

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна
Должность: проректор по учебной работе
Дата подписания: 10.11.2022 16:40:56
Уникальный программный ключ:
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Локтионова
«15» 02 2021 г.



**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ
ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ТОЧЕЧНЫХ
ОТОБРАЖЕНИЙ ПУНККАРЕ**

Методические указания для студентов направлений
подготовки 09.03.01 и 09.04.01

Курск 2021

УДК 534.1

Составитель Ж.Т. Жусубалиев

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *Ю. А. Халин*

Математическое моделирование нелинейных импульсных систем методом точечных отображений Пуанкаре: методические указания для студентов направлений подготовки 09.03.01 и 09.04.01 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Ж.Т. Жусубалиев. – Курск, 2021. – 23 с.: ил.5. – Библиогр.: с. 23.

Описываются методы математического моделирования импульсных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с разрывными правыми частями. Предназначены для студентов направлений подготовки 09.03.01, 09.04.01 очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать XX.XX.2021. Формат 60 × 84^{1/16}.
Усл. печ. л. 1,34. Уч.-изд. л. 1,2. Тираж 50 экз. Заказ 455. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. Цель работы

Изучение методов математического моделирования нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью.

2. Постановка задачи

Будем рассматривать два класса нелинейных импульсных систем, поведение которых описывается дифференциальными уравнениями с разрывными правыми частями.

Начнем с математических моделей в виде дифференциальных уравнений с аддитивно входящими в правую часть обобщенными функциями в виде слагаемых[1]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{b}_k \delta(t - t_k), \quad \mathbf{x}, \mathbf{f}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Здесь δ — дельта-функция Дирака, $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$. В теории обобщенных функций $\delta(t) = \eta'(t)$, где η — функция Хевисайда:

$$\eta(t) = 0 \quad (t < 0), \quad \eta(t) = 1 \quad (t > 0).$$

Все решения уравнения (1) — это функции, которые в промежутках $t_k < t < t_{k+1}$ абсолютно непрерывны и удовлетворяют уравнению

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}),$$

а в точках $t = t_k$ имеют скачки, равные

$$\mathbf{x}(t_k^+) - \mathbf{x}(t_k^-) = \mathbf{b}_k, \quad \mathbf{x}(t_k^\pm) = \lim_{t \rightarrow t_k^\pm} \mathbf{x}(t). \quad (2)$$

Доказательство условия (15) приводится ниже.

3. Математическая модель гибридной системы управления

3.1. Математическая с непрерывным временем

Рассмотрим в качестве примера систему управления с амплитудно-частотно-импульсной модуляцией первого рода [2-5], поведение которой опи-

сывается скалярным уравнением вида:

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \delta(t - t_k), \quad f(x) = -\lambda x, \quad \lambda > 0. \quad (3)$$

Моменты импульсации t_k в (3) определяются [2-5]

$$t_{k+1} = t_k + \Phi(x(t_k^-)), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\Phi(x)$ — неубывающая функция (частотная модуляционная характеристика).

Величины b_k в правой части (3) находятся как [2-5]

$$b_k = F(x(t_k^-)), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $F(x)$ — невозрастающая функция (амплитудная модуляционная характеристика).

Функции Φ , F являются ограниченными и принимают положительные значения. В качестве модуляционных функций Φ , F в [2-5] выбрана функция Хилла:

$$\Phi(x) = k_1 + k_2 \frac{(x/r)^p}{1 + (x/r)^p}, \quad F(x) = k_3 + \frac{k_4}{1 + (x/r)^p},$$

где $p = 1, 2, \dots$ — показатель функции Хилла, определяющая крутизну модуляционных характеристик; k_1, k_2, k_3, k_4, r — параметры, которые принимают положительные значения. На рис. 1 показаны примеры функций $\Phi(x)$, $F(x)$ при разных значениях p .

Как мы отмечали ранее, решение уравнения (3) кусочно-непрерывно с конечными разрывами в точках t_k , $k \geq 0$ (см. рис. 2).

Предложение 1. *Величины скачков в точках разрыва $t = t_k$ определяются выражением*

$$x(t_k^+) - x(t_k^-) = b_k.$$

Доказательство. В области $t_{k-1} < t < t_{k+1}$ уравнение (3) записывается в форме

$$\dot{x} = -\lambda x + b_k \delta(t - t_k). \quad (4)$$

Решение уравнения (4) в промежутке $t_{k-1} < t < t_{k+1}$ будем искать в виде

$$x(t) = x_-(t) + [x_+(t) - x_-(t)]\eta(t - t_k), \quad (5)$$

где $x_{\pm}(t)$ — непрерывные функции, определенные соответственно в областях $t_{k-1} < t < t_k$ и $t_k < t < t_{k+1}$ и удовлетворяющие уравнению $\dot{x} = -\lambda x$.

Подставляя (5) в (4) и учитывая что $\eta'(t - t_k) = \delta(t - t_k)$, имеем

$$\begin{aligned} \dot{x}_-(t) + [\dot{x}_+(t) - \dot{x}_-(t)]\eta(t - t_k) + [x_+(t) - x_-(t)]\delta(t - t_k) = \\ = -\lambda x_-(t) - \lambda[x_+(t) - x_-(t)]\eta(t - t_k) + b_k\delta(t - t_k). \end{aligned}$$

Поскольку $\dot{x}_{\pm}(t) = -\lambda x_{\pm}(t)$, то

$$\{x(t_k^+) - x(t_k^-) - b_k\}\delta(t - t_k) = 0, \quad x(t_k^{\pm}) = \lim_{t \rightarrow t_k \pm 0} x_{\pm}(t).$$

Приравнивая нулю выражение в фигурных скобках, найдем

$$x(t_k^+) - x(t_k^-) = b_k.$$

Прежде чем продолжить, сделаем небольшое отступление. Трехмерный вариант математической модели (3) был предложен в [2] для описания регуляции тестостерона в мужском организме.

Известно, что в регуляции уровня *тестостерона* (Te) в мужском организме основную роль играют *лютеинизирующий гормон* (LH, luteinizing hormone) и *гонадотропин релизинг гормон* (GnRH, gonadotropin-releasing hormone). В отличие от Te, который генерируется в мужских половых органах (тестикулах), LH и GnRH генерируются в отделах головного мозга, соответственно в гипофизе и гипоталамусе. Поэтому динамика LH и GnRH тесно связана с динамикой нейронов мозга. При этом GnRH стимулирует секрецию LH, в свою очередь LH стимулирует секрецию Te, а Te подавляет секрецию GnRH и LH [3].

Как отмечается в [3], с точки зрения импульсной теории управления клетки гипоталамуса, генерирующие GnRH, можно рассматривать как импульсный элемент (импульсный модулятор), осуществляющий амплитудно-частотную модуляцию. При этом уровень Te выступает в качестве модулирующего сигнала, а уровень GnRH — в качестве модулированного импульсного сигнала. С увеличением уровня Te импульсы появляются реже, а их амплитуда (или площадь) уменьшается. Что касается наблюдаемого импульсного процесса секреции LH, то его можно рассматривать как реакцию непрерывной части системы на импульсный сигнал, поступающий от гипоталамуса [3].

