

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 14.10.2023 07:16:16

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

О.Г. Локтионова

« 5 » 10

2023 г.



## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Методические указания к выполнению лабораторных работ для  
студентов направления подготовки 09.03.01 Информатика и  
вычислительная техника

Курск 2023

УДК 004

Составитель Д.О. Бобынцев

Рецензент: к.т.н., доцент Халин Ю.А.

**Математическая экономика:** методические указания к выполнению лабораторных работ / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Д.О. Бобынцев. Курск, 2023. 76 с. Библиогр.: с. 76.

Содержит методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Математическая экономика». Указывается порядок выполнения работ, контрольные вопросы. Предназначено для студентов направления подготовки «Информатика и вычислительная техника».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 5.10.2023. Формат 60x84 1/16.  
Усл.печ. л. 4,42. Уч.-изд. л. 4. Тираж 100 экз. Заказ 1177 Бесплатно.  
Юго-Западный государственный университет.  
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ MS EXCEL

## Цель работы

Приобретение навыков решения задач линейного программирования(ЛП) в табличном процессоре Microsoft Excel.

## Порядок выполнения работы

Для модели ЛП, соответствующей номеру Вашего варианта, найдите оптимальное решение в табличном процессоре Microsoft Excel и продемонстрируйте его преподавателю.

## Инструкция по использованию MS Excel для решения задач ЛП

Для того чтобы решить задачу ЛП в табличном процессоре Microsoft Excel, необходимо выполнить следующие действия.

### 1. Ввести условие задачи:

#### *a) создать экранную форму для ввода условия задачи:*

- переменных,
- целевой функции (ЦФ),
- ограничений,
- граничных условий;

#### *b) ввести исходные данные в экранную форму:*

- коэффициенты ЦФ,
- коэффициенты при переменных в ограничениях,
- правые части ограничений;

#### *с) ввести зависимости из математической модели в экранную форму:*

- формулу для расчета ЦФ,
- формулы для расчета значений левых частей ограничений;

#### *d) задать ЦФ (в окне «Поиск решения»):*

- целевую ячейку,
- направление оптимизации ЦФ;

#### *e) ввести ограничения и граничные условия (в окне «Поиск решения»):*

- ячейки со значениями переменных,
- граничные условия для допустимых значений переменных,
- соотношения между правыми и левыми частями ограничений.

## 2. Решить задачу:

- установить параметры решения задачи (в окне «Поиск решения»);
- запустить задачу на решение (в окне «Поиск решения»);
- выбрать формат вывода решения (в окне «Результаты поиска решения»).

### Одноиндексные задачи ЛП

Рассмотрим пример нахождения решения для следующей одноиндексной задачи ЛП:

$$\begin{cases}
 L(X) = 130,5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87,8x_4 \rightarrow \max; \\
 -1,8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 756, \\
 -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \geq 450, \\
 4x_1 - 1,5x_2 + 10,4x_3 + 13x_4 \leq 89, \\
 x_j \geq 0; j = \overline{1,4}.
 \end{cases} \quad (1.1)$$

Ввод исходных данных

*Создание экранной формы и ввод в нее условия задачи*

Экранная форма для ввода условий задачи (1.1) вместе с введенными в нее исходными данными представлена на рис.1.

Пример_1 - Microsoft Excel							
Формулы							
	A	B	C	D	E	F	G
1				ПЕРЕМЕННЫЕ			
2	Имя	X1	X2	X3	X4		
3	Значение						
4	Нижняя гр.	0	0	0	0		
5						ЦФ	
6	Коэф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	Значение	Направл.
7							max
8				ОГРАИЧЕНИЯ			
9	Вид					Лев. часть	Знак
10	Огран. 1	-1,8	2	1	-4	=	756
11	Огран. 2	-6	2	4	-1	>=	450
12	Огран. 3	4	-1,5	10,4	13	<=	89
13							

Рис. 1 – Экранная форма задачи (1.1) (курсор в ячейке F6)  
 В экранной форме на рис.1.1 каждой переменной и каждому

коэффициенту задачи поставлена в соответствие конкретная ячейка в Excel. Имя ячейки состоит из буквы, обозначающей столбец, и цифры, обозначающей строку, на пересечении которых находится объект задачи ЛП. Так, например, переменным задачи (1.1) соответствуют ячейки **В3** ( $x_1$ ), **С3** ( $x_2$ ), **Д3** ( $x_3$ ), **Е3** ( $x_4$ ), коэффициентам ЦФ соответствуют ячейки **В6** ( $c_1 = 130,5$ ), **С6** ( $c_2 = 20$ ), **Д6** ( $c_3 = 56$ ), **Е6** ( $c_4 = 87,8$ ), правым частям ограничений соответствуют ячейки **Н10** ( $b_1 = 756$ ), **Н11** ( $b_2 = 450$ ), **Н12** ( $b_3 = 89$ ) и т.д.

*Ввод зависимостей из математической модели в экранную форму*

### Зависимость для ЦФ

В ячейку **Г6**, в которой будет отображаться значение ЦФ, необходимо ввести **формулу**, по которой это значение будет рассчитано. Согласно (1.1) значение ЦФ определяется выражением

$$130,5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87,8x_4. \quad (1.2)$$

Используя обозначения соответствующих ячеек в Excel (см. рис.1.1), формулу для расчета ЦФ (1.2) можно записать как **сумму произведений** каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (**В3, С3, Д3, Е3**), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов ЦФ (**В6, С6, Д6, Е6**), то есть

$$В6 \cdot В3 + С6 \cdot С3 + Д6 \cdot Д3 + Е6 \cdot Е3. \quad (1.3)$$

Чтобы задать формулу (1.3) необходимо в ячейку **Г6** ввести следующее выражение и нажать клавишу «**Enter**»

$$=СУММПРОИЗВ(В$3:Е$3;В6:Е6), \quad (1.4)$$

где символ \$ перед номером строки 3 означает, что при копировании этой формулы в другие места листа Excel номер строки 3 не изменится;

символ : означает, что в формуле будут использованы **все** ячейки, расположенные между ячейками, указанными слева и справа от двоеточия (например, запись **В6:Е6** указывает на ячейки **В6, С6, Д6 и Е6**). После этого в целевой ячейке появится 0 (нулевое значение) (рис.



2).

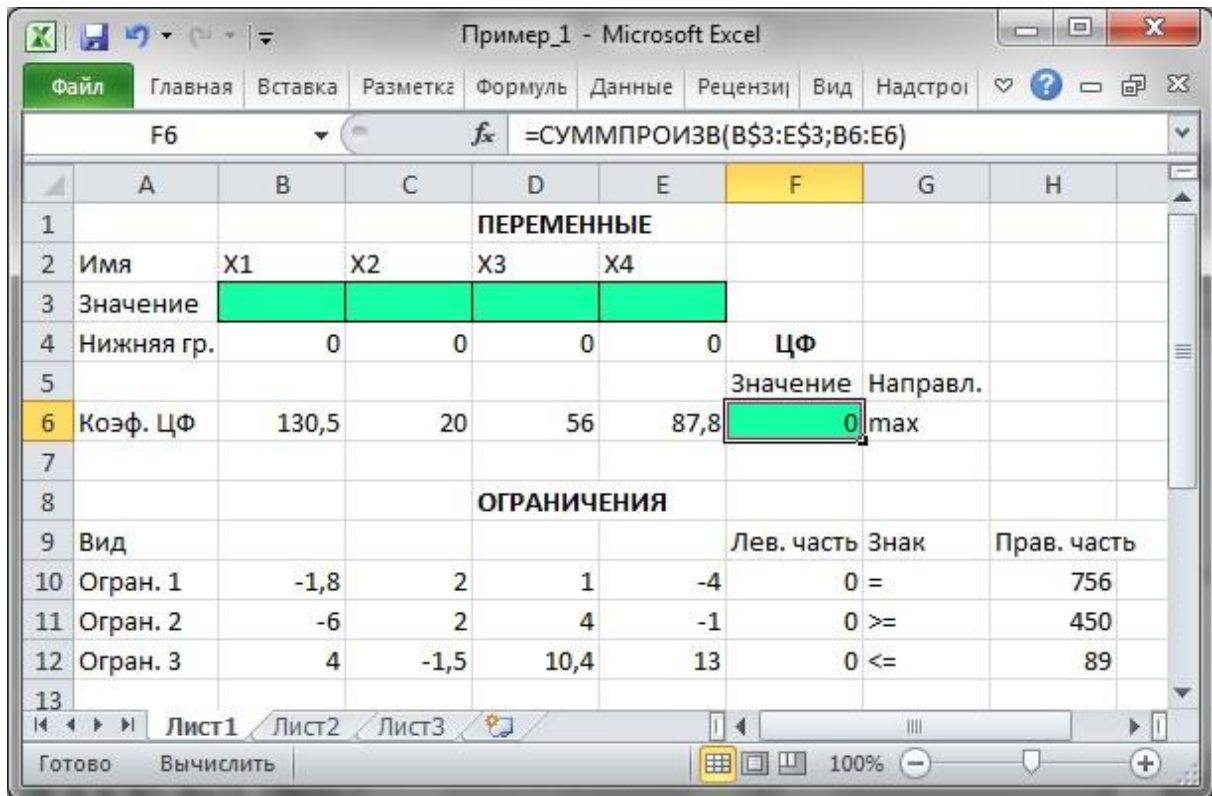


Рис. 2 – Экранная форма задачи (1.1) после ввода всех необходимых формул(курсор в ячейке F6)

**Примечание 1.1.** Существует другой способ задания функций в Excel с помощью режима «Вставка функций», который можно вызвать из меню «Вставка» или при нажатии кнопки « $f_x$ » на стандартной панели инструментов. Так, например, формулу (1.4) можно задать следующим образом:

- курсор в поле **F6**;
- нажав кнопку « $f_x$ », вызовите окно «Мастер функций – шаг 1 из 2»;
- выберите в окне «Категория» категорию «Математические»;
- в окне «Функция» выберите функцию **СУММПРОИЗВ**;
- в появившемся окне «СУММПРОИЗВ» в строку «Массив 1» введите выражение **B\$3:E\$3**, а в строку «Массив 2» – выражение **B6:E6** (рис. 3);
- после ввода ячеек в строки «Массив 1» и «Массив 2» в окне «СУММПРОИЗВ» появятся числовые значения введенных

массивов (см. рис.1.3), а в экранной форме в ячейке **F6** появится текущее значение, вычисленное по введенной формуле, то есть 0 (так как в момент ввода формулы значения переменных задачи нулевые).

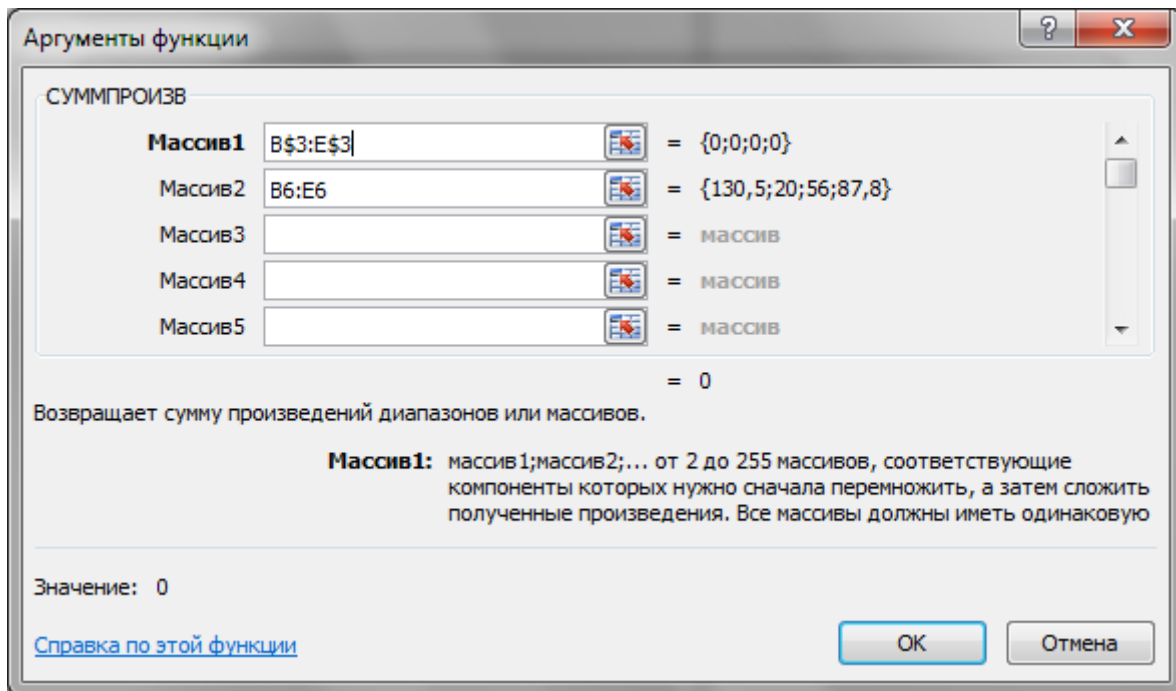


Рис. 3 – Ввод формулы для расчета ЦФ в окно «**Мастер функций**»

### Зависимости для левых частей ограничений

Левые части ограничений задачи (1.1) представляют собой *сумму произведений* каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (**B3, C3, D3, E3**), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов конкретного ограничения (**B10, C10, D10, E10** – 1-е ограничение; **B11, C11, D11, E11** – 2-е ограничение и **B12, C12, D12, E12** – 3-е ограничение). Формулы, соответствующие левым частям ограничений, представлены в табл.1.1

Таблица 1.1

### **Формулы, описывающие ограничения модели (1.1)**

Левая часть ограничения	Формула Excel
$-1,8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4$ или $B10 \cdot B3 + C10 \cdot C3 + D10 \cdot D3 + E10 \cdot E3$	<b>=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B10:E10)</b>
$-6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4$ или $B11 \cdot B3 + C11 \cdot C3 + D11 \cdot D3 + E11 \cdot E3$	<b>=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B11:E11)</b>
$4x_1 - 1,5x_2 + 10,4x_3 + 13x_4$ или $B12 \cdot B3 + C12 \cdot C3 + D12 \cdot D3 + E12 \cdot E3$	<b>=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B12:E12)</b>

Как видно из табл.1.1, формулы, задающие левые части ограничений задачи (1.1), отличаются друг от друга и от формулы (1.4) в целевой ячейке **F6** только номером строки во втором массиве. Этот номер определяется той строкой, в которой ограничение записано в экранной форме. Поэтому для задания зависимостей для левых частей ограничений достаточно скопировать формулу из целевой ячейки в ячейки левых частей ограничений. Для этого необходимо:

- поместить курсор в поле целевой ячейки **F6** и скопировать в буфер содержимое ячейки **F6** (клавишами «**Ctrl-Insert**»);
- помещать курсор поочередно в поля левой части каждого из ограничений, то есть в **F10**, **F11** и **F12**, и вставлять в эти поля содержимое буфера (клавишами «**Shift-Insert**») (при этом номер ячеек во втором массиве формулы будет меняться на номер той строки, в которую была произведена вставка из буфера);
- на экране в полях **F10**, **F11** и **F12** появится 0 (нулевое значение) (см. рис.1.2).

#### Проверка правильности введения формул

Для проверки правильности введенных формул производите поочередно двойное нажатие левой клавиши мыши на ячейки с формулами. При этом на экране рамкой будут выделяться ячейки, используемые в формуле (рис. 4 и 5).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				ПЕРЕМЕННЫЕ				
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение							
4	Нижн. гр.	0	0	0	0	ЦФ		
5						Значение	Направл.	
6	Козф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	=СУММПРОИЗВ(В\$3:Е\$3;В6:Е6)		
7				ОГРАНИЧЕНИЯ				
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	0	=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1	0	>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	0	<=	89

Рис. 4 – Проверка правильности введения формулы в целевую ячейку **F6**



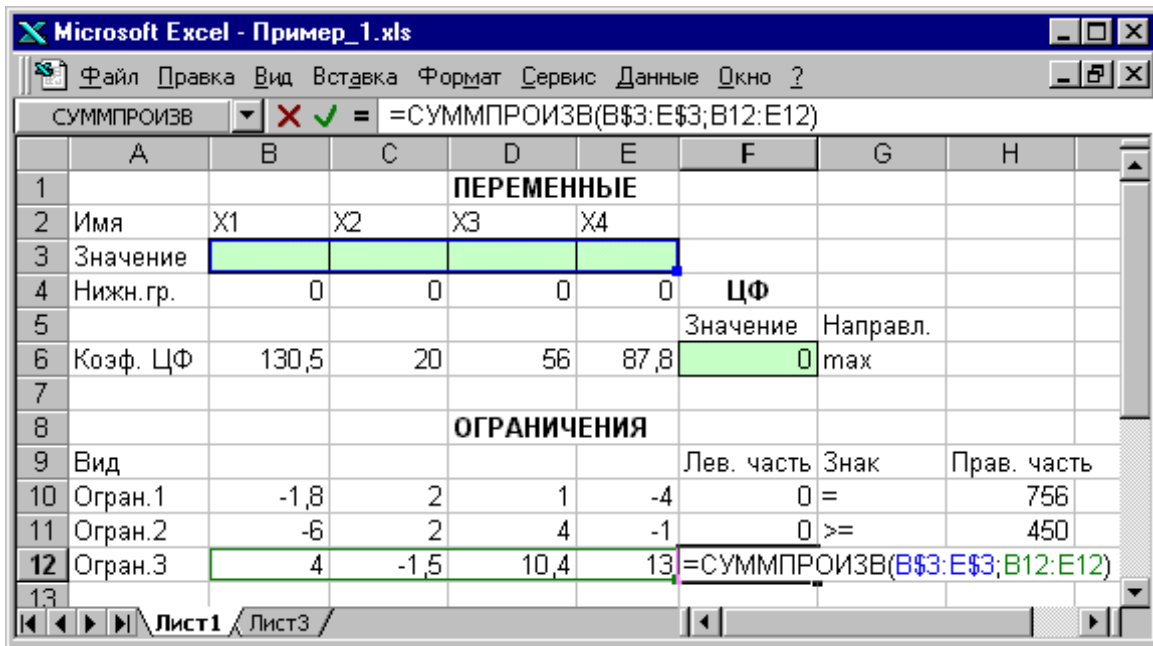


Рис. 5 – Проверка правильности введения формулы в ячейку F12 для левой части ограничения 3

### *Задание целевой функции*

Дальнейшие действия производятся в окне «Поиск решения», которое вызывается из меню «Сервис» (рис. 6):

- поставьте курсор в поле «Установить целевую ячейку»;
- введите адрес целевой ячейки **\$F\$6** или сделайте одно нажатие левой клавиши мыши на целевую ячейку в экранной форме – это будет равносильно вводу адреса с клавиатуры;
- введите направление оптимизации ЦФ, щелкнув один раз левой клавишей мыши по селекторной кнопке «**максимальному значению**».

