МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебное работе
_____________ О.Г. Локтионова
« 15 » 02 _____________ 2021

Введение в моделирование на основе сетей Петри

Методические указания
по выполнению лабораторной работы по дисциплине
«Основы комплексной автоматизации
проектирования ЭВМ»
для студентов направления подготовки 09.03.01
Информатика и вычислительная техника

Курск 2021 г.

УДК 004.94
Составители: С.В. Дегтярев, Е.Н. Иванова

Рецензент
Доцент кафедры программной инженерии,
кандидат технических наук
Ю.А. Халин

Введение в моделирование на основе сетей Петри: методические указания по выполнению лабораторной работы / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: С.В. Дегтярев, Е.Н. Иванова. — Курск, 2021. — 18 с.: ил. 2. — Библиограф.: с. 15.

Рассматриваются способы описания сетей Петри и представление их функционирования. Теоретический материал сопровождается примерами.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утвержденной учебно-методическим объединением по направлению Информатика и вычислительная техника.

Предназначены для студентов направления 09.03.01 Информатика и вычислительная техника очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 15.02.2021 . Формат 60x84 1/16.
Усл.печ.л. 1,1 . Уч.-изд.л. 1,0 . Тираж 20 экз. Заказ 362 . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. Цель

Изучение принципов построения сетей Петри. Приобретение практических навыков описания вычислительных систем и их функционирования сетями Петри.

2. Сети Петри

Одним из инструментов моделирования дискретных процессов, протекающих в вычислительных системах (ВС), являются сети Петри и их модификации. Аппарат сетей Петри позволяет описывать параллельные, асинхронные, иерархические процессы достаточно простыми средствами. Математическая модель описываемого сетью Петри процесса достаточно наглядна, легко алгоритмизируема для моделирования на ЭВМ.

Сети Петри имеют алгебраическую и графическую формы. Графическое представление сетей нашло большое применение в силу его наглядности и простоты. Процесс функционирования ВС или технологического процесса отображается как изменения маркировки сети Петри, представляющей данную ВС или технологический процесс. Маркировка сети изменяется согласно ряду правил, в результате чего сеть переходит из некоторого начального (заданного) состояния в некоторое конечное, определяемое либо исследователем, либо невозможностью продолжения имитации в сложившейся в сети маркировки.

Моделирование сетями Петри применяют для различных целей:
— изучения процессов, протекающих в ВС, на предмет их реализуемости;
— изучения проблем, связанных с использованием ограниченного количества ресурсов ВС для выполнения параллель-

ных действий;
— определения пропускной способности ВС;
— определения «узких мест» в ВС;
— получения статистик по загрузке оборудования и т.д.

Сеть Петри — это математическая модель дискретных динамических систем (параллельных программ, операционных систем, ЭВМ и их устройств, сетей ЭВМ), ориентированная на качественный анализ и синтез таких систем (обнаружение блокировок, тупиковых ситуаций и узких мест, автоматический синтез параллельных программ и компонентов ЭВМ и др.).

Формально сеть Петри (PetriNet — PN) определяется как набор элементов (кортеж):

$$PN = \{\Theta, P, T, F, M_0\},$$

где $\Theta = \{\theta = 0, 1, 2, \ldots\}$ — множество дискретных моментов времени;
$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ — непустое множество элементов сети, называемых позициями (местами);
$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ — непустое множество элементов сети, называемых переходами.

Множества позиций и переходов не пересекаются $P \bigcap T = \oslash$.
F — функция инцидентности,
$F : (P \times T) \bigcup (T \times P) \to \{0, 1, 2, \ldots, k, \ldots\}$, здесь k — кратность дуги;
M_0 — начальная маркировка позиций: $M_0 : P \to \{0, 1, 2, \ldots\}$. Каждая позиция $p_i \in P$ может содержать некоторый целочисленный ресурс $\mu(p) \geq 0$, часто отображаемый соответствующим числом точек (фишек) внутри позиции. Вектор $M = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ называют маркировкой (разметкой) сети Петри. Каждая маркировка это отображение $M : P \to \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Начальная маркировка M_0 определяет стартовое состояние сети Петри.

3. Способы задания сетей Петри

3.1. Графический способ

Формальное определение сети Петри полностью определяет ее функционирование. Однако при решении конкретных инженерных задач удобнее и нагляднее графическое представление этих сетей. Графическим изображением сети Петри является двудольный ориентированный граф с двумя типами вершин: вершины p_i из множества P изображают обычно кружками, а вершины $t_j \in T$ — планками. Дуги графа могут быть направлены от кружков только к планкам, а от планок — только к кружкам, так что любая позиция может быть входной или (и) выходной позицией одного или нескольких переходов.