В работах [2-5] исследуется трехмерная модель

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} = -b_1x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = -b_2x_2 + g_1x_1, \\ \frac{dx_3}{dt} = -b_3x_3 + g_2x_2. \end{aligned} \tag{6}$$

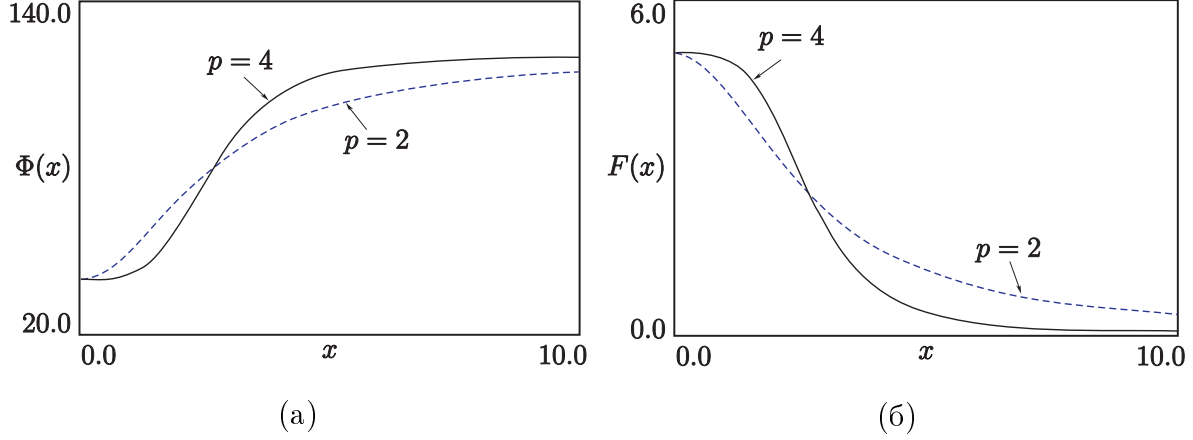


Рис. 1. Модуляционные характеристики $\Phi(x)$, $F(x)$ при разных значениях показателей p функции Хилла: (а) — частотная модуляционная характеристика $\Phi(x)$; (б) амплитудная модуляционная характеристика $F(x)$

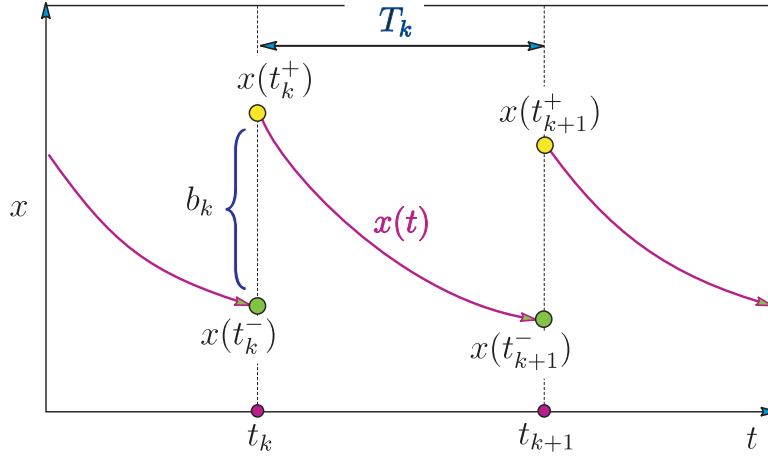


Рис. 2. Решение уравнения (7), где t_k и t_{k+1} — точки разрывов

Здесь x_1 — концентрация GnRH; x_2 , x_3 — концентрации LH и Te, соответственно. Переменная $x_1(t)$ претерпевает скачки в моменты времени t_k , $k \geq 0$

$$x_1(t_k^+) = x_1(t_k^-) + \lambda_k, \quad t_{k+1} = t_k + T_k, \quad \lambda_k = F(x_3(t_k^-)), \quad T_k = \Phi(x_3(t_k^-)).$$

Уравнение(3) является скалярной версией модели (6).

3.2. Отображение Пуанкаре

Запишем уравнение (3) в эквивалентной форме [6]

$$\dot{x} = -\lambda x. \tag{7}$$

Здесь $x(t)$ имеют скачки в моменты времени t_k , $k \geq 0$:

$$x(t_k^+) = x(t_k^-) + b_k, \quad t_{k+1} = t_k + T_k, \quad b_k = F(x(t_k^-)), \quad T_k = \Phi(x(t_k^-)).$$

В дальнейшем будем предполагать непрерывность $x(t)$ слева от точек разрыва $t = t_k$. В промежутках между точками разрыва (в интервалах непрерывности)

$$t_k < t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

уравнение (7) имеет вид

$$\dot{x} = -\lambda x,$$

решение которого с начальным условием $x(t_k) = x(t_k^+)$ находится

$$x(t) = e^{-\lambda(t-t_k^+)} x(t_k^+).$$

Отсюда для $t = t_{k+1}^+$

$$x(t_{k+1}^-) = e^{-\lambda(t_{k+1}-t_k^+)} x(t_k^+) \quad (8)$$

или

$$x(t_{k+1}^-) = e^{-\lambda T_k} x(t_k^+), \quad T_k = \Phi(x(t_k^-)),$$

где $x(t_k^+)$ (см. рис. 2):

$$x(t_k^+) = x(t_k^-) + b_k, \quad b_k = F(x(t_k^-)).$$

Подставляя выражение для $x(t_k^+)$ в (8), получим

$$x(t_{k+1}^-) = e^{-\lambda T_k} (x(t_k^-) + b_k), \quad T_k = \Phi(x(t_k^-)), \quad b_k = F(x(t_k^-)). \quad (9)$$

Обозначим $x_k = x(t_k^-)$. Тогда отображение Пуанкаре, порождаемое уравнением (7), записывается [6]

$$x_{k+1} = e^{-\lambda T_k} (x_k + b_k), \quad T_k = \Phi(x_k), \quad b_k = F(x_k), \quad (10)$$

$$\Phi(x_k) = k_1 + k_2 \frac{(x_k/r)^p}{1 + (x_k/r)^p}, \quad F(x_k) = k_3 + \frac{k_4}{1 + (x_k/r)^p}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (3) с разрывным решением сводится к гладкому отображению (10).

4. Системы Филиппова

В этом разделе рассмотрим математические модели, относящиеся к системам Филиппова [1].