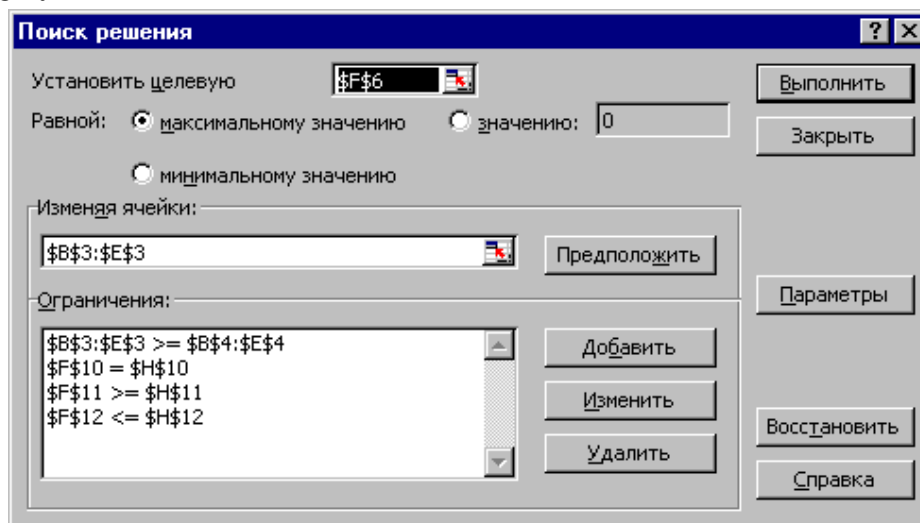


Рис. 6 – Окно «Поиск решения» задачи (1.1)

## Ввод ограничений и граничных условий

### Задание ячеек переменных

В окно «Поиск решения» в поле «Изменяя ячейки» впишите адреса

**\$B\$3:\$E\$3**. Необходимые адреса можно вносить в поле «Изменяя ячейки» и автоматически путем выделения мышью соответствующих ячеек переменных непосредственно в экранной форме.

### Задание граничных условий для допустимых значений переменных

В нашем случае на значения переменных накладывается только граничное условие неотрицательности, то есть их нижняя граница должна быть равна нулю (см. рис.1.1).

- Нажмите кнопку «Добавить», после чего появится окно «Добавление ограничения» (рис. 7).
- В поле «Ссылка на ячейку» введите адреса ячеек переменных **\$B\$3:\$E\$3**. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью всех ячеек переменных непосредственно в экранной форме.
- В поле знака откройте список предлагаемых знаков и выберите  $\geq$ .
- В поле «Ограничение» введите адреса ячеек нижней границы значений переменных, то есть **\$B\$4:\$E\$4**. Их также можно ввести путем выделения мышью непосредственно в экранной форме.

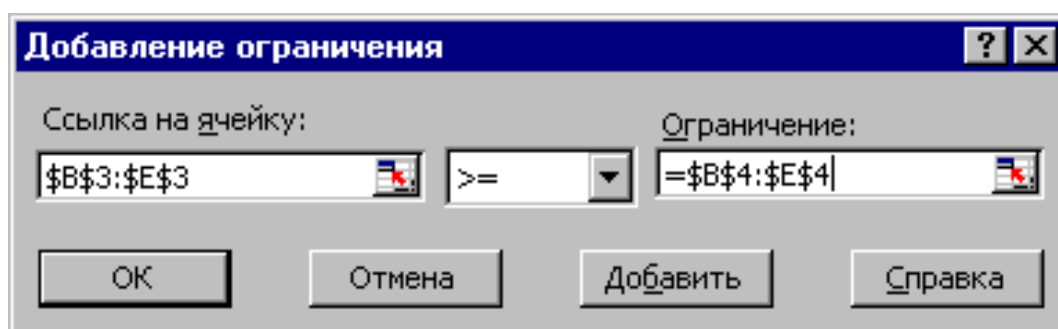


Рис. 7 – Добавление условия неотрицательности переменных задачи (1.1)

### Задание знаков ограничений $\leq$ , $\geq$ , $=$

- Нажмите кнопку «Добавить» в окне «Добавление ограничения».
- В поле «Ссылка на ячейку» введите адрес ячейки левой части

конкретного ограничения, например  $F_{10}$ . Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью нужной ячейки непосредственно в экранной форме.

- В соответствии с условием задачи (1.1) выбрать в поле знака необходимый знак, например =.
- В поле «Ограничение» введите адрес ячейки правой части рассматриваемого ограничения, например  $H_{10}$ .
- Аналогично введите ограничения:  $F_{11} \geq H_{11}$ ,  $F_{12} \leq H_{12}$ .
- Подтвердите ввод всех перечисленных выше условий нажатием кнопки **ОК**.

Окно «Поиск решения» после ввода всех необходимых данных задачи (1.1) представлено на рис. 6.

Если при вводе условия задачи возникает необходимость в изменении или удалении внесенных ограничений или граничных условий, то это делают, нажав кнопки «Изменить» или «Удалить» (см. рис.1.6).

## *Решение задачи*

### *Установка параметров решения задачи*

Задача запускается на решение в окне «Поиск решения». Но предварительно для установления конкретных параметров решения задач оптимизации определенного класса необходимо нажать кнопку «Параметры» и заполнить некоторые поля окна «Параметры поиска решения» (рис. 8).

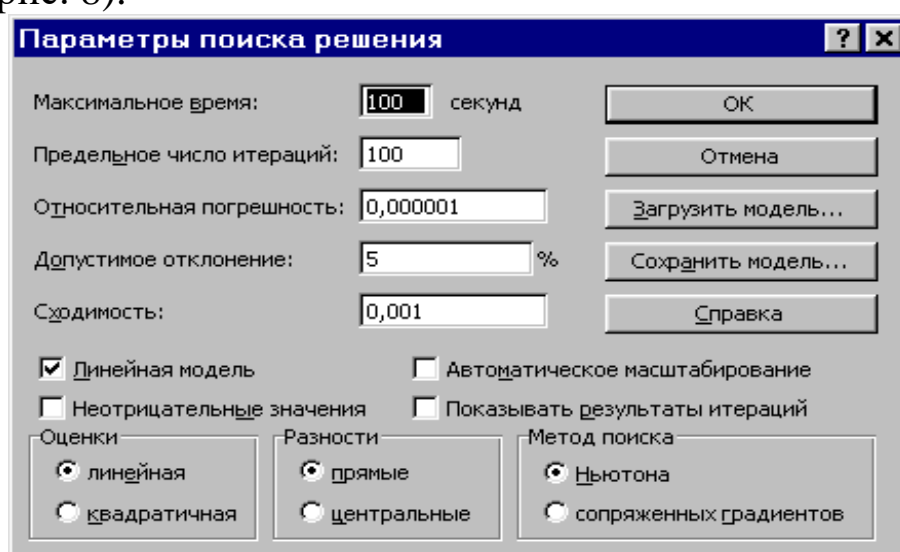


Рис. 8 – Параметры поиска решения, подходящие для большинства задач ЛП

Параметр **«Максимальное время»** служит для назначения времени (в секундах), выделяемого на решение задачи. В поле можно ввести время, не превышающее 32 767 секунд (более 9 часов).

Параметр **«Предельное число итераций»** служит для управления временем решения задачи путем ограничения числа промежуточных вычислений. В поле можно ввести количество итераций, не превышающее 32 767.

Параметр **«Относительная погрешность»** служит для задания точности, с которой определяется соответствие ячейки целевому значению или приближение к указанным границам. Поле должно содержать число из интервала от 0 до 1. Чем *меньше* количество десятичных знаков во введенном числе, тем *ниже* точность. Высокая точность увеличит время, которое требуется для того, чтобы сошелся процесс оптимизации.

Параметр **«Допустимое отклонение»** служит для задания допуска на отклонение от оптимального решения в целочисленных задачах. При указании большего допуска поиск решения заканчивается быстрее.

Параметр **«Сходимость»** применяется только при решении нелинейных задач. Установка флажка **«Линейная модель»** обеспечивает ускорение поиска решения линейной задачи за счет применения симплекс-метода. Подтвердите установленные параметры нажатием кнопки **«ОК»**.

### *Запуск задачи на решение*

Запуск задачи на решение производится из окна **«Поиск решения»** путем нажатия кнопки **«Выполнить»**. После запуска на решение задачи ЛП на экране появляется окно **«Результаты поиска решения»** с одним из сообщений, представленных на рис. 9, 10 и 11.

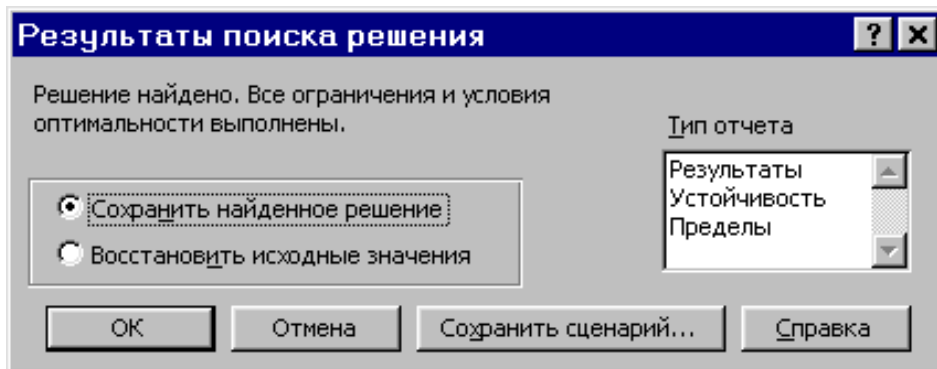


Рис. 9 – Сообщение об успешном решении задачи

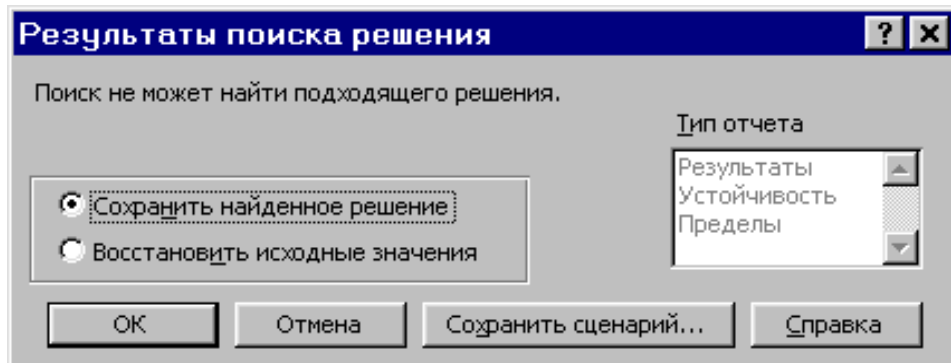


Рис. 10 – Сообщение при несовместной системе ограничений задачи

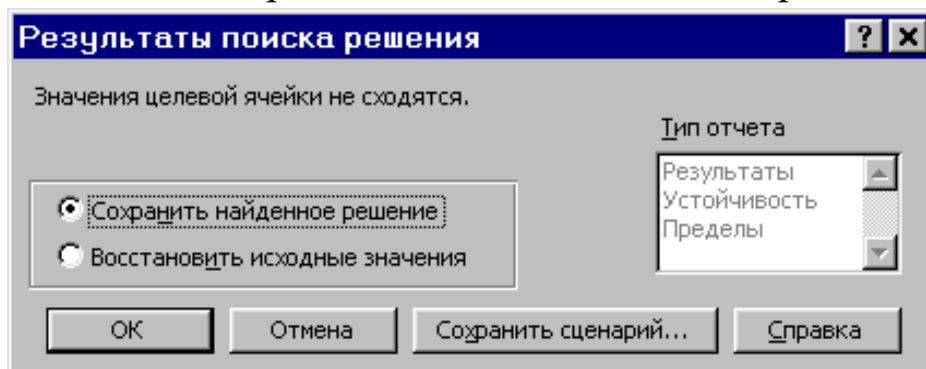


Рис. 11 – Сообщение при неограниченности ЦФ в требуемом направлении

Иногда сообщения, представленные на рис. 10 и 11, свидетельствуют не о характере оптимального решения задачи, а о том, что при вводе условий задачи в Excel были допущены **ошибки**, не позволяющие Excel найти оптимальное решение, которое в действительности существует.

Если при заполнении полей окна «**Поиск решения**» были допущены ошибки, не позволяющие Excel применить симплекс-метод для решения задачи или довести ее решение до конца, то после запуска задачи на решение на экран будет выдано соответствующее сообщение с указанием причины, по которой решение не найдено.

Иногда слишком малое значение параметра «**Относительная погрешность**» не позволяет найти оптимальное решение. Для исправления этой ситуации увеличивайте погрешность поразрядно, например от 0,000001 до 0,00001 и т.д.

В окне «**Результаты поиска решения**» представлены названия трех типов отчетов: «**Результаты**», «**Устойчивость**», «**Пределы**». Они необходимы при анализе полученного решения на чувствительность (см. ниже подразд.3.3). Для получения же ответа (значений переменных, ЦФ и левых частей ограничений) прямо в экранной форме просто нажмите кнопку «**ОК**». После этого в экранной форме появляется оптимальное решение задачи (рис. 12).

Microsoft Excel - Пример_1.xls									
Ф6 = =СУММПРОИЗВ(В\$3:Е\$3;В6:Е6)									
	A	B	C	D	E	F	G	H	
1				ПЕРЕМЕННЫЕ					
2	Имя	X1	X2	X3	X4				
3	Значение	100,661	546,444	0	38,925				
4	Нижн.гр.	0	0	0	0				
5						ЦФ			
6	Козф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	Значение	Направл.		
7						27482,714	max		
8				ОГРАНИЧЕНИЯ					
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть	
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	756	=	756	
11	Огран.2	-6	2	4	-1	450	>=	450	
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	89	<=	89	
13									

Рис. 12 – Экранная форма задачи (1.1) после получения решения

### *Целочисленное программирование*

Допустим, что к условию задачи (1.1) добавилось требование целочисленности значений всех переменных. В этом случае описанный выше процесс ввода условия задачи необходимо *дополнить* следующими шагами.

- В экранной форме укажите, на какие переменные накладывается требование целочисленности (этот шаг делается для наглядности восприятия условия задачи) (рис. 13).

- В окне «**Поиск решения**» (меню «**Сервис**» - «**Поиск решения**»), нажмите кнопку «**Добавить**» и в появившемся окне «**Добавление ограничений**» введите ограничения следующим



образом (рис. 14):

- в поле «Ссылка на ячейку» введите адреса ячеек переменных задачи, то есть **\$B\$3:\$E\$3**;
- в поле ввода знака ограничения установите «целое»;
- подтвердите ввод ограничения нажатием кнопки «ОК».

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				ПЕРЕМЕННЫЕ				
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение	100	546	0	39			
4	Нижн. гр.	0	0	0	0	ЦФ		
5	Целочисл.	целое	целое	целое	целое	Значение	Направл.	
6	Козф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	27394,2	max	
7								
8				ОГРАНИЧЕНИЯ				
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	756	=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1	453	>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	88	<=	89
13								

Рис. 13 – Решение задачи (1.1) при условии целочисленности ее переменных

Добавление ограничения

Ссылка на ячейку:

Ограничение:

ОК Отмена Добавить Справка

Рис. 14 – Ввод условия целочисленности переменных задачи (1.1)

На рис. 13 представлено решение задачи (1.1), к ограничениям которой добавлено условие целочисленности значений ее переменных.

### ***Возможные ошибки при вводе условий задач ЛП***

Если при решении задачи ЛП выдается сообщение о невозможности нахождения решения, то возможно, что причина

заключается в ошибках ввода условия задачи в Excel. Поэтому, прежде чем делать вывод о принципиальной невозможности нахождения оптимального решения задачи, ответьте на вопросы из табл.1.2.

Таблица 1.2

**Список вопросов, позволяющих выявить ошибки ввода условия задачи в Excel**

<b>№</b>	<b>Вопрос</b>	<b>Месторасположение в Excel</b>
1	Правильно ли Вы ввели численные значения и знаки (+, —) коэффициентов целевой функции и ограничений, правых частей ограничений ?	Экранная форма
2	Правильны ли формулы в целевой ячейке и в ячейках левых частей ограничений? Для наглядности проверки поставьте курсор на ячейку с формулой и сделайте двойной щелчок левой клавишей мыши. Рамкой в экранной форме будут выделены ячейки, участвующие в данной формуле (см. рис.1.4, 1.5).	Экранная форма
3	Правильно ли указан адрес целевой ячейки?	Окно «Поиск решения»
4	Правильно ли указано направление оптимизации ЦФ?	Окно «Поиск решения»
5	Правильно ли указаны адреса ячеек переменных?	Окно «Поиск решения» Поле «Изменяя ячейки»
6	Правильно ли введены знаки ограничений ( $\leq$ , $\geq$ , $=$ ) ?	Экранная форма Окно «Поиск решения» Поле «Ограничения»
7	Правильно ли указаны адреса ячеек левых и правых частей ограничений?	Окно «Поиск решения» Поле «Ограничения»
8	Не забыли ли Вы задать требование неотрицательности переменных?	Окно «Поиск решения» Поле «Ограничения»

9	Не забыли ли Вы задать требования по единичному значению верхней границы переменных (для задач с булевыми переменными)	Окно «Поиск решения» Поле «Ограничения»
10	Не забыли ли Вы задать условие целочисленности переменных (согласно условию задачи)?	Окно «Поиск решения» Поле «Ограничения»
11	Проверьте правильность установки параметров (см. подразд.1.3.1.2)	Окно «Параметры поиска решения»

### Варианты

Используя MS Excel, найти решение для модели ЛП, соответствующей заданному варианту.

