [-1; 0]$ ;

(3)  $f(x) = x \sin(1/x)$ ,  $L_0 = [0.2; 1.0]$ ;

(4)  $f(x) = x \sin x + 2 \cos x$ ,  $L_0 = [-6; -4]$ .

(5)  $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ ,  $L_0 = [1; 2]$ ;

(6)  $f(x) = 10x \ln x - \frac{x^2}{2}$ ,  $L_0 = [0.1; 1.0]$ ;

(7)  $f(x) = e^x - \frac{x^3}{3} + 2x$ ,  $L_0 = [-2.5; -1.0]$ ;

(8)  $f(x) = x^2 - 2x - 2 \cos x$ ,  $L_0 = [-0.5; 1.0]$ .

(9)  $f(x) = (x - 1)^2 \sin x$ ,  $L_0 = [-2.0; 3.0]$ ;

(10)  $f(x) = x^4 + e^x$ ,  $L_0 = [0.0; 1.0]$ .

(11)  $f(x) = x^2 - 3x + x \ln x$ ,  $L_0 = [1.0; 2.0]$ .

(12)  $f(x) = \ln(1 + x^2) - \sin x$ ,  $L_0 = [0.0; \pi/4]$ .

$$(13) f(x) = \frac{x^4}{2} + x^2 - 8x + 12, L_0 = [0.0; 2.0].$$

$$(14) f(x) = \frac{x^2}{2} - \sin x, L_0 = [0.0; 1.0].$$

$$(15) f(x) = \frac{1}{x} + e^x, L_0 = [0.5; 1.5].$$

$$(16) f(x) = x^2 + x + \sin x, L_0 = [-1.0; 0.0].$$

$$(17) f(x) = x^2 + 3x(\ln x - 1), L_0 = [0.5; 1.0].$$

$$(18) f(x) = (x + 4)^4 - 2x^2, L_0 = [-3.0; -2.0].$$

$$(19) f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x, L_0 = [0.0; \pi/4].$$

$$(20) f(x) = \frac{x^3}{3} - 5x + x \ln x, L_0 = [1.5; 2.0].$$

$$(21) f(x) = x^2 - 2x - 2 \cos x, L_0 = [0.5; 1.0].$$

$$(22) f(x) = \sqrt{1 + x^2} - e^{-2x}, L_0 = [0.0; 1.0].$$

- Для каждого реализованного метода оценить число итераций, необходимое для определения точки минимума  $x_*$  с заданной точностью.  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \approx \sqrt{\text{masheps}}$ ). Проведите сравнение методов.

### Библиографический список

1. *Аттетков, А. В.* Введение в методы оптимизации [Текст]: учебное пособие / А. В. Аттетков, В. С. Зарубин, А. Н. Канатников. - М. : Финансы и статистика, 2008. - 272 с.

2. *Гончаров, В. А.* Методы оптимизации [Текст] : учебное пособие / В. А. Гончаров. - М. : Юрайт, 2010. - 191 с.

3. *Пантелеев, А. В.* Методы оптимизации в примерах и задачах [Текст] : учебное пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. - 2-е изд., испр. - М. : Высшая школа, 2005. - 544 с.