В качестве иллюстративного примера рассмотрим математическую модель системы управления с широтно-импульсной модуляцией, непрерывная линейная часть которой описывается передаточной функцией

$$W(s) = \frac{\mathcal{K}}{T \cdot s + 1}. \quad (11)$$

4.1. Математическая модель с непрерывным временем

Состояние системы с передаточной функцией (11), описывается дифференциальным уравнением с разрывной правой частью

$$T \frac{dy}{dt} + y = \mathcal{K} \cdot K_F(\xi), \quad (12)$$

где T , \mathcal{K} – постоянная времени и коэффициент передачи объекта; $K_F(\xi)$, ξ – выходной и входной сигналы модулятора, соответственно.

Импульсы K_F формируются методом широтно-импульсной модуляции первого рода (ШИМ-1):

$$K_F(\xi) = \frac{1}{2}[1 + \text{sign}(\xi)],$$

$$\xi = \alpha(V_3 - \beta y(k \cdot a)) - V_0(t/a - [t/a]), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где a – период модуляции, $[\cdot]$ – функция, выделяющая целую часть аргумента, V_3 – сигнал задания, α – коэффициент усиления, β – чувствительность датчика обратной связи, V_0 – опорный сигнал модулятора.

Параметры: $T = 10^{-4}$ с; $a = 2 \cdot 10^{-5}$ с; $V_3 = 4.0$ В; $V_0 = 4$ В; $4 < \mathcal{K} < 10$ А; $\beta = 1.0$ В/А; $\alpha > 0$.

Введем обозначения безразмерное время $\tau = t/a$ и безразмерную динамическую переменную $x = \frac{y}{\mathcal{K}}$. Тогда уравнение движения (12) можно записать в форме

$$\dot{x} = \lambda(x - K_F), \quad K_F = \frac{1}{2}[1 + \text{sign}(\varphi(\tau)|_{\tau=[\tau]} - \eta(\tau))], \quad (13)$$

$$[\tau] = k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \varphi(\tau) = q - x(\tau),$$

$$\eta(\tau) = \frac{P}{\alpha}(\tau - [\tau]), \quad \lambda = -\frac{a}{T}, \quad q = \frac{V_3}{\beta \cdot \mathcal{K}}, \quad P = \frac{V_0}{V_3}q.$$

4.2. Получение дискретного отображения

Исследование динамической системы (13) можно свести к стробоскопическому отображению Пуанкаре.

В пределах интервала $k < \tau < k + 1$

$$K_F = \begin{cases} 1, & k < \tau < \tau_k; \\ 0, & \tau_k < \tau < k + 1, \end{cases}$$

где τ_k – момент переключения, который при ШИМ-1 определяется как:

$$\tau_k = \begin{cases} k, & q - x_k < 0; \\ k + 1, & q - x_k > \frac{P}{\alpha}; \\ \frac{\alpha(q - x_k)}{P} + k, & 0 < q - x_k < \frac{P}{\alpha}. \end{cases} \quad (14)$$

Пусть $k < \tau < \tau_k$, тогда $K_F = 1$ и уравнение (13) принимает вид

$$\dot{x} = \lambda(x - 1).$$

Решение этого уравнения с условием $x(k) = x_k$:

$$x(t) = e^{\lambda(\tau-k)} \left(x_k - \lambda \int_k^\tau e^{-\lambda(s-ka)} ds \right). \quad (15)$$

Найдем

$$\int_k^\tau e^{-\lambda(s-ka)} ds = \frac{1 - e^{-\lambda(\tau-k)}}{\lambda}. \quad (16)$$

Подставив (16) в (15), получим

$$x(\tau) = 1 + e^{\lambda(\tau-k)}(x_k - 1).$$

Отсюда для $\tau = \tau_k$ имеем:

$$x(\tau_k) = 1 + e^{\lambda(\tau_k-k)}(x_k - 1).$$

В интервале $\tau_k < \tau < k + 1$ сигнал на выходе модулятора $K_F = 0$ и уравнение (13) принимает вид

$$\dot{x} = \lambda x, \quad x(\tau_k) = 1 + e^{\lambda(\tau_k-k)}(x_k - 1), \quad (17)$$

решение которого

$$x(\tau) = x(\tau_k)e^{\lambda(\tau-\tau_k)}.$$

Подставляя выражение для $x(\tau_k)$, получаем

$$x(\tau) = e^{\lambda(\tau-k)}(x_k - 1) + e^{\lambda(\tau-\tau_k)}.$$

Для момента времени $\tau = k + 1$ имеем:

$$x_{k+1} = e^{a\lambda}(x_k - 1) + e^{\lambda(k+1-\tau_k)}. \quad (18)$$

Введем обозначение

$$z_k = \tau_k - k,$$

где z_k – относительная длительность импульса (коэффициент заполнения).

Покажем, что $0 \leq z_k \leq 1$.

Действительно, из неравенства $k \leq \tau_k \leq k + 1$ следует, что

$$k \leq \tau_k \leq k + 1.$$

Отсюда

$$0 \leq \tau_k - k \leq (k + 1) - k$$

и

$$0 \leq \tau_k - k \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq z_k \leq 1.$$

Окончательно отображение, порождаемое уравнением движения (13), принимает вид:

$$x_{k+1} = e^\lambda(x_k - 1) + e^{\lambda(1-z_k)} \equiv Q(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

Коэффициент заполнения импульсов z_k определяется в соответствии с алгоритмом (14):

$$z_k = \begin{cases} 0, & x_k > q, \\ 1, & x_k < q - P/\alpha, \\ \frac{\alpha(q - x_k)}{P}, & q - P/\alpha \leq x_k \leq q. \end{cases} \quad (20)$$

Итерация отображения (19) осуществляется в два шага:

- сначала по x_k вычисляется z_k в соответствии с алгоритмом (20);
- затем полученный z_k подставляется в (19) для расчета x_{k+1} .

Отображение (19) можно переписать в виде

$$x_{k+1} = Q(x_k), \quad Q(x) = \begin{cases} Q_{\mathcal{L}}(x) = e^\lambda x + 1 - e^\lambda, & x \leq s^-, \\ Q_{\mathcal{M}}(x) = e^\lambda x - e^\lambda + e^{\lambda(1-z)}, & s^- < x < s^+, \\ Q_{\mathcal{R}}(x) = e^\lambda x, & x \geq s^+, \end{cases}$$

где $z = \frac{\alpha}{P} \cdot (q - x)$, $s^- = q - P/\alpha$, $s^+ = q$.

Как мы видим, в отличие от (10) отображение (19) является кусочно-гладким и непрерывным.

5. Бифуркационный анализ

Теперь мы переходим к решению задач бифуркационного анализа.

5.1. Неподвижные точки и циклы дискретных отображений

Рассмотрим одномерное дискретное отображение

$$x_{k+1} = Q(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (21)$$

где $Q()$ — гладкая функция. Точку x_{k+1} называют *образом* ранга 1 (rank-1 image) точки x_k , а x_k — *прообразом* (preimage) x_{k+1} .