#### *Варианты задач к лабораторной работе*

№	Математическая модель
1	$L(X) = 5x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 9x_4 + 8x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 0,7x_1 + 0,9x_2 + 1,5x_3 + 2,3x_4 + 1,8x_5 \leq 50000, \\ 0,4x_1 + 1,1x_2 - 0,5x_3 + 1,3x_4 - 2,8x_5 \geq 32000, \\ 0,5x_1 + 1,8x_3 + 0,7x_4 + 2x_5 \leq 40000, \\ 2,2x_1 - 1,4x_2 - 0,8x_3 + 0,9x_4 = 15000, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
2	$L(X) = -45x_1 + 65x_2 + 2x_4 - 3x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 15x_1 + 18x_2 + 34x_4 - 22x_5 = 56, \\ 2x_1 + 7x_3 - 4x_4 + 3x_5 \geq 91, \\ 0,2x_1 + 0,8x_2 + 1,5x_3 + 0,9x_4 + 4x_5 \leq 26, \\ 1,8x_1 - 42x_2 + 6,4x_3 + 3x_5 = 15, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
3	$L(X) = 14x_1 - 9x_2 - x_4 + 6,4x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 0,9x_1 + 10x_2 - 28x_4 + 5x_5 \leq 245, \\ 0,8x_1 + 1,7x_2 - 0,2x_3 - 0,5x_4 = 9, \\ 6x_1 + 4x_3 - 7x_4 + 6,3x_5 \leq 54, \\ 8x_1 + 6,2x_2 - 4,8x_4 + 2,9x_5 \geq 17, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$

4	$L(X) = x_1 + 4x_3 + 8x_4 - 12x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 250, \\ 0,4x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 8x_5 \leq 460, \\ 0,5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 6x_4 + 2x_5 \leq 190, \\ 11x_2 - 8,5x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 210, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}) \end{cases}$
5	$L(X) = 46x_1 + 2,3x_2 + 9,4x_3 - 4x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 3x_1 + 7,8x_3 + 12x_4 + 9x_5 \geq 49, \\ 2,3x_2 + 5x_3 + 5,6x_4 - x_5 \leq 86, \\ 16x_1 - 40x_4 + 29x_5 = 50, \\ 190x_1 - 98x_2 - 4x_4 + 150x_5 \geq 300, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
6	$L(X) = 0,5x_1 + 1,8x_3 - 9,2x_4 + 14x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 9,6x_2 + 15,7x_3 + 24x_4 - 8x_5 \leq 74, \\ 0,8x_1 + 11,1x_2 - 4,5x_3 + 1,5x_4 - 6,3x_5 = 22, \\ 14x_1 + 45x_2 - 38x_4 + 26x_5 \leq 46, \\ 220x_1 - 148x_2 - 7x_3 + 95x_5 \geq 150, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
7	$L(X) = 12x_2 + 89x_3 - 5x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 9,6x_2 + 15,7x_3 + 22x_4 - 8x_5 \leq 73, \\ 0,9x_1 + 11,1x_2 - 4,3x_3 + 1,5x_4 + 6,4x_5 = 19, \\ 14x_1 + 45x_2 - 38x_4 + 26x_5 \leq 49, \\ 220x_1 - 150x_2 + 3x_3 + 95x_5 = 133, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
8	$L(X) = 4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 49x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 21x_1 + 9x_2 - 2x_4 - 12x_5 \geq 58, \\ 110x_2 - 60x_3 + 80x_4 - 45x_5 = 290, \\ 5x_2 + 27x_3 - 14x_4 + x_5 \leq 72, \\ 87x_1 - 6,4x_2 + 130x_4 = 140, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$

9	$L(X) = -38x_1 + 60x_2 + x_3 + 4x_4 + 8x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 18x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 12x_5 \leq 86, \\ 2x_2 + 19x_3 - 7x_4 + 10x_5 = 130, \\ 0,4x_1 + 3x_2 - 4,2x_3 + 2x_4 - 5x_5 \leq 34, \\ 2,1x_1 + 13x_2 - 20x_3 + 6x_4 = 18, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
10	$L(X) = 10x_1 + 40x_3 + 13x_4 + 56x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 7x_1 + 16x_3 + 5x_4 + 25x_5 \leq 600, \\ 8x_1 + 1,7x_2 - 0,5x_4 + 4,7x_5 = 890, \\ 6x_1 + 4x_3 - 7x_4 + 6,3x_5 \leq 270, \\ 84x_1 + 62x_2 + 80x_3 + 14x_5 \geq 2300, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
11	$L(X) = 84x_1 + 5,7x_2 + 10x_4 - 3x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 4x_1 + 8,5x_2 + 16x_3 + 10x_5 \geq 50, \\ 10,4x_1 + 6x_3 + 2x_4 + 4x_5 \leq 120, \\ 19x_1 + 18x_2 - 20x_4 + 30x_5 = 600, \\ 200x_1 + 45x_2 - 8x_3 + 3,4x_4 \geq 210, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
12	$L(X) = 0,84x_2 - 4x_3 + 3,8x_4 + 12x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 15x_1 + 9,6x_2 + 34x_4 - 8x_5 \leq 180, \\ 0,6x_1 + 11,1x_2 - 2,6x_3 + 1,5x_4 - 6,3x_5 = 68, \\ 14x_1 + 64x_3 - 38x_4 + 12x_5 \leq 81, \\ 190x_1 - 148x_2 - 7x_3 + 84x_5 \geq 230, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}). \end{cases}$

### Контрольные вопросы

1. Каковы основные этапы решения задач ЛП в MS Excel?
2. Каков вид и способы задания формул для целевой ячейки и ячейковых частей ограничений?
3. В чем смысл использования символа \$ в формулах MS Excel?
4. В чем различие использования в формулах MS Excel символов «;» и «:» ?

5. Почему при вводе формул в ячейки ЦФ и левых частей ограничений в них отображаются нулевые значения?
6. Каким образом в MS Excel задается направление оптимизации ЦФ?
7. Какие ячейки экранной формы выполняют иллюстративную функцию, а какие необходимы для решения задачи?
8. Как наглядно отобразить в экранной форме ячейки, используемые в конкретной формуле, с целью проверки ее правильности?
9. Поясните общий порядок работы с окном **«Поиск решения»**.
10. Каким образом можно изменять, добавлять, удалять ограничения в окне **«Поиск решения»**?
11. Какие сообщения выдаются в MS Excel в случаях: успешного решения задачи ЛП; несовместности системы ограничений задачи; неограниченности ЦФ?
12. Объясните смысл параметров, задаваемых в окне **«Параметры поиска решения»**.
13. Каковы особенности решения в MS Excel целочисленных задач ЛП?



## **ДВУХИНДЕКСНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ОРГАНИЗАЦИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СНАБЖЕНИЯ»**

### **Цель работы**

Приобретение навыков адаптации транспортной модели ЛП для оптимизации системы снабжения, допускающей транзитные перевозки.

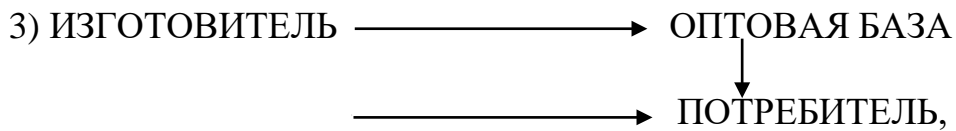
### **Порядок выполнения работы**

1. Согласно номеру своего варианта, выберите условие задачи.
2. Постройте транспортные таблицы для каждой подзадачи.
3. Решите в Excel все подзадачи, сделайте выбор оптимальной системы снабжения и представьте результаты преподавателю.
4. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
  - титульный лист;
  - транспортные таблицы всех подзадач и результаты их решения;
  - вывод о том, какая из систем снабжения является оптимальной.

### **Постановка задачи**

По заказу пяти потребителей А, Б, В, Г, Д на четырех предприятиях-изготовителях производится продукция. В процессе доставки к потребителям продукция может храниться на трех оптовых базах. Существуют следующие три способа организации снабжения потребителей продукцией:

- 1) ИЗГОТОВИТЕЛЬ → ОПТОВАЯ БАЗА → ПОТРЕБИТЕЛЬ,  
то есть вся продукция, произведенная изготовителями, сначала складировается на оптовых базах и только потом развозится потребителям;
- 2) ИЗГОТОВИТЕЛЬ → ПОТРЕБИТЕЛЬ,  
то есть вся продукция, произведенная изготовителями, напрямую доставляется потребителям, минуя оптовые базы;



то есть продукция, произведенная изготовителем, доставляется к потребителям частично напрямую, а частично транзитом через оптовые базы.

Необходимо выбрать оптимальный способ организации снабжения потребителей продукцией предприятий-изготовителей.

### Рекомендации к решению задачи

1. Общий подход к решению этой задачи заключается в построении транспортной модели каждого из способов организации снабжения, анализе затрат на доставку продукции и выборе минимальной по затратам системы снабжения.

2. При моделировании различных систем снабжения необходимо учитывать следующее. В транспортной таблице системы 1 и в транспортной таблице системы 3 **пунктами отправления** являются как изготовители, так и оптовые базы; **пунктами потребления** являются как потребители, так и оптовые базы. Транспортные таблицы систем 1 и 3 отличаются расстановкой **реальных и запрещающих тарифов**.

### 2.3. Варианты

Ежемесячный спрос на продукцию [шт.], емкость оптовых баз [шт.] и тарифы [руб./шт.] за доставку продукции с оптовых баз к потребителям приведены в табл.2.1.

Ежемесячные объемы производства [шт.], емкость оптовых баз [шт.] и суммарные затраты [руб./шт.] на производство и доставку продукции от изготовителей к оптовым базам приведены в табл.2.2. Ежемесячные объемы производства [шт.], спрос на продукцию [шт.] и суммарные затраты [руб./шт.] на производство и доставку продукции от изготовителей к потребителям приведены в табл.2.3. Номер варианта состоит из двух цифр. Первая цифра (0 или 1) выбирается в табл.6.1 и 2.3 по вертикали, а в табл.2.2 – по горизонтали. Вторая цифра (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) выбирается в табл.2.1 и 2.3 по горизонтали, а в табл.2.2 – по вертикали. Таким образом, номера вариантов имеют вид 01, 02, ..., 06, 11, 12, ..., 16.

Таблица 2.1  
*Параметры перевозок из оптовых баз к потребителям*

		Потр-ль А		Потр-ль Б		Потр-ль В		Потр-ль Г		Потр-ль Д		Запас	
		Вариант		Вариант		Вариант		Вариант		Вариант			
		0	1	0	1	0	1	0	1	0	1		
Оптовая база 1	Вариант	1	15	18	12	12	11	14	10	16	20	14	300
		2	12	20	32	28	14	25	22	19	36	40	540
		3	20	12	15	10	28	20	30	22	17	11	720
		4	20	35	32	25	36	18	20	34	25	15	620
		5	14	20	25	14	18	22	15	30	21	14	560
		6	22	14	20	10	25	32	30	35	24	18	780
Оптовая база 2	Вариант	1	20	10	14	16	25	30	24	32	15	24	420
		2	16	15	20	11	31	18	20	40	17	30	380
		3	21	28	12	20	24	35	15	21	24	45	460
		4	16	16	27	14	20	20	21	25	28	38	350
		5	15	31	34	20	14	15	18	30	20	22	410
		6	14	30	10	26	18	16	24	36	34	25	450
Оптовая база3	Вариант	1	12	20	36	18	20	27	16	18	36	35	730
		2	16	12	26	10	32	42	34	14	10	16	690
		3	20	15	20	16	36	28	30	20	18	10	620
		4	18	28	15	26	28	31	18	40	20	27	580
		5	15	24	35	35	40	34	10	35	35	40	740
		6	22	32	28	14	25	20	35	24	20	35	610
Спрос на товар		600	480	550	750	420	360	780	200	400	180		

Таблица 2.2

*Параметры перевозок от изготовителей к оптовым базам*

Изг-ль	Вариант	Оптовая база 1						Оптовая база 2						Оптовая база 3						Произ-во
		ВАРИАНТ						ВАРИАНТ						ВАРИАНТ						
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	
Изг-ль 1	0	27	18	12	20	24	10	10	14	9	8	12	16	31	27	20	25	17	22	510
	1	14	25	29	30	12	11	7	20	12	17	19	8	28	30	24	18	10	12	480
Изг-ль 2	0	15	19	24	28	17	30	21	14	20	15	17	7	25	36	21	17	31	12	620
	1	20	27	14	10	29	21	14	10	9	16	20	6	24	18	30	26	18	31	570
Изг-ль 3	0	11	7	26	20	9	6	22	18	10	19	24	14	27	30	15	10	19	21	660
	1	15	7	22	18	10	13	17	12	19	21	15	10	27	18	10	21	30	14	280
Изг-ль 4	0	26	10	28	15	7	19	20	15	11	18	12	27	20	15	19	25	11	20	420
	1	20	25	14	9	11	18	16	27	19	10	14	20	21	32	36	25	18	12	390
Запас		300	540	720	620	560	780	420	380	460	350	410	450	730	690	620	580	740	610	450

Таблица 2.3

**Параметры перевозок от изготовителей к потребителям**

			Потр-ль А		Потр-ль Б		Потр-ль В		Потр-ль Г		Потр-ль Д		Произ-во
			Вариант		Вариант		Вариант		Вариант		Вариант		
			0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	
Изготовитель1	Вариант	1	10	2	2	12	1	14	10	6	20	14	510
		2	26	37	12	45	10	24	39	14	35	42	200
		3	11	28	6	10	18	20	22	34	16	14	550
		4	25	8	12	17	5	40	25	32	38	30	720
		5	24	14	27	40	48	35	21	30	12	40	200
		6	16	24	14	30	42	50	35	22	30	52	420
Изготовитель2	Вариант	1	24	8	18	30	20	35	14	40	26	30	400
		2	10	12	50	58	8	58	20	58	48	26	800
		3	32	16	45	34	10	16	32	8	25	16	250
		4	26	35	42	52	35	30	30	22	38	20	480
		5	16	20	30	38	26	48	50	50	48	52	900
		6	20	12	48	44	30	22	25	18	15	20	420
Изготовитель3	Вариант	1	32	28	54	40	16	28	28	24	10	20	460
		2	10	30	60	30	20	35	38	50	44	28	650
		3	8	24	25	21	52	42	50	48	48	22	800
		4	15	40	38	28	25	10	20	15	12	10	160
		5	18	37	16	32	40	35	9	10	25	16	360
		6	26	34	20	46	45	30	14	26	24	10	480
Изготовитель4	Вариант	1	16	41	30	17	55	45	45	50	46	30	790
		2	24	30	24	35	23	28	38	30	30	25	510
		3	30	25	37	20	30	32	35	28	25	9	560
		4	16	20	18	33	48	50	48	52	50	20	800
		5	22	36	10	42	36	48	40	48	45	24	700
		6	28	40	40	25	18	20	28	16	18	15	400
Спрос на товар			600	480	550	750	420	360	780	200	400	180	

**Контрольные вопросы**

1. Какие виды деятельности включает снабжение?
2. Что подразумевает тактический аспект снабжения?
3. Перечислите составляющие стратегического аспекта снабжения.
4. Как Вы понимаете утверждение «логистика снабжения – является первой логистической подсистемой»?
5. Какие три функциональных аспекта включает снабжение?
6. Какие функции включает ключевой уровень снабжения?
7. Какому уровню управления организацией соответствует ключевой уровень операций и функций снабжения?

## **ПОСТРОЕНИЕ И РАСЧЕТ МОДЕЛЕЙ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ**

### **Цель работы**

Приобретение навыков построения и расчета временных параметров моделей сетевого планирования и управления.

### **Порядок выполнения работы**

1. Согласно номеру своего варианта, получите следующие исходные данные:  $T_H$  - время нормальной длительности каждой работы сетевой модели и описание упорядочения этих работ.

2. В соответствии с правилами построения сетевых графиков и на основе исходных данных Вашего варианта постройте сетевую модель, затем пронумеруйте события полученной сети.

3. В соответствии с методиками, описанными в пунктах

- рассчитайте и отобразите на сетевом графике временные параметры событий: ранний и поздний срок свершения события, резерв события;

- рассчитайте и представьте в таблице временные параметры работ: время раннего и позднего начала работ; время раннего и позднего окончания работ; полный и свободный резервы работ.

4. Покажите преподавателю результаты своих построений, после чего проведите расчеты с помощью компьютера.

5. Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- номер варианта;
- исходные данные варианта;
- сетевой график с отображенными на нем временными параметрами событий;
- таблицу с кодами и временными параметрами работ.

### **Теоретическая часть**

#### **Введение**

Сетевое Планирование и Управление—это комплекс графических и расчетных методов, организационных мероприятий, обеспечивающих моделирование, анализ и динамическую перестройку плана выполнения сложных проектов и разработок,



например, таких как: строительство и реконструкция каких-либо объектов; выполнение научно-исследовательских и конструкторских работ; подготовка производства к выпуску продукции; перевооружение армии; развертывание системы медицинских или профилактических мероприятий.