Множества входных и выходных позиций перехода $t_j \in T$ будем обозначать через $I(t_j)$ и $O(t_j)$, соответственно. Аналогично, запись $I(p_i)$ и $O(p_i)$ будет служить обозначением множеств переходов, являющихся соответственно входом и выходом данной позиции.

На рисунке 1 представлена сеть Петри, в которой семь позиций $P = \{p_1,\, p_2,\, \ldots,\, ,\, p_7\}$, пять переходов $T = \{t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_5\}$, которая может быть описана следующим образом:

$$\begin{array}{ll}
I(t_1) = \{p_1,\, p_2\} & O(t_1) = \{p_3,\, p_4\} \\
I(t_2) = \{p_3\} & O(t_2) = \{p_3,\, p_6\} \\
I(t_3) = \{p_3,\, p_6\} & O(t_3) = \{p_5,\, p_6\} \\
I(t_4) = \{p_4\} & O(t_4) = \{p_7\} \\
I(t_5) = \{p_7\} & O(t_5) = \{p_2\}
\end{array}$$

или

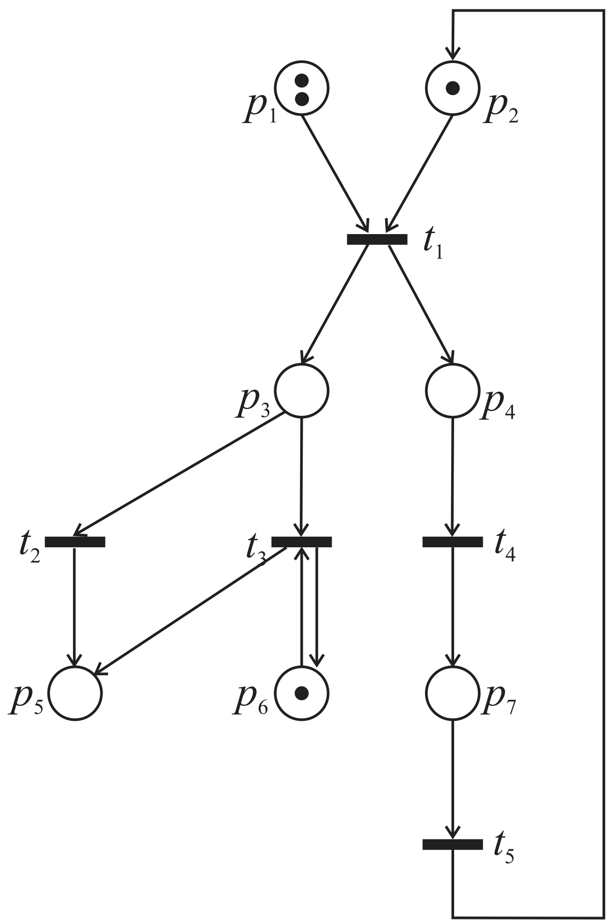


Рисунок 1 – Граф сети Петри

$I(p_1) = \{\varnothing\} \qquad O(p_1) = \{t_1\}$
$I(p_2) = \{t_5\} \qquad O(p_2) = \{t_1\}$
$I(p_3) = \{t_1\} \qquad O(p_3) = \{t_2, t_3\}$
$I(p_4) = \{t_1\} \qquad O(p_4) = \{t_4\}$
$I(p_5) = \{t_2, t_3\} \qquad O(p_5) = \{\varnothing\}$
$I(p_6) = \{t_3\} \qquad O(p_6) = \{t_3\}$
$I(p_7) = \{t_4\} \qquad O(p_7) = \{t_5\}$

Допускается существование кратных дуг от одной вершины сети к другой. Сеть Петри является ориентированным двудольным мультиграфом.

Позиция сети Петри соответствет условию. Выполнение условий отмечается маркировкой позиций, так что позиция сети Петри содержит метку, если сопоставленное с ней условие выполняется и не содержит метки в противном случае.

3.2. Аналитический способ

Сеть Петри $PN = \{P, T, K, F\}$ может быть задана множествами P, T и отображением
$F: ((P \times T) \cup (T \times P)) \longrightarrow K$

Пусть заданы конечные множества $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ и $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$. Из определения сетей Петри и функциональных правил F следует, что $Q = P \times T$ и $R = T \times P$. Сеть Петри на рисунке 1 может быть задана множествами вершин:
$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\}$;
$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$
и множествами дуг:
$Q = \{(p_1, t_1), (p_2, t_1), (p_3, t_2), (p_3, t_3), (p_4, t_4), (p_6, t_3), (p_7, t_5)\}$;
$R = \{(t_1, p_3), (t_1, p_4), (t_2, p_5), (t_3, p_5), (t_3, p_6), (t_4, p_7), (t_5, p_2)\}$.