Орбитой дискретной системы (21) называется последовательность точек $x_0, x_1 = Q(x_0), \dots, x_k = Q(x_{k-1}), \dots$

Точка x^0 называется *неподвижной*, если

$$x^0 = Q(x^0), \quad (22)$$

т.е. удовлетворяет уравнению

$$x = Q(x).$$

В дискретной системе (21) *периодической орбитой* или *циклом* периода m называется конечное множество точек

$$x_0, \quad Q(x_0), \quad Q^2(x_0), \dots, Q^m(x_0) = x_0. \quad (23)$$

Каждая точка этого множества является неподвижной точкой m -й итерации Q^m функции Q , т.е. удовлетворяет уравнению:

$$Q^m(x) = x, \quad Q^m(x) = \underbrace{Q(Q(\dots Q(x) \dots))}_{m \text{ раз}} \quad (24)$$

5.2. Устойчивость неподвижных точек и циклов

Начнем с анализа устойчивости неподвижной точки x^0 .

Введем малое отклонение (возмущение) от неподвижной точки x^0 : $x_k = x^0 + \varepsilon_k$, где ε_k — малое число.

Тогда возмущенное движение в окрестности x^0 описывается уравнением

$$x^0 + \varepsilon_{k+1} = Q(x^0 + \varepsilon_k).$$

После разложения $Q(x)$ в ряд Тейлора в окрестности x^0 получим:

$$x^0 + \varepsilon_{k+1} = Q(x^0) + \frac{\partial Q(x^0)}{\partial x} \varepsilon_k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q(x^0)}{\partial x^2} \varepsilon_k^2 + \dots \quad (25)$$

Отбросив нелинейные члены ряда, задачу можно свести к исследованию линеаризованного отображения

$$\varepsilon_{k+1} = \frac{\partial Q(x^0)}{\partial x} \varepsilon_k. \quad (26)$$

Неподвижная точка x^0 называется *гиперболической*, если $\left| \frac{\partial Q(x^0)}{\partial x} \right| \neq 1$. Ко-

эффициент $\rho = \frac{\partial Q(x^0)}{\partial x}$ называется мультипликатором неподвижной точки.

Для гиперболических неподвижных точек отображений существует теорема *Хартмана-Гробмана*:

Теорема Хартмана-Гробмана. Пусть $\mathbf{Q} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет непрерывную первую производную. Тогда в некоторой окрестности \mathcal{D} гиперболической неподвижной точки \mathbf{x}^0 ($\mathbf{x}^0 = \mathbf{Q}(\mathbf{x}^0)$, $\mathbf{x}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$) существует гомеоморфизм φ , взаимно однозначно отображающий траектории исходной системы на траекторию линеаризованной системы.

Таким образом, для гиперболических неподвижных точек отображений устойчивость по отношению к бесконечно малым и малым конечным возмущениям $\varepsilon = x - x^0$ определяется свойствами линеаризованного отображения (26).

Неподвижная точка x^0 устойчива, когда

$$|\rho| < 1, \quad \text{т.е.} \quad -1 < \frac{\partial Q(x^0)}{\partial x} < 1.$$

В этом случае в малой окрестности точки x^0 по теореме Хартмана-Гробмана траектория отображения (21) эквивалентна траектории линейного отображения

$$x_{k+1} - x^0 = \frac{\partial Q(x^0)}{\partial x} (x_k - x^0) \Rightarrow x_{k+1} = \rho x_k + c, \quad c = (1 - \rho)x^0.$$

Это означает, что поведение последовательности $\varepsilon_k = x_k - x^0$ в малой окрестности x^0 соответствует сходящейся геометрической прогрессии

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^0,$$

если $|\rho| < 1$.

Неподвижная точка x^0 неустойчива при $|\rho| > 1$, когда геометрическая прогрессия оказывается расходящейся.

Неподвижная точка теряет устойчивость, когда $\frac{\partial Q(x^0)}{\partial x} = \pm 1$.

Понятие гиперболичности и теорема *Хартмана-Гробмана* естественным образом обобщается на на цикл любого конечного периода m .

Цикл периода m устойчив, когда мультипликатор ρ_m

$$\rho_m = \left| \prod_{k=1}^m \frac{\partial Q(x_k)}{\partial x} \right| < 1$$

Как мы отмечали ранее, этому циклу отвечает m устойчивых неподвижных точек $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ отображения

$$x_{k+1} = Q^m(x_k), \quad Q^m(x) = \underbrace{Q(Q(\dots Q(x)\dots))}_{m \text{ раз}}. \quad (27)$$

Порядок анализа устойчивости Рассмотрим задачу об устойчивости неподвижной точки и цикла.

1. Найти неподвижные точки из решения уравнения

$$x = Q(x). \quad (28)$$

Для цикла периода m :

$$x = Q^m(x), \quad Q^m(x) = \underbrace{Q(Q(\dots Q(x)\dots))}_{m \text{ раз}}. \quad (29)$$

Уравнения (28), (29) решаются численно.

2. Пусть x^0 — неподвижная точка, то есть корень уравнения (28). Вычислить мультипликатор $\rho = \frac{\partial Q(x^0)}{\partial x}$ неподвижной точки x^0 .

3. Проверить выполнение неравенства $|\rho| < 1$: если $|\rho| < 1$, то x^0 — устойчива; если $|\rho| > 1$, то x^0 — неустойчива.

4. Для цикла достаточно найти одну неподвижную точку отображения (27), т.е. один корень уравнения (29). Тогда мультипликатор ρ_m цикла периода m

$$\rho_m = \prod_{k=1}^m \frac{\partial Q(x_k)}{\partial x}$$

рассчитывается по алгоритму:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Q(x_k), \\ \rho_{k+1} = \frac{\partial Q(x_k)}{\partial x} \rho_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad x_0 = x^*, \quad \rho_0 = 1. \end{cases} \quad (30)$$

Здесь x^* — корень уравнения (29). Орбита $x_1, x_2, \dots, x_m = x_0$, рассчитанная рекуррентно по (30) при $x_0 = x^*$ — это и есть цикл периода m .

Пример

Найти неподвижные точки отображения

$$x_{k+1} = (\lambda - 1)x_k - \lambda x_k^3 \equiv Q(\lambda, x_k),$$

$$0 < \lambda < 4, \quad -1 < x_k < 1$$

и исследуйте их устойчивость в зависимости от параметра λ .

В этом примере мы рассматриваем задачу об устойчивости неподвижной точки, допускающей аналитическое решение.

Решение

1. Неподвижные точки удовлетворяют уравнению

$$x = (\lambda - 1)x - \lambda x^3 \equiv Q(\lambda, x)$$

или

$$x = Q(\lambda, x), \quad \lambda x^3 - (\lambda - 2)x = 0.$$

Это уравнение имеет три корня: $x_1^0 = 0$, $x_{2,3}^0 = \pm \sqrt{1 - \frac{2}{\lambda}}$.