*Характерной особенностью* таких проектов является то, что они состоят из ряда отдельных, элементарных *работ*. Они обуславливают друг друга так, что выполнение некоторых работ не может быть начато раньше, чем завершены некоторые другие. Например, укладка фундамента не может быть начата раньше, чем будут доставлены необходимые материалы; эти материалы не могут быть доставлены раньше, чем будут построены подъездные пути; любой этап строительства не может быть начат без составления соответствующей технической документации и т.д.

Сетевое Планирование и Управление включает три основных этапа:

1. Структурное планирование;
2. Календарное планирование;
3. Оперативное управление.

*Структурное планирование* начинается с разбиения проекта на четко определенные операции, для которых определяется продолжительность. Затем строится сетевой график, который представляет взаимосвязи работ проекта. Это позволяет детально анализировать все работы и вносить улучшения в структуру проекта еще до начала его реализации.

*Календарное планирование* предусматривает построение календарного графика, определяющего моменты начала и окончания каждой работы и другие временные характеристики сетевого графика. Это позволяет, в частности, выявлять критические операции, которым необходимо уделять особое внимание, чтобы закончить проект в директивных срок. Во время календарного планирования определяются временные характеристики всех работ с целью проведения в дальнейшем *оптимизации* сетевой модели, которая позволит улучшить эффективность использования какого-либо ресурса.

В ходе *оперативного управления* используются сетевой и

календарный графики для составления периодических отчетов о ходе выполнения проекта. При этом сетевая модель может подвергаться оперативной корректировке, вследствие чего будет разрабатываться новый календарный план остальной части проекта.

### Основные понятия и определения

Основными понятиями сетевых моделей являются понятия *события* и *работы*.

*Работа*—это некоторый процесс, приводящий к достижению определенного результата, требующий затрат каких-либо ресурсов и имеющий протяженность во времени. По своей физической природе работы можно рассматривать как:

- *действие*: разработка чертежа, изготовление детали, заливка фундамента бетоном, изучение конъюнктуры рынка;
- *процесс*: старение отливок, выдерживание вина, травление плат;
- *ожидание*: ожидание поставки комплектующих, пролеживание детали в очереди к станку.

По количеству затрачиваемого времени работа может быть:

- *действительной*, т.е. требующей затрат времени;
- *фиктивной*, т.е. формально не требующей затрат времени и представляющей связь между какими-либо работами, например: передача измененных чертежей от конструкторов к технологом; сдача отчета о технико-экономических показателях работы цеха вышестоящему подразделению.

*Событие*—это момент времени, когда завершаются одни работы и начинаются другие. Например, фундамент залит бетоном, старение отливок завершено, комплектующие поставлены, отчеты сданы и т.д. Событие представляет собой результат проведенных работ и, в отличие от работ, не имеет протяженности во времени.

На этапе структурного планирования взаимосвязь работ и событий, необходимых для достижения конечной цели проекта, изображается с помощью *сетевого графика* (сетевой модели). На сетевом графике работы изображаются *стрелками*, которые соединяют *вершины*, изображающие события. Начало и окончание любой работы описываются парой событий, которые называются

*начальным* и *конечным* событиями. Поэтому для идентификации конкретной работы используют код работы  $(i, j)$ , состоящий из номеров начального ( $i$ -го) и конечного ( $j$ -го) событий (см. рис. 15).

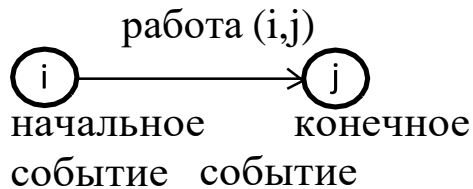


Рис. 15 – Кодирование работы

Любое событие может считаться наступившим только тогда, когда закончатся *все* входящие в него работы. Поэтому, работы, выходящие из некоторого события, не могут начаться, пока не будут завершены *все* работы, входящие в это событие.

Событие, не имеющее предшествующих ему событий, т.е. с которого начинается проект, называют *исходным*. Событие, которое не имеет последующих событий и отражает конечную цель проекта, называется *завершающим*.

При построении сетевого графика необходимо следовать следующим правилам:

- длина стрелки не зависит от времени выполнения работы;
- стрелка может не быть прямолинейным отрезком;
- для действительных работ используются сплошные, а для фиктивных - пунктирные стрелки;
- каждая операция должна быть представлена только одной стрелкой;
- между одними и теми же событиями не должно быть параллельных работ, т.е. работ с одинаковыми кодами;
- следует избегать пересечения стрелок;
- не должно быть стрелок, направленных справа налево;
- номер начального события должен быть меньше номера конечного события;
- не должно быть *висячих* событий (т.е. не имеющих предшествующих событий), кроме исходного;
- не должно быть *тупиковых* событий (т.е. не имеющих

последующих событий), кроме завершающего;

- не должно быть циклов (см. рис. 16).

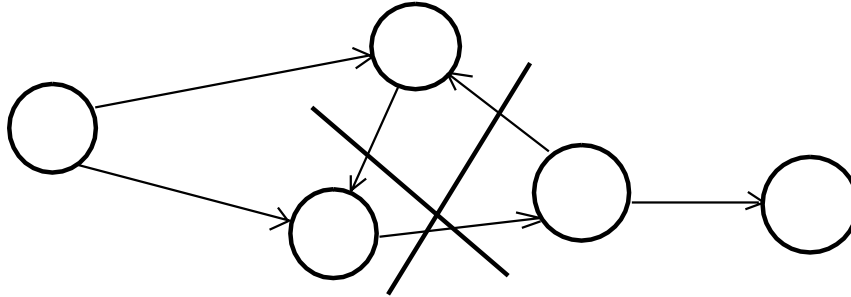


Рис. 16 – Недопустимость циклов

Важное значение для анализа сетевых моделей имеет понятие пути. *Путь*—это любая последовательность работ в сетевом графике (в частном случае это одна работа), в которой конечное событие одной работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы. Различают следующие виды путей.

*Полный путь*—это путь от исходного до завершающего события. *Критический путь* - максимальный по продолжительности полный путь. Работы, лежащие на критическом пути, называют *критическими*. *Подкритический путь* - полный путь, ближайший по длительности к критическому пути.

Построение сети является лишь первым шагом на пути к построению календарного плана. Вторым шагом является расчет сетевой модели, который выполняют прямо на сетевом графике, пользуясь простыми правилами.

### **Временные параметры событий**

К временным параметрам событий относятся:

- $T_p(i)$  - ранний срок наступления события  $i$ . Это время, которое необходимо для выполнения всех работ, предшествующих данному событию  $i$ .

Оно равно наибольшей из продолжительности путей, предшествующих данному событию.

- $T_{п}(i)$  - поздний срок наступления события  $i$ . Это такое время наступления события  $i$ , превышение которого вызовет аналогичную задержку наступления завершающего события сети. Поздний срок наступления любого события  $i$  равен разности между

продолжительностью критического пути и наибольшей из продолжительностей путей, следующих за событием  $i$ .

- $R(i)$  - резерв времени наступления события  $i$ . Это такой промежуток времени, на который может быть отсрочено наступление события  $i$  без нарушения сроков завершения проекта в целом. Начальные и конечные события критических работ имеют нулевые резервы событий.

Рассчитанные численные значения временных параметров записываются прямо в вершины сетевого графика (см. рис. 17).

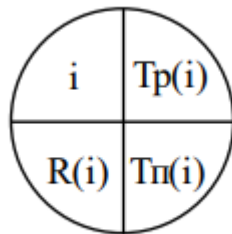


Рис. 17 – Отображение временных параметров событий в вершинах сетевого графика

Расчет ранних сроков свершения событий  $T_p(i)$  ведется от исходного (И) к завершающему (З) событию.

*Примечание.* Поскольку длительность работы может быть как нормальной  $T_n$ , так и ускоренной  $T_y$  (см. п. 3), то для общности изложения будем в дальнейшем обозначать текущую длительность работы буквой  $t$  с соответствующим кодом работы, например,  $t(i, j)$ ,  $t(k, j)$  и т.д.

1. Для исходного события И  $T_p(И) = 0$ .
  2. Для всех остальных событий  $i$   $T_p(i) = \max[T_p(k) + t(k, i)]$ , где
  3. максимум берется по всем работам  $(k, i)$ , входящим в событие  $i$ .
- Поздние сроки свершения событий  $T_n(i)$  рассчитываются от завершающего к исходному событию.
4. Для завершающего события З  $T_n(З) = T_p(З)$ .
  5. Для всех остальных событий  $T_n(i) = \min[T_n(j) - t(i, j)]$ , где минимум берется по всем работам  $(i, j)$ , выходящим из события  $i$ .
5.  $R(i) = T_n(i) - T_p(i)$

## Временные параметры работ и путей

К наиболее важным временным параметрам работ относятся:

$r_{\text{Н}}(i, j)$  - ранний срок начала работы;

$p_{\text{Н}}(i, j)$  - поздний срок начала работы;

$r_{\text{О}}(i, j)$  - ранний срок окончания работы;

$p_{\text{О}}(i, j)$  - поздний срок окончания работы;

Для критических работ  $T_{\text{рН}}(i, j) = T_{\text{пН}}(i, j)$  и  $T_{\text{рО}}(i, j) = T_{\text{пО}}(i, j)$ .

$r_{\text{П}}(i, j)$  - полный резерв работы показывает максимальное время, на которое может быть увеличена продолжительность работы (i, j) или отсрочено ее начало, чтобы продолжительность проходящего через нее максимального пути не превысила продолжительности критического пути. Важнейшее свойство полного резерва работы (i, j) заключается в том, что его частичное или полное использование уменьшает полный резерв у работ, лежащих с работой (i, j) на одном пути. Таким образом, полный резерв принадлежит не одной данной работе (i, j), а всем работам, лежащим на путях, проходящим через эту работу.

$r_{\text{С}}(i, j)$  - свободный резерв работы показывает максимальное время, на которое можно увеличить продолжительность работы (i, j) или отсрочить ее начало, не меняя ранних сроков начала последующих работ. Использование свободного резерва одной из работ не меняет величины свободных резервов остальных работ сети.

Временные параметры работ сети определяются на основе ранних и поздних сроков событий.

$$r_{\text{Н}}(i, j) = T_{\text{р}}(i);$$

$$2) \quad T_{\text{рО}}(i, j) = T_{\text{р}}(i) + t(i, j) \text{ или } T_{\text{рО}}(i, j) = T_{\text{рН}}(i, j) + t(i, j);$$

$$p_{\text{О}}(i, j) = T_{\text{п}}(j);$$

$$4) \quad T_{\text{пН}}(i, j) = T_{\text{п}}(j) - t(i, j) \text{ или } T_{\text{пН}}(i, j) = T_{\text{пО}}(i, j) - t(i, j);$$

$$5) \quad R_{\text{П}}(i, j) = T_{\text{п}}(j) - T_{\text{р}}(i) - t(i, j);$$

$$6) \quad R_{\text{С}}(i, j) = T_{\text{р}}(j) - T_{\text{р}}(i) - t(i, j).$$

Временные параметры работ вносятся в таблицу. При этом коды работ записывают в определенном порядке: сначала записываются все

работы, выходящие из исходного, т.е. первого, события, затем - выходящие из второго события, потом - из третьего и т.д.

Резервами времени, кроме работ и событий, обладают полные пути сетевой модели. Разность между продолжительностью критического пути  $T(L_{кр})$  и продолжительностью любого другого полного пути  $T(L_{п})$  называется полным резервом времени пути  $L_{п}$ , т.е.  $R(L_{п}) = T(L_{кр}) - T(L_{п})$  – увеличена продолжительность всех работ данного пути  $L$ , чтобы при этом не изменился общий срок окончания всех работ.

### Пример построения и расчета сетевой модели

Исходные данные варианта лабораторной работы включают название и продолжительность каждой работы (табл. 3.1), а также описание упорядочения работ.

Таблица 3.1

Исходные данные

Название работы	Продолжительность работы
А	10
В	8
С	4
Д	12
Е	7
F	11
G	5
Н	8
І	3
J	9
К	10

#### Упорядочение работ

- 1) Работы С, І, G являются исходными работами проекта, которые могут выполняться одновременно.
- 2) Работы Е и А следуют за работой С.
- 3) Работа Н следует за работой І.
- 4) Работы D и J следуют за работой G.
- 5) Работа В следует за работой Е.
- 6) Работа К следует за работами А и D, но не может начаться

прежде, чем не завершится работа Н.

7) Работа F следует за работой J.

На рис. 18 представлена сетевая модель, соответствующая данному упорядочению работ. Каждому событию присвоен номер, что позволяет в дальнейшем использовать не названия работ, а их коды (см. табл. 3.2). Численные значения временных параметров событий сети вписаны в соответствующие секторы вершин сетевого графика, а временные параметры работ сети представлены в табл. 3.3.

Таблица 3.2

Описание сетевой модели с помощью кодирования работ

Номера событий		Код работы	Продолжительность работы
начального	конечного		
1	2	(1,2)	4
1	3	(1,3)	3
1	4	(1,4)	5
2	5	(2,5)	7
2	6	(2,6)	10
3	6	(3,6)	8
4	6	(4,6)	12
4	7	(4,7)	9
5	8	(5,8)	8
6	8	(6,8)	10
7	8	(7,8)	11

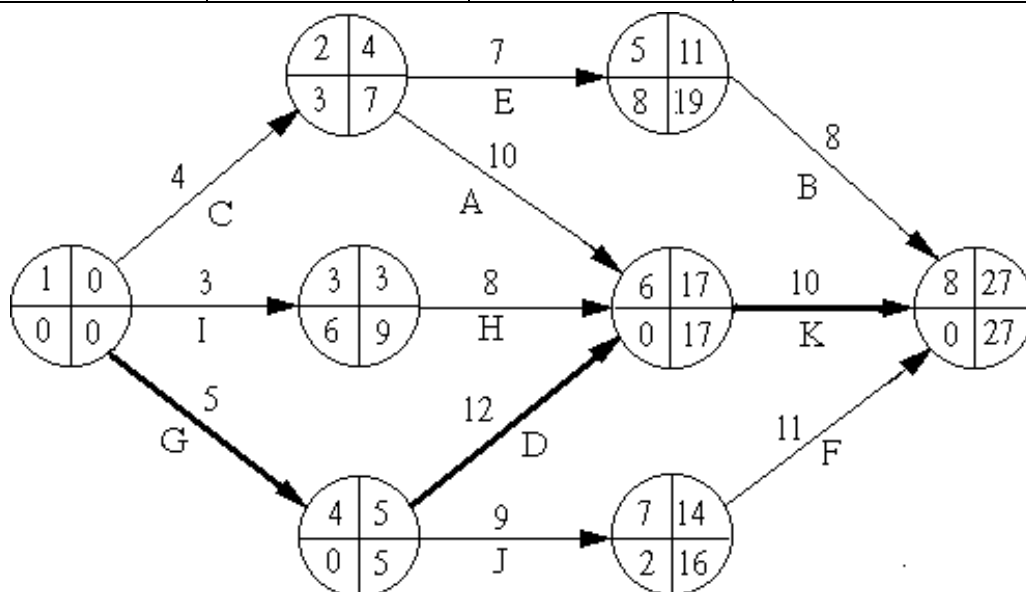


Рис. 18 – Сетевая модель



Таблица 3.3. Временные параметры работ

$(i, j)$	$t(i, j)$	$T_{pH}(i, j)$	$T_{po}(i, j)$	$T_{пH}(i, j)$	$T_{по}(i, j)$	$R_{п}(i, j)$	$R_{c}(i, j)$
1,2	4	0	4	3	7	3	0
1,3	3	0	3	6	9	6	0
1,4	5	0	5	0	5	0	0
2,5	7	4	11	12	19	8	0
2,6	10	4	14	7	17	3	3
3,6	8	3	11	9	17	6	6
4,6	12	5	17	5	17	0	0
4,7	9	5	14	7	16	2	0
5,8	8	11	19	19	27	8	8
6,8	10	17	27	17	27	0	0
7,8	11	14	25	16	27	2	2

## Варианты заданий

### Вариант 1

Назв. работы	Норм. длительность	Норм. стоимость	Сокр. длительность	Повыш. стоимость	Кол-во исполн.
N=11 человек		99,00 руб.		к = 1,20 руб./день	

#### *Упорядочение работ*

, E и F - исходные работы проекта, которые можно начинать одновременно;

работы B и I начинаются сразу по окончании работы F;

работа J следует за E, а работа C - за A;

работы H и D следуют за B, но не могут начаться, пока не завершена C;

работа K следует за I;

работа G начинается после завершения H и J.



N=10 человек	143,00 руб.	$k = 0,60$ руб./день
--------------	-------------	----------------------

*Упорядочение работ*

, E и F - исходные работы проекта, которые можно начинать одновременно;

абота А начинается сразу по окончании работы С;

абота Н следует за F;

абота I следует за А, а работы D и J - за Н;

абота G следует за E, но не может начаться, пока не завершены D и I;

абота В следует за G и J.

**Вариант 4**

Назв. работы	Норм. длительность	Норм. стоимость	Сокр. длительность	Повыш. стоимость	Кол-во исполн.
N=10 человек	144,00 руб.		$k = 0,70$ руб./день		

*Упорядочение работ*

, J и D - исходные работы проекта, которые можно начинать одновременно;

абота А следует за D, а работа I - за А;

абота Н следует за I;

абота F следует за Н, но не может начаться, пока не завершена С;

абота G следует за I;

абота E следует за J, а работа В - за E.



N=10 человек		122,00 руб.		к = 1,10 руб./день	

*Упорядочение работ*

, С и В - исходные работы проекта, которые можно начинать одновременно;

абота Е следует за F;

абота А следует за В, а работа G - за А;

аботы D и J следуют за Е;

абота I следует за С, но не может начаться прежде, чем закончатся J и

абота H следует за D.

**Вариант 7**

Назв. работы	Норм. длительность	Норм. стоимость	Сокр. длительность	Повыш. стоимость	Кол-во исполн.
N=13 человек		149,00 руб.		к = 1,30 руб./день	

*Упорядочение работ*

- исходная работа проекта;

аботы А, I и D следуют за G и могут выполняться одновременно;

аботы С и J следуют за А, работа F - за I, а работа В - за D;

абота Е следует за С;

абота H следует за В, но не может начаться, пока не завершена F.