2. Найдем производную

$$\frac{\partial Q(\lambda, x)}{\partial x} = \lambda - 1 - 3\lambda x^2. \tag{31}$$

2.1. Подставив $x_1^0 = 0$ в (31), получим мультипликатор ρ_1 первой неподвижной точки x_1^0 : $\rho_1 = \lambda - 1$.

Из неравенства

$$|\rho_1| < 1$$

находим область устойчивости x_1^0 : $0 < \lambda < 2$.

2.2. Неподвижные точки $x_{2,3}^0$ существуют только при $\lambda \leq 2$. Мультипликаторы $\rho_{2,3}$:

$$\rho_2 = \rho_3 = \lambda - 1 - 3\lambda x^2 \Big|_{x=x_{2,3}^0} = -2\lambda + 5$$

Из условия $|\rho_{2,3}| < 1$ находим область устойчивости $x_{2,3}^0$: $2 < \lambda < 3$.

6. Бифуркационные условия

Пусть отображение зависящее от параметра λ вида

$$x_{k+1} = Q(\lambda, x_k)$$

имеет при $\lambda = \lambda_0 = 0$ неподвижную точку $x^0 = 0$. Здесь $Q(\lambda, x)$ — гладкая по x функция.

Строгое доказательство приводимых далее бифуркационных условий можно найти в специальной литературе (см., например, [7]).

А. Касательная бифуркация (fold or tangent bifurcation)

- Пусть при $\lambda = \lambda_0 = 0$

$$\frac{\partial Q(\lambda_0, x^0)}{\partial x} = +1$$

и выполнены условия

$$\frac{\partial Q(\lambda_0, x^0)}{\partial \lambda} \neq 0, \quad \frac{\partial f^2(\lambda_0, x^0)}{\partial x^2} \neq 0.$$

Тогда при $\lambda = \lambda_0$ имеет место касательная бифуркация [7].

Б. Транскритическая бифуркация (transcritical bifurcation)

- Пусть

$$\frac{\partial Q(\lambda_0, x^0)}{\partial x} = +1$$

и

$$\frac{\partial Q(\lambda_0, x^0)}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial Q^2(\lambda_0, x^0)}{\partial x \partial \lambda} \neq 0, \quad \frac{\partial Q^2(\lambda_0, x^0)}{\partial x^2} \neq 0.$$

Тогда при $\lambda = \lambda_0$ имеет место транскритическая бифуркация.

В. Вилообразная бифуркация (pitchfork bifurcation)

- Пусть

$$\frac{\partial Q(\lambda_0, x^0)}{\partial x} = +1$$

и

$$\frac{\partial Q(\lambda_0, x^0)}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial f^2(\lambda_0, x^0)}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial Q^2(\lambda_0, x^0)}{\partial x \partial \lambda} \neq 0, \quad \frac{\partial Q^3(\lambda_0, x^0)}{\partial x^3} \neq 0.$$

Тогда при $\lambda = \lambda_0$ имеет место вилообразная бифуркация.

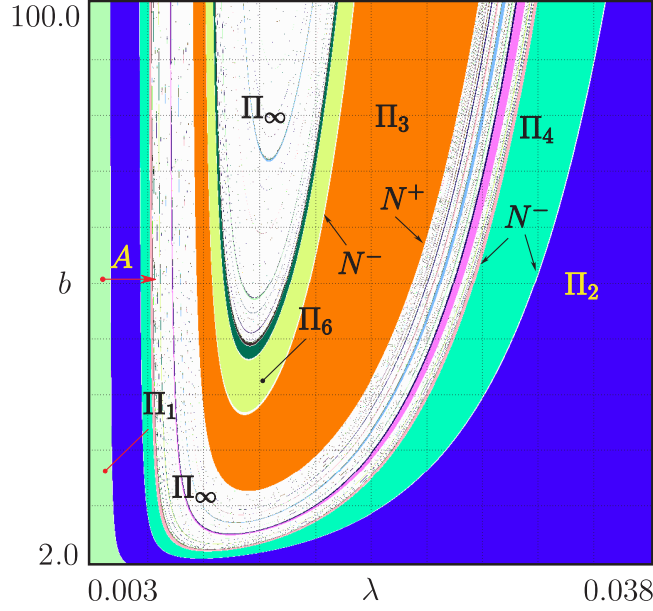


Рис. 3. Двупараметрическая бифуркационная диаграмма на плоскости (λ, b) при $p = 4$ [6]. Здесь Π_i , $i = 1, 2, 3, 4, 6$ — области устойчивости циклов периода i и Π_∞ — области хаотической динамики, где N^+ , N^- — линии касательной (fold, tangent) бифуркации и бифуркации удвоения периода, соответственно

Г. Бифуркация удвоения периода (flip or period-doubling bifurcation)

- Пусть при $\lambda = \lambda_0$

$$\frac{\partial Q(\lambda_0, x^0)}{\partial x} = -1.$$

и пусть

$$\frac{\partial Q^2(\lambda_0, x^0)}{\partial x \partial \lambda} \neq 0, \quad \frac{1}{2} \left[\frac{\partial Q^2(\lambda_0, x^0)}{\partial x^2} \right]^2 + \frac{1}{3} \frac{\partial Q^3(\lambda_0, x^0)}{\partial x^3} \neq 0.$$

Тогда при $\lambda = \lambda_0$ имеет место бифуркация удвоения периода [7].

7. Пример бифуркационного анализа

В этом раздел мы опишем бифуркационные явления в системе управления с амплитудно-частотно-импульсной модуляцией. Настоящий раздел написан по материалам нашей публикации [6].

Рассмотрим дискретное отображение (10)

$$x_{k+1} = Q(x_k), \quad Q(x) = e^{-\lambda\Phi(x)} (x + F(x)),$$

$$\Phi(x) = k_1 + k_2 \frac{(x/r)^p}{1 + (x/r)^p}, \quad F(x) = k_3 + \frac{k_4}{1 + (x/r)^p}.$$

Пусть параметры динамической системы (10) имеют следующие значения: $k_1 = 40$, $k_2 = 80$, $k_3 = 0.0001b$, $k_4 = 5b$, где $2 < b < 100$, $r = 2.7$, $p = 4$, $0.003 < \lambda < 0.038$. В качестве варьируемых выберем λ и b .

Неподвижные точки удовлетворяют уравнению

$$x = Q(x)$$

или

$$x = e^{-\lambda\Phi(x)} (x + F(x)),$$

которое решалось численно.

Пусть x^0 — неподвижная точка отображения (10). Мультипликатор неподвижной точки

$$\rho = \frac{\partial Q(x^0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q(x)}{\partial x} = -\lambda\Phi'(x)e^{-\lambda\Phi(x)}(x + F(x)) + e^{-\lambda\Phi(x)}(1 + F'(x)).$$

На рис. 3 изображена двухпараметрическая бифуркационная диаграмма на плоскости параметров (λ, b) , построенная численно [6]. Через Π_k , $k = 1, 2, 3, 4, 6$, обозначены области устойчивости цикла периода k , а через Π_∞ — области с хаотической динамикой. Области Π_k $k = 1, 2, 4$ разделены бифуркационными кривыми удвоения периода N^- (flip). Бифуркационные линии N^- сгущаются и существуют трансверсальные им линии, вдоль которых происходят каскады бифуркации удвоения периода. Область Π_3 снаружи ограничена кривой касательной бифуркации (fold) N^+ .

На рис. 4(а) приведена бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая переход к хаосу через бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода. Такую диаграмму довольно просто построить на компьютере. Для этого надо рассчитать несколько тысяч итераций отображения. Первые 1000—5000 значений x_k оставить в «тени», а остальные, например 1500—2000 значений, отложить на плоскости (λ, x) . Первые члены следует отбросить с тем, чтобы исключить переходный процесс. Циклу периода 1 (неподвижной точке) будет соответствовать одна точка, циклу периода 2 — две точки на одной вертикали, циклу периода 4 — четыре и т.д.

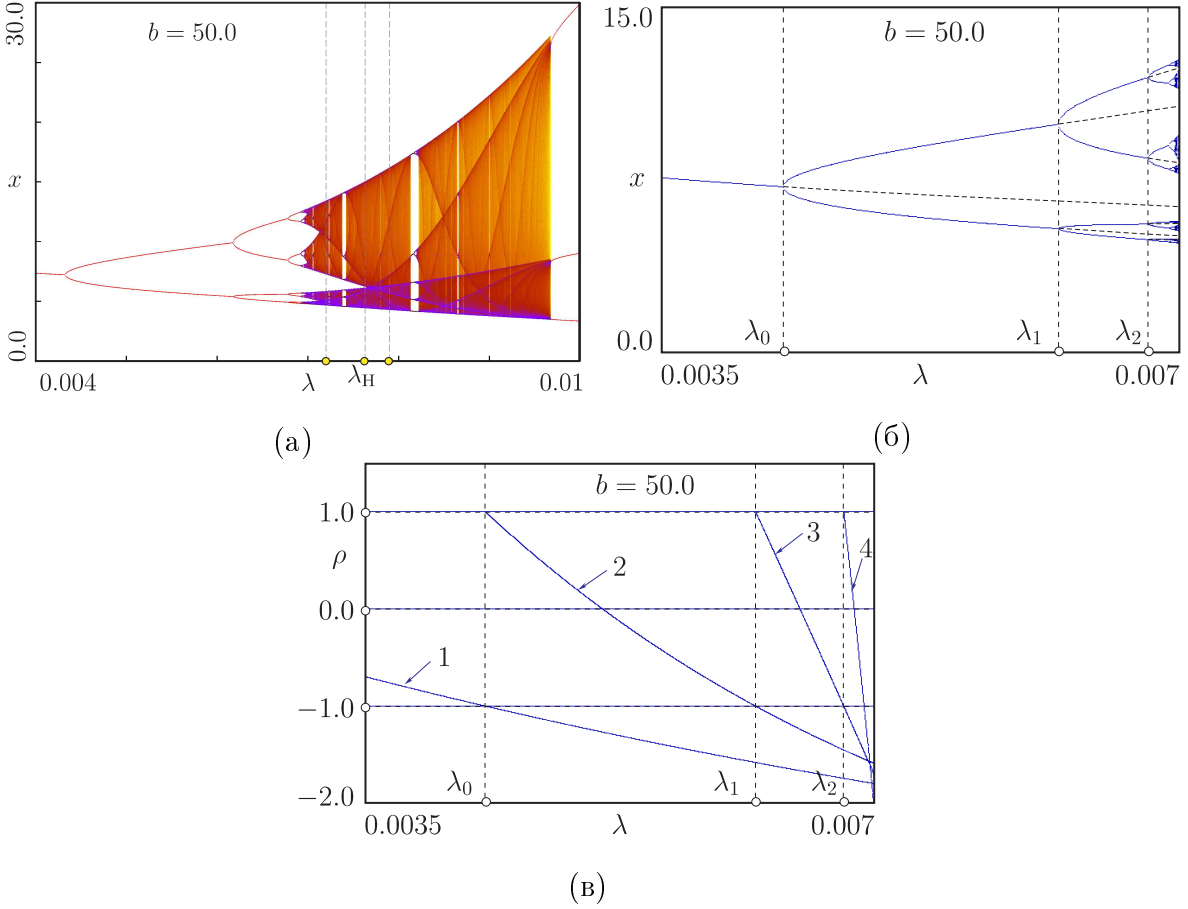


Рис. 4. (а) Переход к хаосу через бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода. (б) Последовательность четырех бифуркаций удвоения периода [6]. Пунктирные линии соответствуют неустойчивым циклам. (в) Зависимости мультипликаторов циклов периода m , $m = 1, 2, 4, 8$. Цифрами 1, 2, 3, 4 обозначены мультипликаторы 1-, 2-, 4-, и 8-циклов, соответственно [6]

На рис. 4(б), приведены результаты численных расчетов устойчивых и неустойчивых 1-, 2-, 4- и 8-циклов [6]. Пунктирные линии бифуркационной диаграммы отвечают неустойчивым циклам. На рис. 4(в), приведены зависимости мультипликаторов 1-, 2-, 4- и 8-циклов от параметра λ , обозначенные цифрами 1, 2, 3, 4, соответственно, при бифуркациях удвоения периода. Как можно видеть из рис. 4(б), переходе через точку λ_0 , когда мультипликатор обращается в -1 ($\rho = -1$) при $\lambda = \lambda_0$, неподвижная точка (или 1-цикл) теряет устойчивость. В результате этого мягко возникает устойчивый 2-цикл, а 1-цикл продолжает существовать, но становится неустойчивым. Родившийся цикл периода 2 при дальнейшем увеличении λ теряет устойчивость через бифуркацию удвоения периода в точке λ_1 и возникает цикл периода 4. Изменяя далее значение параметра λ , можно увидеть циклы периода 8, 16, 32, 64 и т.д. При этом каждый раз цикл теряет устойчивость, когда мультиплика-