N=10 человек		305,00 руб.		$k = 1,70$ руб./день	

*Упорядочение работ*

, I и D - исходные работы проекта, которые можно начинать одновременно;

абота F следует за A, работа B - за I, а работа C - за D;

аботы J и G следуют за F;

абота E следует за J;

абота H начинается после завершения E, G, B и C.

**Вариант 10**

Назв. работы	Норм. длительность	Норм. стоимость	Сокр. длительность	Повыш. стоимость	Кол-во исполн.
11 человек		170,00 руб.		$k = 0,65$ руб./день	

*Упорядочение работ*

, F и G- исходные работы проекта, которые можно начинать одновременно;

аботы H и B начинаются сразу по окончании работы F;

абота J следует за A, а работа I - за G;

абота E следует за H;

аботы C и K следуют за B и I, но не могут начаться, пока не завершена







### *Упорядочение работ*

, F и I- исходные работы проекта, которые можно начинать одновременно;

абота D следует за C, а работа H - за F;

аботы A и B следуют за I;

абота G следует за H, но не может начаться, пока не завершены D и A;

абота E следует за G;

абота J следует за E и B.

### **Вариант 14**

Назв. работы	Норм. длительность	Норм. стоимость	Сокр. длительность	Повыш. стоимость	Кол-во исполн.
N=10 человек		170,00 руб.		к = 1,20 руб./день	

### *Упорядочение работ*

и H- исходные работы проекта, которые можно начинать одновременно;

аботы E и J следуют за A;

аботы C и B следуют за H;

абота F следует за E;

абота D следует за C, но не может начаться, пока не завершена работа

абота G следует за F;  
абота I следует за D.

### Контрольные вопросы

1. Определение события, виды событий, практические примеры событий, обозначение событий на графике, временные параметры событий.

2. Определение работы, классификация работ с приведением соответствующих практических примеров, обозначение работ на графике, временные параметры работ.

3. Правила построения сетевых графиков.

4. Определение пути в сетевом графике, виды путей, важность определения критического пути.

5. Умение вычислять временные параметры событий и работ.

6. Почему при расчете раннего срока свершения события выбирают *максимальную* из сумм  $T_p(k) + t(k,i)$ ?

7. Почему при расчете позднего срока свершения события  $i$  выбирают *минимальную* из разностей  $T_{п}(j) - t(i, j)$ ?

8. Какова взаимосвязь полного и свободного резервов работы?

9. Как можно найти критический путь в сетевой модели, без непосредственного суммирования длительностей работ?

## **ОПТИМИЗАЦИЯ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ ПО КРИТЕРИЮ «МИНИМУМ ИСПОЛНИТЕЛЕЙ»**

### **Цель работы**

Знакомство с методикой и приобретение навыков проведения оптимизации сетевых моделей по критерию "Минимум исполнителей".

### **Порядок выполнения работы**

1. Согласно номеру своего варианта, получите данные о количестве исполнителей, занятых на каждой работе сетевой модели, и ограничение по численности  $N$  одновременно занятых в работе исполнителей.

2. Постройте в отчете графики привязки и загрузки, используя нормальные длительности работ сети -  $T_H$  (см. п.4.3.1), и покажите их преподавателю.

3. Проверьте правильность построения графиков привязки и загрузки с помощью компьютера, в случае необходимости выявите и устраните ошибки.

4. Проведите уменьшение численности исполнителей, одновременно занятых на работах сети, до требуемого уровня  $N$ .

5. Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- номер варианта;
- исходные данные варианта;
- графики привязки и загрузки до проведения оптимизации загрузки;
- графики привязки и загрузки после проведения оптимизации загрузки (возможно использование пунктирных линий на первоначально построенных графиках для отображения изменений в привязке работ и загрузке сети, вызванных сдвигами работ);
- коды работ, сдвинутых в процессе оптимизации, и время их сдвига.

### **Теоретическая часть**

#### **Методика оптимизации загрузки сетевых моделей**

При оптимизации использования ресурса рабочей силы чаще всего сетевые работы стремятся организовать таким образом, чтобы:

- количество одновременно занятых исполнителей было

минимальным;

- выровнять потребность в людских ресурсах на протяжении срока выполнения проекта.

Суть оптимизации загрузки сетевых моделей по критерию "минимум исполнителей" заключается в следующем: необходимо таким образом организовать выполнения сетевых работ, чтобы количество одновременно работающих исполнителей было минимальным. Для проведения подобных видов оптимизации необходимо построить и проанализировать *график привязки* и *график загрузки*.

*График привязки* отображает взаимосвязь выполняемых работ во времени и строится на основе данных либо о продолжительности работ (в данной лабораторной это  $T_H$ ), либо о ранних сроках начала и окончания работ. При первом способе построения необходимо помнить, что работа (i, j) может начать выполняться только после того как будут выполнены все предшествующие ей работы (k, j). По вертикальной оси графика привязки откладываются коды

работ, по горизонтальной оси - длительность работ (раннее начало и раннее окончание работ).

На *графике загрузки* по горизонтальной оси откладывается время, например в днях, по вертикальной - количество человек, занятых работой в каждый конкретный день. Для построения графика загрузки необходимо:

- на графике привязки над каждой работой написать количество ее исполнителей;

- подсчитать количество работающих в каждый день исполнителей и отложить на графике загрузки.

Для удобства построения и анализа графики загрузки и привязки следует располагать один над другим.

Описанные виды оптимизации загрузки выполняются за счет сдвига во времени не критических работ, т.е. работ, имеющих полный и/или свободный резервы времени. Полный и свободный резервы любой работы можно определить без специальных расчетов, анализируя только график привязки. Сдвиг работы означает, что она будет выполняться уже в *другие дни* (т.е. изменится время ее начала и окончания), что в свою очередь приведет к изменению количества

исполнителей, работающих одновременно (т.е. уровня ежедневной загрузки сети).

**Пример проведения оптимизации сетевой модели по критерию "Минимум исполнителей"**

Графики привязки и загрузки для исходных данных из табл.4.1, представлены на рис. 18.

Таблица 4.1

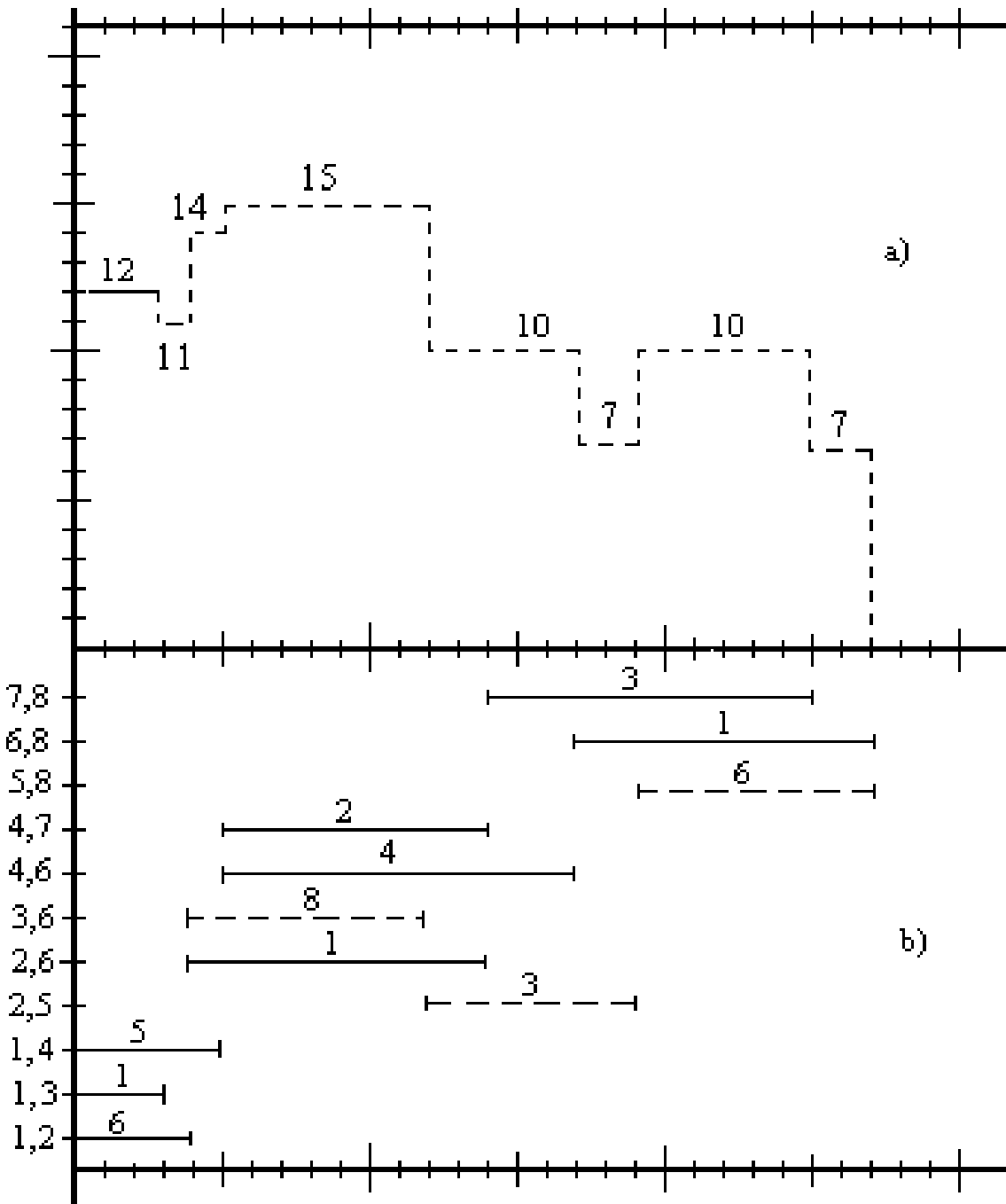
Исходные данные для оптимизации загрузки

Код работ	Продолжительность работ	Количество исполнителей
(1,2)	4	6
(1,3)	3	1
(1,4)	5	5
(2,5)	7	3
(2,6)	10	1
(3,6)	8	8
(4,6)	12	4
(4,7)	9	2
(5,8)	8	6
(6,8)	10	1
(7,8)	11	3





загрузки работ.



Проанализируем возможность уменьшения загрузки (19 человек) в течении 4-го дня. Используя  $R_c(3,6) = 6$ , сдвинем работу (3,6) на 1 день, что снизит загрузку 4-го дня до 11 человек, но при этом в 12-й день появится пик – 21 исполнитель. Для его устранения достаточно сдвинуть на 1 дней, работу (5,8) используя  $R_c(5,8) = 8$ .

Проанализируем возможность уменьшения загрузки (18 человек) с 6-го по 11-й день, т.е. в течении интервала времени в 6 дней. Так работа (2,5) является единственной, которую можно сдвинуть

таким образом, чтобы она не выполнялась в указанные 6 дней с 6-го по 11-й день. Для этого, используя  $R_{\text{п}}(2,5) = 8$ , сдвинем работу (2,5) на 8 дней, после чего она будет начинаться уже не в 4-й, а в 12 день, к чему мы и стремились. Но поскольку  $R_{\text{с}}(2,5) = 0$  и для сдвига работы (2,5) был использован полный резерв, то это влечет за собой обязательный сдвиг на 7 дней работы (5,8), следующей за работой (2,5).

В результате произведенных сдвигов максимальная загрузка сетевой модели уменьшилась с 19 до 15 человек, что и являлось целью проводимой оптимизации. Окончательные изменения в графиках привязки и загрузки показаны на рис.9.2 пунктирной линией.

Проведенная оптимизация продемонстрировала следующее различие использования свободных и полных резервов работ. Так сдвиг работы на время в пределах ее свободного резерва не меняет моменты начала последующих за ней работ. В то же время сдвиг работы на время, которое находится в пределах ее полного резерва, но превышает ее свободный резерв, влечет сдвиг последующих за ней работ.

### **Контрольные вопросы**

1. Суть оптимизации загрузки сетевых моделей по критерию "Минимум исполнителей".
2. График привязки: смысл, построение (умение строить его на основе кодов и длительности работ), назначение.
3. График загрузки: смысл, построение, назначение.
4. Методика оптимизации загрузки сетевой модели.
5. Различия в практическом использовании полного и свободного резервов работ при оптимизации загрузки.
6. Пояснить взаимосвязь полного и свободного резервов работы с помощью графика привязки.

## ОПТИМИЗАЦИЯ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ ПО КРИТЕРИЮ "ВРЕМЯ-ЗАТРАТЫ"

### Цель работы

Знакомство с методикой и приобретение навыков проведения оптимизации сетевых моделей по критерию "Время -затраты".

### Порядок выполнения работы

1. Согласно номеру своего варианта получите следующие исходные данные:  $C_H(i, j)$  - стоимость выполнения работы  $(i, j)$ , имеющей нормальную продолжительность  $T_H(i, j)$ ;  $T_Y(i, j)$  - время ускоренного выполнения работы  $(i, j)$ ;  $C_H(i, j)$  - повышенную стоимость выполнения работы  $(i, j)$ , имеющей ускоренную продолжительность;  $C_K$  - ежедневные косвенные затраты организации, выполняющей проект;  $C_0$  – ограничение по средствам, выделенным на проведение оптимизации. Используя компьютерную программу, проведите *максимально возможное* сокращение времени выполнения проекта *без учета* заданного ограничения на денежные средства  $C_0$ .

2. Постройте график прямых, косвенных и общих затрат для проведенной оптимизации (см. п.10.3.2). Определите *минимально возможную* длительность выполнения проекта *с учетом* заданного ограничения на  $C_0$ , отобразите принятое денежное решение на графике затрат.

3. Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- номер варианта;
- исходные данные варианта;
- коэффициенты нарастания затрат работ сети;
- описание **каждого** шага оптимизации, а именно: критические пути и их длительность; код сокращенной работы (работ);
- график затрат.

### Теоретическое введение

**Методика оптимизации сетевых моделей по критерию «Время –затраты»**

Целью оптимизации по критерию "Время - затраты" является сокращение времени выполнения проекта в целом. Эта оптимизация

имеет смысл только в том случае, когда время выполнения работ может быть уменьшено за счет задействования дополнительных ресурсов, что приводит к повышению затрат на выполнение работ (см. рис. 19). Для оценки величины дополнительных затрат, связанных с ускорением выполнения той или иной работы, используются либо нормативы, либо данные о выполнении аналогичных работ в прошлом. Под параметрами работ  $C_H(i, j)$  и  $C_{\Pi}(i, j)$  понимаются так называемые *прямые* затраты, непосредственно связанные с выполнением конкретной работы. Таким образом, *косвенные* затраты типа административно-управленческих в процессе сокращения длительности проекта во внимание не принимаются, однако их влияние учитывается при выборе окончательного календарного плана проекта.

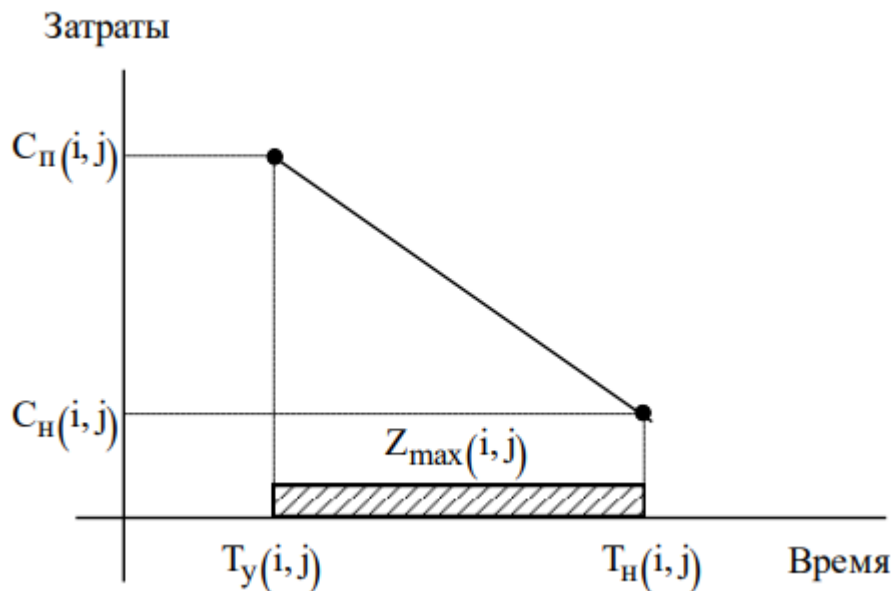


Рис. 19 – Зависимость прямых затрат на работу от времени ее выполнения

Важными параметрами работы  $(i, j)$  оптимизации являются:

- коэффициент нарастания затрат

$$k(i, j) = \frac{C_{\Pi}(i, j) - C_H(i, j)}{T_H(i, j) - T_y(i, j)},$$

который показывает затраты денежных средств, необходимые для сокращения длительности работы  $(i, j)$  на один день;

- запас времени для сокращения длительности работы в

текущий момент времени

$$Z_T(i, j) = t_T(i, j) - T_Y(i, j),$$

где  $t_T(i, j)$ - длительность работы  $(i, j)$  на текущий момент времени, максимально возможное значение запаса времени работы равно

$$Z_{\max}(i, j) = T_H(i, j) - T_Y(i, j).$$

Эта ситуация имеет место, когда длительность работы  $(i, j)$  сокращали, т.е.  $t_T(i, j) = T_H(i, j)$ .

### ***Общая схема проведения оптимизации "время -затраты"***

1. Исходя из нормальных длительностей работ  $T_H(i, j)$ , определяются критические  $L_{кр}$  и подкритические  $L_{п}$  пути сетевой модели и их длительности  $T_{кр}$  и  $T_{п}$ .

2. Определяется сумма прямых затрат на выполнение всего проекта  $C_{0пр}$  при нормальной продолжительности работ.