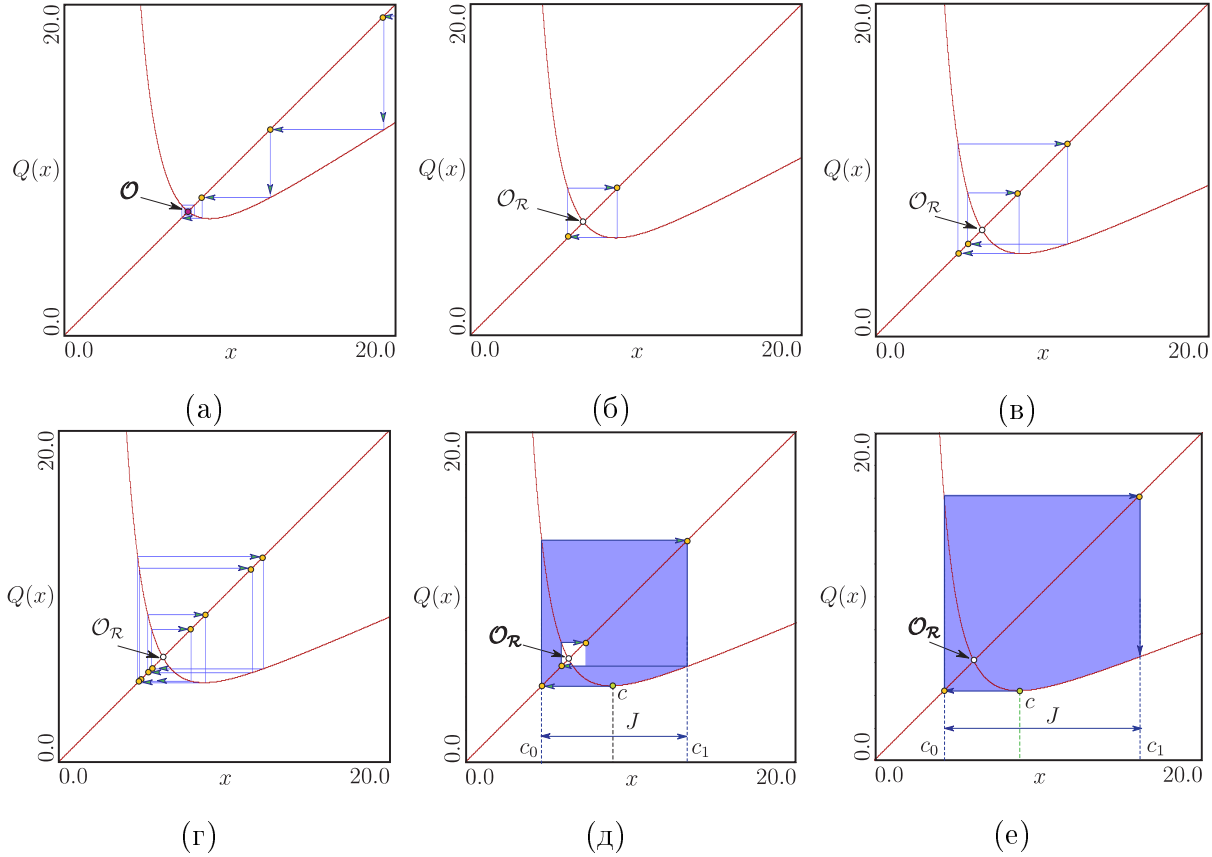


Рис. 5. Итерационные диаграммы: (а) — устойчивая неподвижная точка (цикл периода 1); (б)–(г) — устойчивые 2-, 4- и 8- циклы, соответственно; (д), (е) — однополосный и двухполосный хаотические аттракторы. Здесь O , O_R — устойчивая и неустойчивая неподвижные точки

тор цикла обращается в -1 . Потеря устойчивости приводит к возникновению устойчивого цикла удвоенного периода. Наконец, при некотором значении параметра динамика становится хаотичной [6].

На рис. 5 (а) приведена итерационная диаграмма в области значений λ , когда мультипликатор устойчивой неподвижной точки меняет знак с «+» ($0 < \rho < 1$) на «-» ($-1 < \rho < 0$) перед бифуркацией удвоения периода в точке $\lambda = \lambda_0$. а На рис. 5 (б)-(г) изображены итерационные диаграммы 2-, 4-, 8-циклов, соответственно, а на рис. 5 (д),(е) — хаотических аттракторов.

Точка c на рис. 5 (д),(е) — называется *критической точкой*, определяемая условием $Q'(x) = 0$. Для (10) точка c — точка локального экстремума (минимума) функции $Q(x)$. Точка $c_0 = Q(c)$ называется образом ранга 1 критической точки c , а точки $c_1 = Q^2(c)$, $c_2 = Q^3(c)$ — соответственно образами ранга 2 и 3. Мы не будем обсуждать роль критических точек в бифуркационных переходах, а ограничимся лишь краткими комментариями. За подробностями отсылаем к специальным источникам (см., например, [8]).

Точки c_0, c_1 — определяют «размеры» хаотических аттракторов, изображенных на рис. 5 (д),(е). Область J на рис. 5 (д),(е) называется поглощающим инвариантным интервалом (invariant absorbing interval) $Q(J) = J$ [8]. Переход от двухполосного хаотического аттрактора (рис. 5 (д)) к однополостному (рис. 5 (е)) происходит через гомоклиническую бифуркацию [9] в точке λ_H на рис. 4(а), когда $Q^3(c) = \mathcal{O}_R$. В точке $\lambda = \lambda_H$ возникает так называемая *критическая гомоклиническая орбита* (critical homoclinic orbit) неподвижной точки \mathcal{O}_R [8].

Лабораторные работы

Лабораторная работа №1.

Бифуркации дискретных отображений

Для для отображений

$$x_{k+1} = ax_k - x_k^3, \quad x_{k+1} = \frac{(1+a)x_k}{1+ax_k}, \quad x_{k+1} = ax_k e^{-x_k} :$$

1. найдите неподвижные точки аналитически как функции параметра a ;
2. определите мультипликаторы в форме явной зависимости от параметра a ;
3. определите значения параметра a , отвечающие возможным бифуркациям;
4. проверьте выполнение бифуркационных условий;
5. подтвердите результаты аналитических исследований численными расчетами бифуркационных и итерационных диаграмм.

Для расчета итерационных диаграмм можно использовать программу <http://math.colgate.edu/math312/Spring1999/iterate.html>.

Указание: *Чтобы применить бифуркационные условия, приведенные в разделе 6., надо переписать отображения, поместив точку бифуркации (бифуркационное значение параметра) и неподвижную точку в начало координат.*

Лабораторная работа №2.

Дискретные модели гибридных систем

1. Рассмотрите уравнение

$$\dot{x} = -\lambda x, \quad x(t_k^+) = x(t_k^-) + F(x(t_k^-)), \quad t_{k+1} = t_k + \Phi(x(t_k^-)), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

1.1. Постройте отображение в форме

$$x_{k+1} = Q(x_k), \quad x_k = x(t_k^+), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\text{т.е. } x(t_{k+1}^+) = Q(x(t_k^+)), \quad x(t_k^+) = x(t_k^-) + F(x(t_k^-)), \quad t_{k+1} = t_k + \Phi(x(t_k^-)).$$

1.2. Рассчитайте бифуркационную диаграмму для $p = 4$, $b = 50.0$ и $0.0042 < \lambda < 0.0086$. Сравните с диаграммой, приведенной на рис. 4(а). Объясните, будут ли различия в динамике.