3. Рассматривается возможность сокращения продолжительности проекта, для чего анализируются параметры критических работ проекта.

3.1. Для сокращения выбирается критическая работа с  $\min$  коэффициентом нарастания затрат  $k(i, j)$ , имеющая ненулевой запас времени сокращения  $Z_T(i, j)$ .

3.2. Время  $\Delta T(i, j)$ , на которое необходимо сжать длительность работы  $(i, j)$ , определяется как  $\Delta T(i, j) = \min[Z_T(i, j), \Delta T]$ ,

Где  $\Delta T = T_{кр} - T_{п}$  – разность между длительностью критического и подкритического путей в сетевой модели. Необходимость учета параметра  $\Delta T$  вызвана нецелесообразностью сокращения критического пути более, чем на  $\Delta T$  единиц времени. В этом случае критический путь перестанет быть таковым, а подкритический путь наоборот станет критическим, т.е. длительность проекта в целом принципиально не может быть сокращена больше, чем на  $\Delta T$ .

4. В результате сжатия критической работы временные параметры сетевой модели изменяются, что может привести к появлению других критических и подкритических путей. Вследствие удорожания ускоренной работы общая стоимость проекта увеличивается на величину  $\Delta C_{пр} = k(i, j)\Delta t(i, j)$ .

5. Для измененной сетевой модели определяются новые

критические и подкритические пути и их длительности, после чего необходимо продолжить оптимизацию с шага 3. При наличии ограничения в денежных средствах, их исчерпание является причиной окончания оптимизации. Если не учитывать подобное ограничение, то оптимизацию можно продолжать до тех пор, пока, у работ, которые могли бы быть выбраны для сокращения, не будет исчерпан запас времени сокращения.

**Примечание.** Рассмотренная общая схема оптимизации предполагает наличие одного критического пути в сетевой модели. В случае существования нескольких критических путей необходимо либо сокращать общую для них всех работу, либо одновременно сокращать несколько различных работ, принадлежащих различным критическим путям. Возможна комбинация этих двух вариантов. В каждом случае критерием выбора работы или работ для сокращения должен служить минимум затрат на их общее сокращение.

### **Пример проведения оптимизации сетевой модели по критерию "Время - затраты"**

Проведем максимально возможное уменьшение сроков выполнения проекта при минимально возможных дополнительных затратах для следующих исходных данных (табл.5.1, рис. 20).

Таблица 5.1 Исходные данные для оптимизации "Время -затраты"

(i, j)	Нормальный режим		Ускоренный режим	
	$T_H(i, j)$	$C_H(i, j)$	$T_y(i, j)$	$C_P(i, j)$
(1,2)	5	5	3	19
(1,4)	6	6	4	12
(2,3)	3	8	1	15
(2,4)	7	10	3	18
(3,5)	6	6	1	9
(4,5)	4	9	1	12
$C_k = 1,50$ руб./день		$C_0 = 73,00$ руб.		

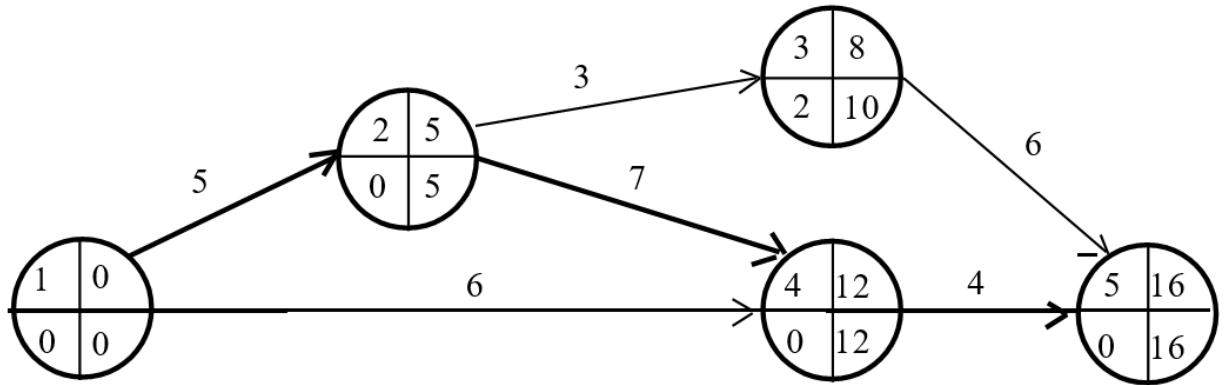


Рис. 20 – Исходная сетевая модель

Исходя из нормальных длительностей работ получаем следующие характеристики сетевой модели.

- Общие затраты на проект  $C_{\text{пр}}^0 = \sum_{v(i,j)} C_{\text{н}}(i,j) = 44,00$  руб
- Длительность проекта  $T_{\text{кр}}^0 = 16$  дней
- Критический путь  $L_{\text{кр}}^0 = 1,2,3,4,5$  или  $L_{\text{кр}}^0 = (1,2); (2,4); (3,5)$ .
- Подкритический путь  $L_{\text{кр}}^0 = 1,2,3,4,5$  или  $L_{\text{кр}}^0 = (1,2); (2,4); (3,5)$ ,  $T_{\text{п}}^0 = 14$  дней

Кроме того, вычислим коэффициенты нарастания затрат и максимальные запасы времени сокращения работ сетевой модели (табл. 5.2).

Таблица 5.2 Коэффициенты нарастания затрат работ сети

(i, j)	$Z_{\text{max}}(i, j)$ [дни]	$k(i, j)$ [руб./день]
(1,2)	2	7,00
(1,4)	2	3,00
(2,3)	2	3,50
(2,4)	4	2,00
(3,5)	5	0,60
(4,5)	3	1,00

**I шаг.** Для сокращения выбираем критическую работу (4,5) с минимальным коэффициентом  $k(4,5)=1,00$  руб./день. Текущий запас сокращения времени работы (4,5) на данном шаге равен  $Z_{\text{т}}^0(4,5) = Z$

$\max(4,5) = 3$  дня. Разность между продолжительностью критического и подкритического путей  $\Delta T^0 = T_{кр}^0 - T_{п}^0 = 2$  дня. Поэтому согласно п.3.2 описанной выше общей схеме оптимизации сокращаем работу (4,5) на  $\Delta t^1 = \min[3,2] = 2$  дня. Новая текущая длительность работы  $t_{Т}^1(4,5) = 4 - 2 = 2$  дня, а запас ее дальнейшего сокращения сокращается до  $Z_{Т}^1(4,5) = 1$  дня. Измененный сетевой график представлен на рис. 21

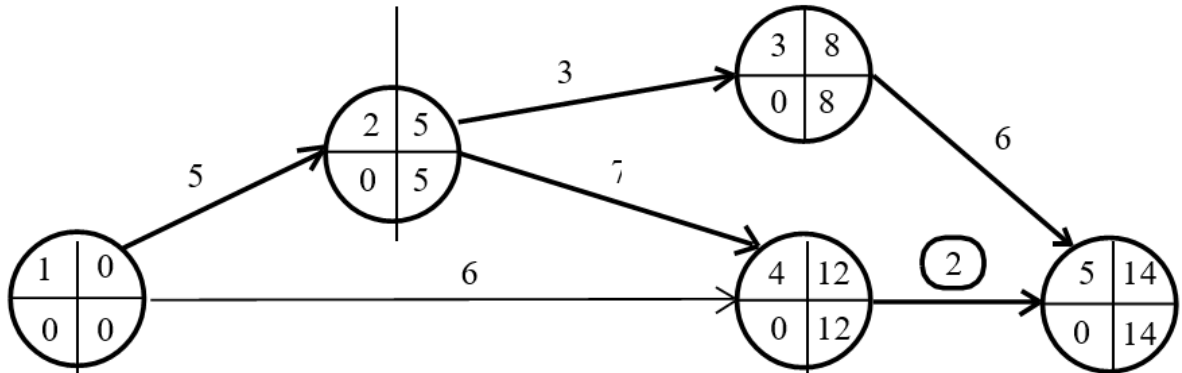


Рис. 21 – Сетевая модель после первого шага оптимизации

После ускорения работы (4,5) возникли следующие изменения.

- Затраты на работу (4,5) возросли на  $1,00 \text{ руб./день} \cdot 2 \text{ дня} = 2,00 \text{ руб.}$  и

общие затраты на проект составили  $C_{пр}^1 = 44,00 + 2,00 = 46,00$

- Длительность проекта  $T_{пр}^1 = 14$  дней
- Критические пути  $L_{пр}^1 = 1,2,3,5$  и  $L_{пр}^1 = 1,2,4,5$ .
- Подкритический путь  $L_{пр}^1 = 1,4,5$ ,  $T_{пр}^1 = 8$  дней.

**II шаг.** Одновременное сокращение двух критических путей можно провести либо ускорив работу (1,2), принадлежащую обоим путям, либо одновременно ускорив различные работы из каждого пути. Наиболее дешевым вариантом является ускорение работ (3,5) и (4,5) -  $1,60 \text{ руб./день}$  за обе работы, тогда как ускорение работы (1,2) обошлось бы в  $7 \text{ руб./день}$ . Поскольку  $\Delta T^1 = T_{кр}^1 - T_{п}^1 = 6$ , то сокращаем работы (3,5) и (4,5) на  $\Delta t^2 = \min[5,1,6] = 1$  день. Запасы дальнейшего сокращения времени работ сокращаются до  $Z_{Т}^2(3,5) = 4$  и  $Z_{Т}^2(4,5) = 0$  дней. Измененный сетевой график представлен на рис. 22.



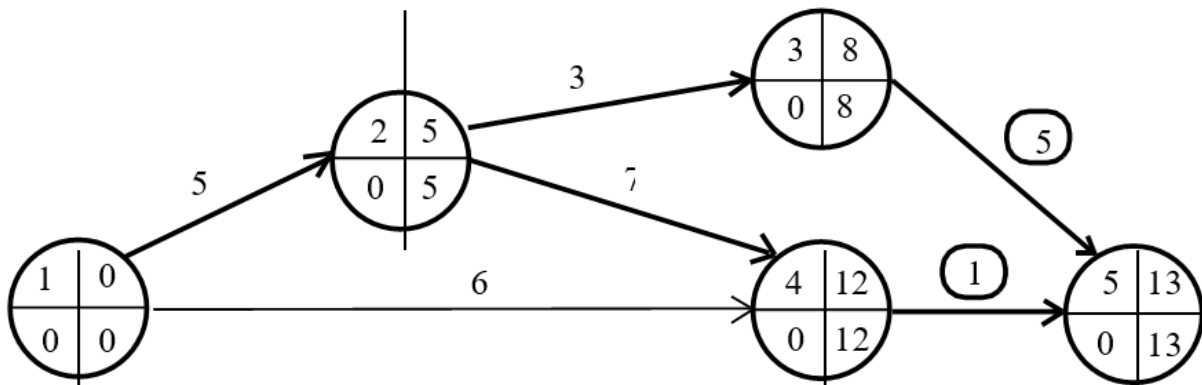


Рис. 22 – Сетевая модель после второго шага оптимизации

После ускорения работ (3,5) и (4,5) возникли следующие изменения.

- Общие затраты на проект составили  $C_{\text{пр}}^2 = 46,00 + 0,60 * 1 + 1,00 * 1 = 47,60$
- Длительность проекта  $T_{\text{пр}}^2 = 13$  дней
- Два критических пути  $L_{\text{пр}}^2 = 1,2,3,5$  и  $L_{\text{пр}}^3 = 1,2,4,5$ .
- Подкритический путь  $L_{\text{пр}}^2 = 1,4,5$ ,  $T_{\text{пр}}^2 = 7$  дней.

**III шаг.** Поскольку на данном шаге работа(4,5) исчерпала свой запас ускорения, то наиболее дешевым вариантом сокращения обоих критических путей является ускорение работ (3,5) и (2,4) - 2,60 руб./день за обе работы.

Сокращаем работы (3,5) и (2,4) на  $\Delta t^3 = \min[4,4,6] = 4$  дня. Запасы дальнейшего сокращения времени работ (3,5) и (2,4) обнуляются. Измененный сетевой график представлен на рис. 23.

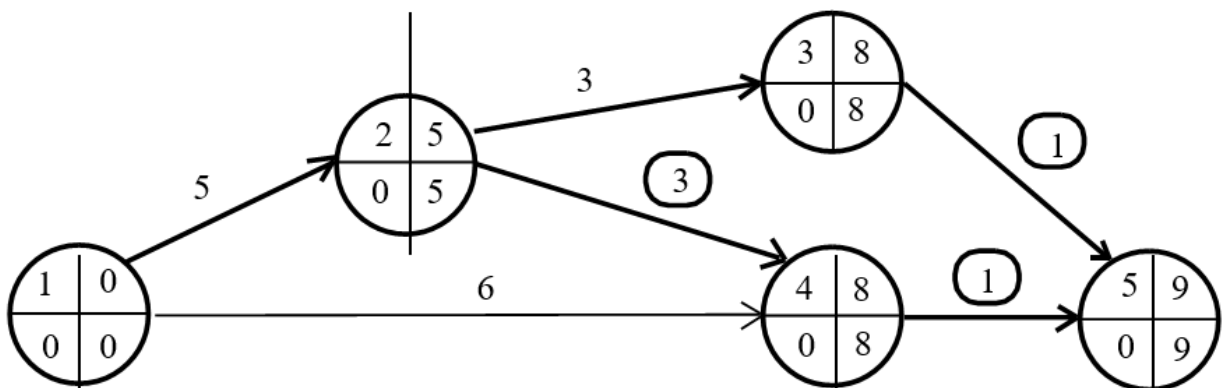


Рис. 23 – Сетевая модель после третьего шага оптимизации

После ускорения работ (3,5) и (2,4) возникли следующие изменения.

- Общие затраты на проект составили  
 $C_{\text{пр}}^3 = 47,60 + 0,60 * 4 + 2,00 * 4 = 58,00$
- Длительность проекта  $T_{\text{пр}}^3 = 9$  дней
- Два критических пути  $L_{\text{пр}}^3 = 1,2,3,4,5$  и  $L_{\text{пр}}^3 = 1,2,3,4,5$ .
- Подкритический путь  $L_{\text{пр}}^3 = 1,4,5$ ,  $T_{\text{пр}}^3 = 7$  дней.

**IV шаг.** Поскольку кроме работы (1,2) все остальные работы критического пути  $L_{\text{кр}}^3 = 1,2,4,5$  исчерпали свой запас времени ускорения, то единственно возможным вариантом сокращения обоих критических путей является ускорение работы (1,2). Сокращаем работу (1,2) на  $\Delta t^4 = \min[2,2] = 2$  дня. Запас дальнейшего сокращения времени работы (1,2) обнуляется. Измененный сетевой график представлен на рис. 24.

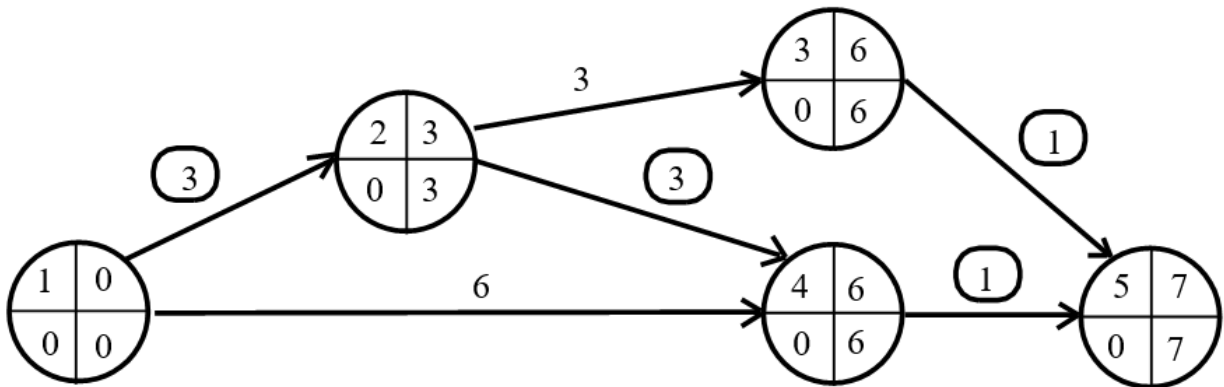


Рис. 24 – Сетевая модель после четвертого шага оптимизации

После ускорения работы (1,2) возникли следующие изменения.

- Общие затраты на проект составили  
 $C_{\text{пр}}^4 = 58,00 + 7,00 * 2 = 72,00$  руб.
  - Длительность проекта  $T_{\text{пр}}^4 = 7$  дней
  - Три критических пути  $L_{\text{пр}}^4 = 1,2,3,5$  и  $L_{\text{пр}}^3 = 1,2,4,5$ ,  $L_{\text{пр}}^4 = 1,4,5$ .
  - Подкритические пути отсутствуют
- Дальнейшая оптимизация стала невозможной, поскольку все

работы критического пути  $L_{\text{пр}}^4 = 1,2,4,5$  исчерпали свой запас времени ускорения, а значит проект не может быть выполнен меньше, чем за  $T_{\text{пр}}^4 = 7$  дней.

Таким образом, при отсутствии ограничений на затраты минимально возможная длительность проекта составляет 7 дней. Сокращение длительности проекта с 16 до 7 дней потребовало 28,00 рублей прямых затрат. В отличие от прямых затрат при уменьшении продолжительности проекта косвенные затраты ( $C_{\text{к}} = 1,50$  руб./день) убывают, что показано на графике (см. рис. 25).

Минимум общих затрат (точка А) соответствует продолжительности проекта 14 дней.

Если же учитывать ограничение по средствам, выделенным на выполнение проекта,  $C_0 = 73,00$  рубля, то оптимальным является выполнение проекта за 9 дней (точка В).

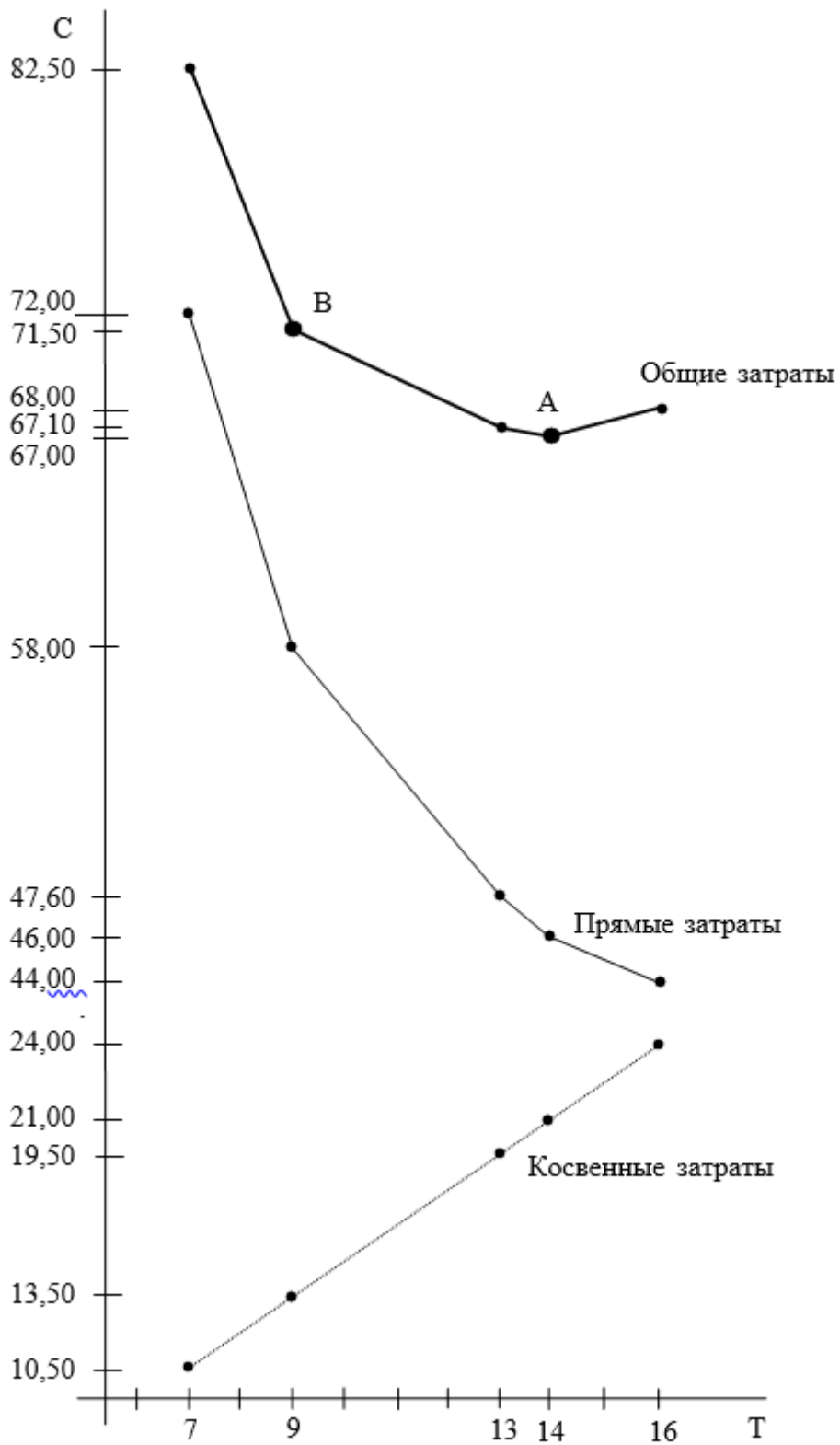


Рис. 25 – График «время – затраты»

### Контрольные вопросы

1. Суть оптимизации сетевых моделей по критерию "Время - затраты".
2. Объяснить смысл исходных данных  $T_H(i, j)$ ,  $T_Y(i, j)$ ,  $C_H(i, j)$ ,  $C_P(i, j)$ .
3. Какими свойствами должна обладать работа, выбираемая на конкретном шаге для сокращения?
4. Экономический смысл коэффициента нарастания затрат, его единица измерения, способ расчета.
5. Прокомментировать графики прямых, косвенных и общих затрат для проведенной оптимизации, а также принятое решение о минимальной длительности проекта, учитывающее ограничение по затратам  $C_0$ .
6. Как определяется время сокращения проекта на конкретном шаге?
7. Как определяется сумма, на которую возрастает стоимость проекта на конкретном шаге оптимизации?
8. Как выбирается работа (работы) для сокращения при наличии нескольких критических сетевой модели?
9. Что должно служить причиной прекращения оптимизации в случае, когда не существует ограничение по средствам, выделенным на проведение оптимизации?
10. Объяснить причины возможного появления вертикальных участков на графике прямых затрат и их экономический смысл.
11. Как рассчитать стоимость проекта до проведения оптимизации?
12. Верно ли утверждение: стоимость максимально сокращенного проекта (без ограничений в средствах для оптимизации) равна  $\sum_{\forall(i, j)} C_P(i, j)$ ?
13. В чем причина возникновения ситуации, когда невозможно сократить проект на величину запаса времени сокращаемой работы  $Z_T(i, j)$  за *один шаг* и для этого требуется провести *несколько шагов* оптимизации (с одной и той же работой)?

## ОСНОВЫ РЕГРЕССИОННОГО И КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА

### Цель работы

Приобретение навыков использования инструмента регрессионного анализа для аппроксимации статистических зависимостей экономических параметров и прогнозирования.

### Порядок выполнения работы

1. Согласно номеру своего варианта, выберите условие задачи и постройте ее модель.
2. Используя общие рекомендации по решению задачи (см. ниже подразд.1.6), определите наиболее выгодный режим работы предприятия.
3. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
  - титульный лист;
  - исходные данные варианта;
  - описание каждого этапа решения задачи в виде математических моделей, расчетов, численных результатов с указанием всех единиц измерения;
  - рекомендации по организации работы предприятия.

### Теоретическое введение

#### Основы регрессионного и корреляционного анализа

##### *Основные понятия и определения*

Во многих технических, экономических, организационных задачах требуется установить и оценить зависимость изучаемой *случайной* величины (СВ)  $Y$  от одной или нескольких других величин  $X$ . Например, в ситуациях, когда необходимо оценить, как влияет:

- 1) количество внесенных удобрений на снимаемый урожай;
- 2) величина затрат компании на рекламу своего товара на объемы продаж этого товара;
- 3) изменение цены товара на объем его продаж;
- 4) величина доходов населения на величину их сбережений.

Зависимость между значениями параметров  $X$  и  $Y$  может быть:

- функциональной;
- статистической;
- корреляционной.

*Случайной* называют величину, которая в результате испытания

примет одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Параметр  $Y$  связан с параметром  $X$  **функциональной** зависимостью в том случае, когда конкретному значению  $X = x$  соответствует одно и только одно значение  $Y = y_x$ . Например, если принять, что  $X$ — это градусы по шкале Цельсия, а  $Y$  - градусы по шкале Фаренгейта, то между этими параметрами существует функциональная зависимость

$$Y = \frac{9}{5}X + 32 \text{ и наоборот } X = \frac{5}{9}(Y - 32).$$

Функциональность связи определяется тем, что для конкретной температуры по Цельсию существует одна и только одна температура по Фаренгейту.

В экономических процессах строгая функциональная зависимость реализуется редко, т.к. часто оба параметра или один из них подвержены еще действию разнообразных случайных факторов, например, объем продаж товара не определяется жестко его ценой. На него могут влиять такие случайные факторы, как погода, сезон, эффект ажиотажного спроса, массовая невыплата или выплата зарплаты. **Статистической** называют зависимость, при которой изменение одной из величин  $X$  влечет изменение *распределения* (т.е. множества возможных значений)  $Y$  другой. Например, пусть при цене на лимоны в 15 руб. семья со средним достатком покупает в месяц от 10 до 15 лимонов, при цене в 25 руб. - от 7 до 10 шт., а при цене в 40 руб. - 3-5 шт. Т.е. изменение цены  $X$  изменяет возможное количество покупаемых цитрусовых  $Y$ .

Статистическую зависимость называют **корреляционной**, если при изменении одной из величин  $X$  изменяется *среднее* значение  $Y$  другой. Например, с одинаковых по площади участков земли при равных количествах внесенных удобрений  $X$  снимают различный урожай  $Y$ , т.е.  $Y$  не является функцией от  $X$ . Это объясняется влиянием случайных факторов (осадки, температура воздуха, плодородие почвы и др.). Но как показывает опыт, **средний** урожай  $Y$  является функцией от количества удобрений, т.е.  $Y$  связан с  $X$  корреляционной зависимостью.

Рассмотрим графическое представление данных о расходах на рекламу товара и (см. рис. 2б).

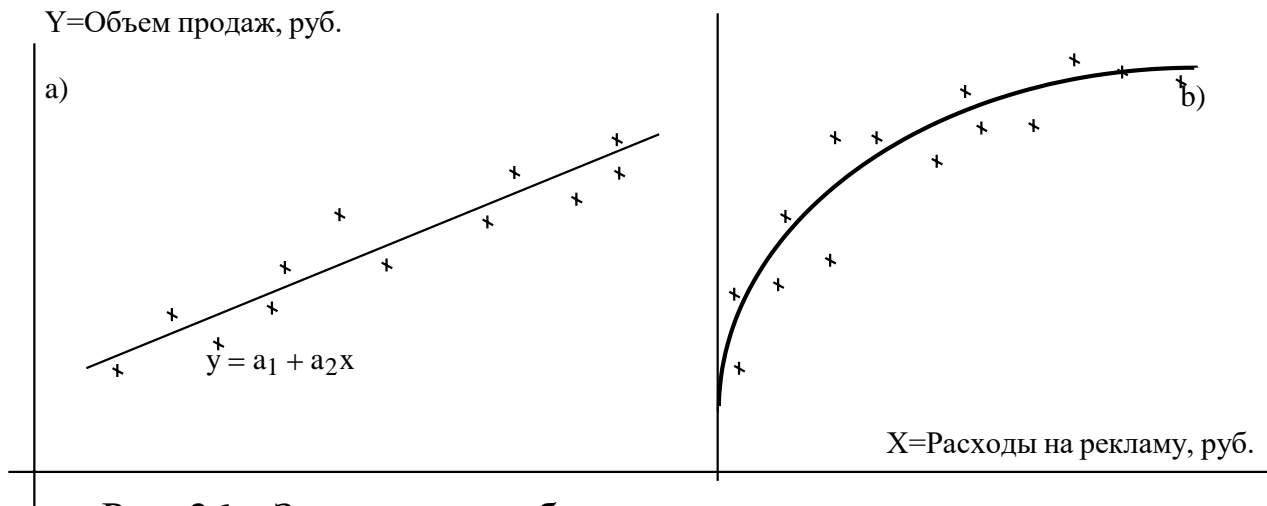


Рис. 26 – Зависимость объема продаж товара от расходов на рекламу

Из графика а) видно, что связь между параметрами близка к линейной. В случае данных, представленных на графике б) можно предположить, что линейная модель неприменима для описания связи между расходами на рекламу и объемами продаж.

Уравнение прямой  $y = a_0 + a_1x$  из рис.6.1. а) является моделью связи, существующей между параметрами X и Y. Эту модель можно использовать для объяснения конкретной ситуации и для прогнозов.

Первым шагом в анализе связи между параметрами является изучение переменных. Параметр Y, значение которого нужно предсказывать, является **зависимым**. Параметр X, значения которого нам известны заранее, и который влияет на значения Y называется **независимым**. В описанной ситуации Y — это объем продаж товара, X — затраты на рекламу. В действительности не существует теоретической основы, исходя из которой можно было бы написать уравнение, которое бы точно показало связь продаж с расходами на рекламу. Имеется ряд факторов, неразрывно связанных между собой, такие как цена товара, цена товара-конкурента, сезон, погодные условия. Тем не менее, если предположить, что в конкретном случае, расходы на рекламу являются **главным** фактором, определяющим продажу, то знание этой связи было очень полезным для оценки объема продаж и соответствующего планирования финансовой политики компании.

Важным моментом является то, что для любого конкретного объема рекламы x существует **распределение** возможного объема



продаж, т.е. не одно, а несколько значений  $y_x$ . Т.е. если два месяца подряд фирма будет выделять на рекламу одну и ту же сумму средств, например,  $x=5$  тыс.руб., то объемы продаж в каждом месяце будут отличаться, будучи близкими по значению, например, в первом месяце  $y_5^1 = 4500$  штук, во втором  $y_5^2 = 4590$  штук.

Эта идея очень важна для дальнейшего анализа. Для усреднения всех возможных значений параметра  $Y$ , которые соответствуют значению  $X = x$ , используют понятие **условного среднего**  $\bar{y}_x$ , т.е. среднего арифметического всех значений  $Y$ , которые наблюдались при значении  $X = x$ . Если каждому значению  $x$  соответствует одно значение условной средней  $y_x$ , то условная средняя есть функция от  $x$ ; в этом случае говорят, что СВ  $Y$  зависит от  $X$  **корреляционно**.

Корреляционная зависимость  $Y$  от  $X$  – это функциональная зависимость условной средней  $\bar{y}_x$  от  $x$

$$\bar{y}_x = f(x). \quad (6.1)$$

Уравнение (6.1) называется уравнением регрессии  $Y$  на  $X$ . Функция  $f(x)$  наз. регрессией  $Y$  на  $X$ , а ее график - линией регрессии  $Y$  на  $X$ .

*Две основные задачи* регрессионного и корреляционного анализа:

**1) Установить форму корреляционной связи**, т.е. вид функции регрессии (линейная, квадратичная, показательная и т.д.).

**2) Оценить тесноту (силу) корреляционной связи.** Теснота корреляционной зависимости  $Y$  от  $X$  оценивается по величине рассеяния значений  $Y$  вокруг условного среднего  $\bar{y}_x$ . Большое рассеяние говорит о слабой зависимости  $Y$  от  $X$ , либо об ее отсутствии. И наоборот, малое рассеяние указывает на наличие достаточно сильной зависимости.

### **Метод наименьших квадратов**

Первая задача регрессионного и корреляционного анализа решается с помощью **метода наименьших квадратов**. Рассмотрим его суть на примере линейной зависимости, представленной на рис. 27.

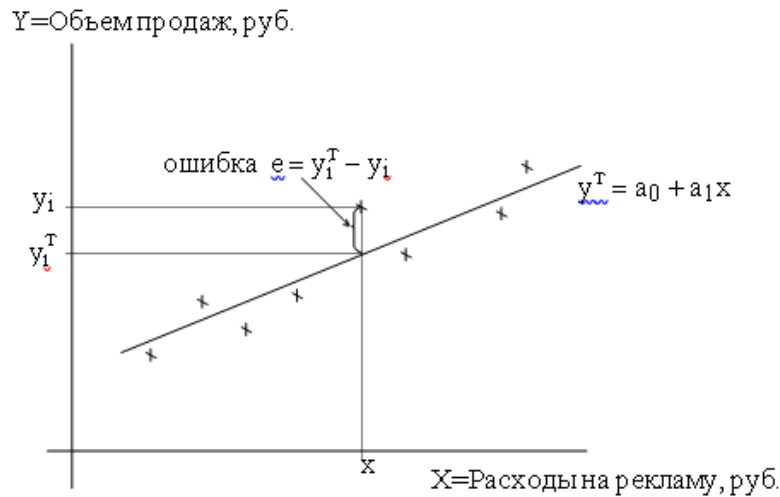


Рис. 27. Зависимость объема продаж товара от расходов на рекламу

Применение метода наименьших квадратов в этом случае позволяет из бесконечного множества прямых линий, существующих на плоскости, найти уравнение прямой  $\bar{y} = a_0 + a_1 x$ , которая *ближе всего* расположена к точкам, построенным по исходным данным  $(x_i, y_i)$ . Критерием того, насколько близко исходные точки лежат к линии  $y^T = a_0 + a_1 x$  является сумма квадратов ошибок (отклонений) значений

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i^T - y_i)^2 \rightarrow \min,$$

где  $y_i^T$  - значения, предсказанные искомой теоретической функцией  $y^T$ ,  $y_i$  - исходные значения  $y$ ;  $n$  - количество пар исходных данных. Для поиска параметров  $a_0$  и  $a_1$ , в которых функция  $S(a_0, a_1)$  принимает минимальное значение ее частные производные приравниваются к нулю.

Таким образом, сумма квадратов отклонений  $S$  для прямой  $y^T = a_0 + a_1 x$ , найденной методом наименьших квадратов, является минимальной по сравнению во всеми остальными возможными линейными функциями.

На практике часто встречаются случаи криволинейных связей между параметрами. Для многих из них, в частности для параболы

$\bar{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ , гиперболы  $y = a_0 + \frac{a_1}{x}$ , экспоненты  $y = a_0 e^{a_1 x}$ , так же применим метод наименьших квадратов.

### Оценка тесноты корреляционной связи

После установления вида корреляционной связи, необходимо оценить ее силу (тесноту), т.е. решить вторую задачу регрессионного и корреляционного анализа. Подбор вида функции регрессии на основе графика (как в рассмотренном примере о рекламе) может быть обманчивым, поскольку распределение исходных точек на графике, а значит и общий вид графика, зависит от выбора масштаба. Поэтому необходимо объективное измерение тесноты линейной связи.

Мат. ожидание приблизительно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений СВ  $\bar{y} \approx M(Y)$ .

Дисперсия - это числовая характеристика СВ, которая показывает, как рассеяны возможные значения СВ вокруг ее математического ожидания. Дисперсия - это мат. ожидание квадрата отклонения СВ  $y$  от ее математического ожидания  $\bar{y}$ ,  $D(Y) = d$  (см. рис. 28).