1.3. Составить алгоритм численного расчета неподвижной точки и анализа ее локальной устойчивости. Постройте итерационные диаграммы для ситуаций $0 < \rho < 1$, $-1 < \rho < 0$, $\rho < -1$. Объясните наблюдаемую динамику.

2. Исследовательская задача.

Лабораторная работа №3.

Исследование бифуркаций в гибридных и импульсных системах

1. Рассмотрите отображение

$$x_{k+1} = Q(x_k), \quad Q(x) = e^{-\lambda\Phi(x)} (x + F(x)),$$

$$\Phi(x) = k_1 + k_2 \frac{(x/r)^p}{1 + (x/r)^p}, \quad F(x) = k_3 + \frac{k_4}{1 + (x/r)^p}.$$

1.2. Рассчитайте бифуркационную диаграмму для $p = 3$, $b = 40.0$ и $0.003 < \lambda < 0.03$. Объясните наблюдаемую динамику.

1.3. Составить алгоритм численного расчета цикла периода-1 и анализа локальной устойчивости. Найдите численно порог рождения 2-цикла через бифуркацию удвоения периода. Проиллюстрируйте переход на итерационных диаграммах.

2. Исследовательская задача.

Лабораторная работа №4.

Кусочно-гладкие дискретные модели импульсных систем

Рассмотрите модель системы управления с амплитудно-частотно-импульсной модуляцией

$$\dot{x} = -\lambda x.$$

Здесь $x(t)$ имеют скачки в моменты времени t_k , $k \geq 0$:

$$x(t_k^+) = x(t_k^-) + b \cdot F(x(t_k^-)), \quad t_{k+1} = t_k + \Phi(x(t_k^-)),$$

где $F(x)$, $\Phi(x)$ кусочно-линейные функции [3]:

$$F(x) = \begin{cases} F_1, & 0 \leq x < \Delta_1, \\ -a_F x + b_F, & \Delta_1 \leq x < \Delta_2, \\ F_2, & x > \Delta_2, \end{cases} \quad \Phi(x) = \begin{cases} \Phi_1, & 0 \leq x < \Delta_1, \\ -a_\Phi x + b_\Phi, & \Delta_1 \leq x < \Delta_2, \\ \Phi_2, & x > \Delta_2. \end{cases}$$

$$a_F = \frac{F_2 - F_1}{\Delta_2 - \Delta_1}, \quad a_\Phi = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta_2 - \Delta_1}, \quad b_F = \frac{F_1 \Delta_2 - F_2 \Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1}, \quad b_\Phi = \frac{\Phi_1 \Delta_2 - \Phi_2 \Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1}.$$

Параметры: $\Delta_1 = 1.5$; $\Delta_2 = 4$; $F_1 = 3.0$; $F_2 = 5.0$; $\Phi_1 = 60.0$; $\Phi_2 = 100.0$; $1 < b < 10$; $0.003 < \lambda < 0.038$.

1. Постройте математическую модель в форме кусочно-гладкого отображения [9,10].

$$x_{k+1} = Q(x_k), \quad x_k = x(t_k^-), \quad Q(x) = \begin{cases} Q_{\mathcal{L}}(x), & 0 \leq x < \Delta_1, \\ Q_{\mathcal{M}}(x), & \Delta_1 \leq x < \Delta_2, \\ Q_{\mathcal{R}}(x), & x > \Delta_2, \end{cases}$$

где $Q_{\mathcal{L}}$, $Q_{\mathcal{M}}$, $Q_{\mathcal{R}}$ — гладкие функции.

2. Составьте алгоритм расчета периодического режима с одним импульсом на периоде.

3. Составьте алгоритм исследования локальной устойчивости периодического режима с одним импульсом на периоде.

4. Определите характер потери устойчивости. Проиллюстрируйте решение задачи на итерационных диаграммах.

5. Рассчитайте бифуркационную диаграмму при вариации λ . Объясните, что происходит при насыщении модулятора.

Лабораторная работа №5.

Дискретные модели широтно-импульсных систем

1. Постройте стробоскопическое отображение для математической модели системы управления с широтно-импульсной модуляцией второго рода (ШИМ-2), непрерывная линейная часть которой описывается передаточной функцией (11). Описание ШИМ-2 и методика получения отображения приведены в [9,10]. Параметры те же самые, что и для модели (12) системы с ШИМ-1.

2. Составьте алгоритм расчета периодического режима с одним импульсом на периоде (1-цикла или неподвижной точки отображения).

3. Составьте алгоритм исследования локальной устойчивости периодического режима с одним импульсом на периоде. Рассчитайте область устойчивости 1-цикла по коэффициенту усиления α .

4. Рассчитайте бифуркационную диаграмму при вариации коэффициента усиления α . Определите, как меняется динамика при потере устойчивости 1-цикла. Проиллюстрируйте переход на итерационных диаграммах.

Библиографический список

1. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.— М.: Наука.

2. *Churilov A., Medvedev A., Shepeljavyi A.* Mathematical model of non-basal testosterone regulation in the male by pulse modulated feedback//Automatica. 2008. Vol. 45(1). P. 78 – 85.

3. *Медведев А.В., Чурилов А.Н., Шепелявый А.И.* Математические модели регуляции тестостерона// Стохастическая оптимизация в информатике. 2006. Том 2. С. 147 – 158.

4. *Zhusubaliyev Zh.T., Churilov A.N., Medvedev F.* Bifurcation phenomena in an impulsive model of non-basal testosterone regulation//Chaos. 2012. Vol. 22(1). P. 013121-1 – 013121-11.

5. *Churilov A.N., Medvedev F. Zhusubaliyev Zh.T.* Impulsive Goodwin oscillator with large delay: Periodic oscillations, bistability, and attractors// Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2016. Vol. 21. P. 171 – 183.

6. *Zhusubaliyev Zh.T., Churilov A.N., Medvedev F.* Complex dynamics and chaos in a scalar linear continuous system with impulsive feedback//Proceedings of the American Control Conference (ACC2012). 2012. P.2419 – 2424.

7. *Kuznetsov Yu. A.* Elements of Applied Bifurcation Theory.— New York: Springer-Verlag, 2004.

8. *Avrutin V., Schenke B., Gardini L.* Calculation of homoclinic and heteroclinic orbits in 1D maps//Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. V.22. P.1201 – 1214 (статья в открытом доступе согласно лицензии BY-NC-ND: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>).

9. *Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E.* Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. — Singapore: World Scientific, 2003.

10. *Жусубалиев Ж. Т.* Бифуркации и хаотическая динамика в импульсных системах: учебное пособие/ Ж. Т. Жусубалиев, В. Г. Рубанов, В. С. Титов, О. О. Яночкина. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2017. - 143 с.