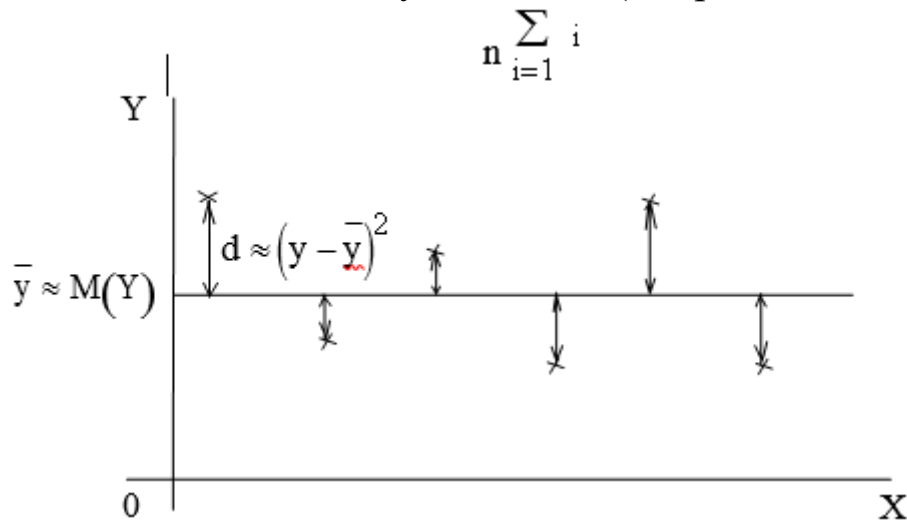


Рис. 28 – Иллюстрация математического ожидания и дисперсии случайной величины

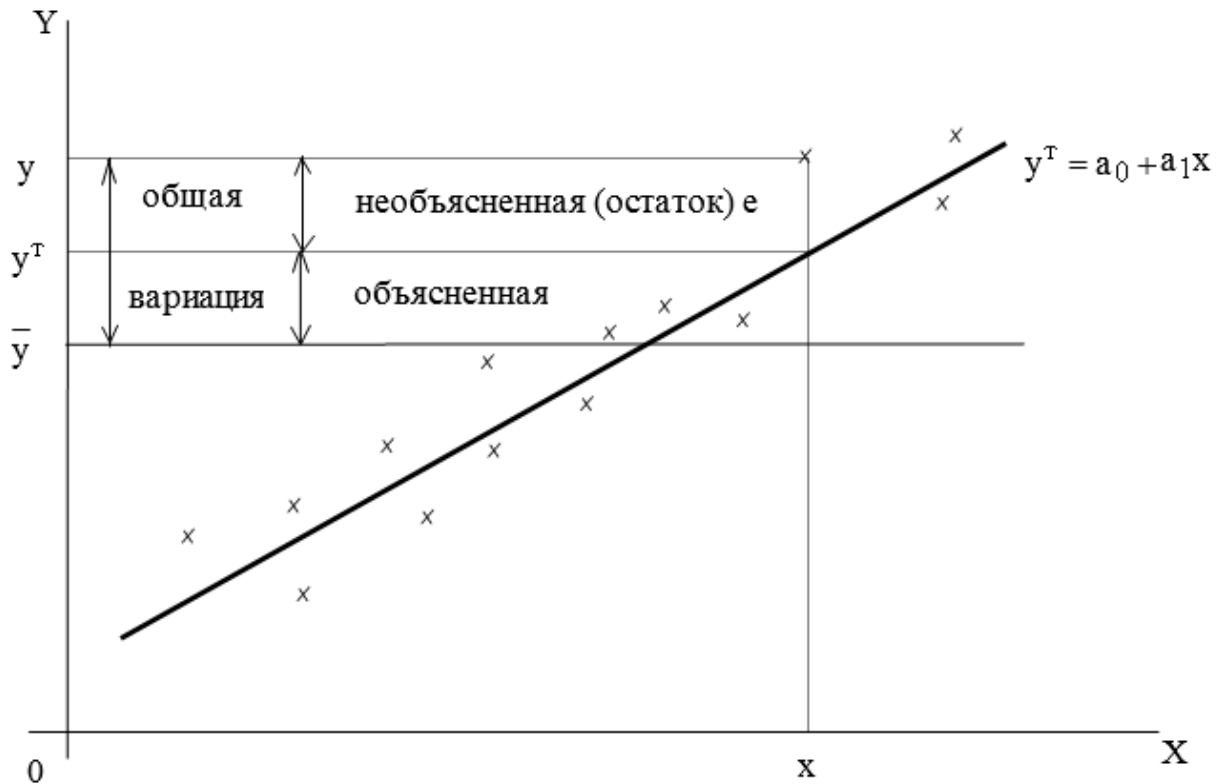


Рис. 29. Структура дисперсии зависимой переменной  $Y$

Рассмотрим на графике структуру дисперсии зависимой переменной  $Y$  (см. рис. 29). Линейная связь только частично объясняет разброс значений  $y$ . Необъясненная часть является остатком  $e$ . Если бы связь между  $x$  и  $y$  была абсолютно линейной, то все  $e$  были бы равны нулю. По мере того, как сила линейной связи уменьшается, остаток увеличивается. Общая вариация значений  $y$  равна

$$\sum_{i=1}^n (y - \bar{y})^2$$

Общее изменение  $y$  с учетом линейной связи, т.е. объясненная вариация равна

$$\sum_{i=1}^n (y^T - \bar{y})^2.$$

Тогда вариация, которая не объясняется линейной связью, поскольку возникает из-за других факторов, не включенных в линейную модель равна

$$\sum_{i=1}^n (y - \hat{y}^r)^2 = e^2.$$

Чем теснее линейная связь, тем ближе величина объясненной вариации к величине общей вариации. Поэтому используется отношение этих вариаций, называемое **коэффициентом детерминации**

$$r^2 = \frac{\sum (y - \hat{y})^2}{\sum (y - \bar{y})^2}$$

Коэффициент детерминации показывает величину дисперсии  $Y$ , которая объясняется независимой переменной  $X$ . Он часто выражается в процентах и в случае наличия функциональной зависимости между параметрами равен  $r^2 = 1$  или 100%. Если же корреляционная связь отсутствует, то  $r^2 = 0$ .

### **Функция производственных возможностей**

**Функция производственных возможностей (ФПВ)** показывает различные комбинации товаров 1 и 2, которые могут быть произведены при фиксированном значении труда и капитала. Каждая точка на границе производственных возможностей отражает уровень эффективного производства как товара 1, так и товара 2 (см. рис. 30).

Объем выпуска товара 2, ед.тов.

Объем выпуска товара 1, ед.тов

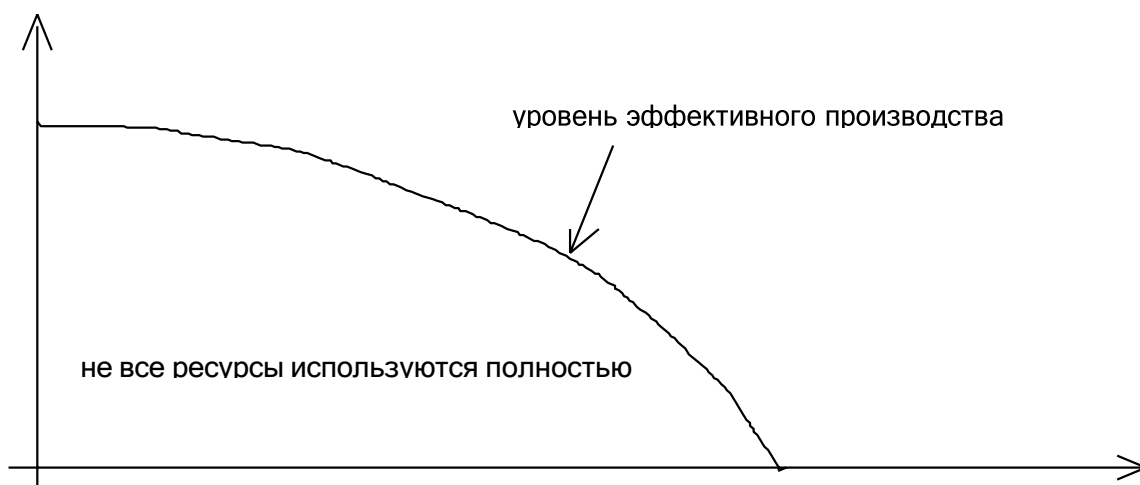


Рис. 30 – Функция производственных возможностей фирмы

Конкретное распределение вложений в производство является технически эффективным, если выпуск одного товара не может быть

увеличен без уменьшения выпуска другого. ФПВ наклонена вниз, т.к. при эффективном производстве увеличение выпуска товара 1 требует переключения затрат факторов с производства товара 2, что в свою очередь снижает уровень выпуска товара 2. Все точки внутри границы неэффективны. Во внутренней области не все ресурсы используются полностью. Чтобы иметь возможность увеличить производство одного товара, приходится снижать производство другого. Постепенное увеличение отрицательного угла наклона иллюстрирует убывающую эффективность. Т.е. необходимо вкладывать все больше ресурсов для получения одного и того же количества продукта. Т.е. за каждый шаг вправо по горизонтальной оси мы должны делать все более крупные шаги по вертикальной оси.

### Постановка задачи

Фирма производит изделия двух наименований И1 и И2. Используя отчетную информацию за прошедший год, была составлена таблица (см табл. 6.1), характеризующая производственные возможности фирмы по выпуску изделий.

Табл. 6.1 - Производственные возможности фирмы

□ месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	23	65	81	124	47	81	29	72	53	101	1276	97
Производство И2, тыс. шт.	73	62	57	25	73	59	74	64	72	46	26	47

Согласно прогнозам на цены, в следующем году прибыль от продажи И1 составит **Пр1** руб./шт., а для И2 - **Пр2** руб./шт.

I) Определите оптимальные объёмы выпуска продукции в следующем году.

II) Менеджер предлагает в следующем году специализировать производство на одном виде изделий. Выяснить, при какой специализации фирме будет выгодней работать.

### Общие рекомендации по решению задачи

- 1) Постройте график точек объемов выпуска товаров.
- 2) Определите вид регрессионной функции, которая могла бы описать зависимость между объемами выпуска товаров.
- 3) Аппроксимируйте функцию производственных возможностей, оцените тесноту регрессионной связи средствами MS Excel и удостоверьтесь в том, что полученная регрессионная функция действительно описывает связь между объемами выпуска товаров.

4) Определите оптимальные объемы производства товаров. Для этого

- a) определите переменные (объемы выпуска);
- b) постройте целевую функцию (прибыль);
- c) задайте ограничения (функция производственных возможностей, неотрицательность выпуска).

На основе построенной модели решите задачу в MS Excel.

5) Используя найденную функцию производственных возможностей, определите объемы производства товаров при специализации на 1) первом виде товара; 2) втором виде товара.

6) Решите, какая из специализаций выгодней для предприятия.

### **Проведение регрессионного анализа в Excel**

1. Постройте в Excel график исходных точек  $(x_i; y_i)$ , где  $x_i$  и  $y_i$  – объем выпуска соответственно изделий И1 и И2 в  $i$ -м месяце. Для этого:

- 1) введите таблицу со значениями выпуска в лист MS Excel;
- 2) из меню **Вставка/Диаграмма** вызовите **Мастер диаграмм**;
- 3) в окне **Мастер диаграмм (шаг 1 из 4): тип диаграммы** на закладке **Стандартные** выберите **Точечная** и нажмите кнопку **Далее**;
- 4) в окне **Мастер диаграмм (шаг 2 из 4): источник данных диаграммы** установите селекторный переключатель **Ряды в строках**, затем поставьте курсор в поле **Диапазон** и выделите мышью в экранной форме ячейки с исходными данными. В результате адреса исходных ячеек будут введены в поле **Диапазон** и в окне появится график исходных точек. Нажмите кнопку **Далее**.

5) в окне **Мастер диаграмм (шаг 3 из 4): параметры диаграммы** пожеланию можно задать подписи данных, название диаграммы и т.д. Нажмите кнопку **Далее**.

6) в окне **Мастер диаграмм (шаг 4 из 4): размещение диаграммы** выберите способ размещения диаграммы, например, на имеющемся листе, и нажмите кнопку **Готово**.

2. Определите уравнение регрессии и коэффициент детерминации для построенных точек. Для этого:

1) поставьте курсор на любую из построенных точек диаграммы и нажатием правой клавиши мыши вызовите из контекстного меню пункт **Добавить линию тренда**;

2) в окне закладки **Тип** выберите **Полиномиальная** и установите

степень 2 (это соответствует параболе  $\bar{y} = a_0 + a_1x + a_2x^2$ );

3) в окне закладки **Параметры** нажатием левой клавиши мыши включите режимы показывать уравнение на диаграмме и поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации ( $R^2$ ).

4) нажмите кнопку **ОК**, после этого на диаграмме появится уравнение параболы и значение коэффициента детерминации.

### 6.3. Варианты

**ВАРИАНТ 1.**  $Pr_1=50$  руб./шт.;  $Pr_2=80$  руб./шт.

<input type="checkbox"/> месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	14	54	72	115	36	70	20	60	41	92	117	86
Производство И2, тыс. шт.	64	53	46	14	62	48	63	53	60	35	15	38

**ВАРИАНТ 2.**  $Pr_1=120$  руб./шт.;  $Pr_2=200$  руб./шт.

<input type="checkbox"/> месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	16	43	74	95	21	53	29	84	82	63	40	98
Производство И2, тыс. шт.	51	57	40	16	52	55	57	31	34	51	59	14

**ВАРИАНТ 3.**  $Pr_1=300$  руб./шт.;  $Pr_2=90$  руб./шт.

<input type="checkbox"/> месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	62	98	36	81	123	106	88	40	58	117	95	114
Производство И2, тыс. шт.	83	66	79	78	36	60	75	81	84	46	70	51

**ВАРИАНТ 4.**  $Pr_1=180$  руб./шт.;  $Pr_2=90$  руб./шт.

<input type="checkbox"/> месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	71	37	97	51	81	111	25	67	52	90	104	46
Производство И2, тыс. шт.	61	76	37	70	55	20	78	65	72	46	30	75

**ВАРИАНТ 5.**  $Pr_1=300$  руб./шт.;  $Pr_2=140$  руб./шт.

<input type="checkbox"/> месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	36	72	9	90	48	50	16	112	22	81	127	120
Производство И2, тыс. шт.	60	54	56	42	60	59	59	30	60	49	10	20

**ВАРИАНТ 6.**  $Pr_1=170$  руб./шт.;  $Pr_2=60$  руб./шт.

<input type="checkbox"/> месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	67	45	84	111	129	123	52	96	80	64	106	116
Производство И2, тыс. шт.	105	95	106	96	78	84	98	102	106	104	97	91

**ВАРИАНТ 7.**  $Pr_1=310$  руб./шт.;  $Pr_2=190$  руб./шт.



□ месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	16	56	74	117	38	72	22	63	42	94	119	87
Производство И2, тыс. шт.	67	51	45	13	62	45	66	51	60	33	14	38

**ВАРИАНТ 8.  $Pr_1=200$  руб./шт.;  $Pr_2=340$  руб./шт.**

□ месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	13	40	71	92	18	50	26	81	79	60	37	95
Производство И2, тыс. шт.	47	55	40	13	49	52	54	28	31	49	56	11

**ВАРИАНТ 9.  $Pr_1=105$  руб./шт.;  $Pr_2=180$  руб./шт.**

□ месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	67	105	41	88	130	115	95	47	65	124	103	121
Производство И2, тыс. шт.	92	75	86	86	43	66	83	88	93	53	76	57

**ВАРИАНТ 10.  $Pr_1=98$  руб./шт.;  $Pr_2=160$  руб./шт.**

□ месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	61	27	67	41	71	101	15	57	42	80	94	36
Производство И2, тыс. шт.	53	66	48	60	45	12	68	55	62	36	20	65

**ВАРИАНТ 11.  $Pr_1=210$  руб./шт.;  $Pr_2=220$  руб./шт.**

□ месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	35	71	11	14	46	52	17	109	26	79	122	116
Производство И2, тыс. шт.	58	56	48	53	59	60	54	33	56	51	16	24

**ВАРИАНТ 12.  $Pr_1=60$  руб./шт.;  $Pr_2=90$  руб./шт.**

□ месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	86	51	84	119	139	143	59	106	90	74	116	141
Производство И2, тыс. шт.	95	85	96	86	68	69	89	92	95	93	88	71

### Контрольные вопросы

1. Экономический и математический смысл функции производственных возможностей?
2. Виды зависимостей между экономическими параметрами и их примеры.
3. Понятие функции регрессии.
4. Задачи регрессионного и корреляционного анализа.
5. В чем суть метода наименьших квадратов?
6. Как оценивается теснота корреляционной связи?
7. Как спрогнозировать объемы производства при специализации на одном виде товара?
8. Постройте модель определения оптимального объема производства на основе функции производственных возможностей

## Рекомендуемая литература

1. Кундышева, Е. С. Математические методы и модели в экономике : учебник / Е. С. Кундышева ; под науч. ред. Б. А. Суслакова. – 3-е изд. – Москва : Дашков и К°, 2022. – 286 с. : ил., табл., граф. – (Учебные издания для бакалавров). – Режим доступа: по подписке. –

URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=684490> (дата обращения: 04.09.2023). – ISBN 978-5-394-04621-6. – Текст : электронный.

2. Ширкунова, Н. В. Математические модели в экономике : учебное пособие / Н. В. Ширкунова, М. М. Цвиль, Е. В. Ларькина. – Санкт-Петербург : Троицкий мост, 2021. – 184 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. –

URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=619043> (дата обращения: 04.09.2023). – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-6044302-7-9. – Текст : электронный.

3. Шапкин, А. С. Математические методы и модели исследования операций : учебник / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. – 7-е изд. – Москва : Дашков и К°, 2019. – 398 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. –

URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=573373> (дата обращения: 04.09.2023). – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-394-02736-9. – Текст : электронный.