3.3. Матричный способ

Сеть Петри моежт задаваться с помощью двух матриц инцидентности Q и R. Каждая матрица имеет n столбцов (n — число вершин позиций) и k строк (k — число вершин переходов). Элементами матриц являются нули и единицы, отражающие значения соответствующих элементов, заданные выражениями:

$$Q = |q_{js}| = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{in} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{k1} & q_{k2} & \cdots & q_{kn} \end{pmatrix};$$

$$R = |r_{js}| = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{in} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{k1} & r_{k2} & \ldots & r_{kn} \end{pmatrix}.$$

Элемент q_{ij}, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен единице, если имеется дуга от вершины позиции p_j к вершине перехода t_i, и равен нулю в противном случае. Элемент r_{ij}, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен единице, если имеется дуга от вершины перехода t_i к вершине позиции p_j и равен нулю, если в сети Петри дуга от t_i к p_j отсутствует.

Сеть Петри, представленная на рисунке 1, будет задана следующим образом:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом если сеть Петри PN задана одним из описанных выше способов (графическим, аналитическим или матричным), можно перейти к любому другому способу задания, а результаты, полученные с помощью одного, можно интерпретировать для другого. Наиболее часто сети Петри задаются графическим способом, отражая наглядность, полноту и однозначность решаемой задачи.

4. Функционирование сетей Петри

Представление сети Петри в виде двудольного графа позволяет задать структуру сети Петри статически. Динамика в модель вносится механизмом смены маркировки (разметки) позиций и соглашением о правиле срабатывания (реализации) переходов. Начальная маркировка приписывает некоторым позициям сети Петри некоторые целые числа (в том числе нуль). На графе маркировка задается так: в соответствующих кружках рисуют определенное число (жирных) точек, носящих название маркеров (фишек).

Передвижение маркеров по сети Петри осуществляется посредством срабатывания ее переходов. Сработать может только возбужденный (возможный) переход, т.е. такой переход $t_k \in T$, во всех входных позициях $I(t_k)$ которого содержится хотя бы по одному маркеру (для каждого перехода t_k и для каждой позиции $p_s \in I(t_k)$ число маркеров $M_s \geq 1$, где $M_s = M(p_s)$). Срабатывание перехода может произойти через любой конечный промежуток времени после возбуждения перехода. Переход $t_j \in T$ может сработать (может быть запущен) при маркировке , если для всех $p_i \in I(t_j)$ выполняется условие $\mu_i(\theta) - f_{ij}^{p}(\theta) \geq 0$, т.е. если каждая входная позиция для данного перехода $p_i \in P$ содержит как минимум столько фишек, какова кратность ведущей к t_j дуги. Результатом срабатывания является изъятие из всех входных позиций сработавшего перехода по одному маркеру и добавление во все его выходные позиции по одному маркеру.

Срабатывание перехода считается неделимым актом, т.е. предполагается, что изъятие маркеров из всех входных позиций и их перемещение во все выходные позиции осуществляется мгновенно, с нулевой задержкой.

Срабатывание какого-либо возбужденного перехода в общем случае вызывает смену маркировки сети Петри. При этом может измениться только маркировка входных и выходных позиций возбужденного перехода. Маркировка позиций, являющихся одновременно входными и выходными для данного перехода, после срабатывания его не изменяется.

Текущая маркировка сети Петри может пониматься как состояние сети Петри в данный момент времени. Срабатывание возбужденного перехода, являющееся локальным актом, в общем случае ведет к изменению маркировки сети, а, следовательно, ее глобального (полного) состояния.

В результате срабатывания перехода t_j в момент времени θ маркировка $M(\theta)$ сменяется маркировкой $M(\theta+1)$ по правилу: $\mu_i(\theta+1) = \mu_i(\theta) - f_{ij}^p(\theta) + f_{ji}^t(\theta)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, $i \in P^j$, $j \in T^i$.

Сеть Петри функционирует, переходя от одной маркировки к другой в результате срабатывания возбужденных переходов. Таким образом, можно считать, что динамика поведения сети Петри (ее функционирования во времени) может быть адекватно описана тройкой:

$S = \langle M_0, \rightarrow, M_D \rangle$,

где M_0 — начальная маркировка;

$\rightarrow$ — отношение непосредственного следования маркировок. Запись $M_A \rightarrow M_B$ означает, что за маркировкой M_A непосредственно следует маркировка M_B;

M_D — множество допустимых маркировок (состояний) сети Петри, достижимых из M_0.

Маркировка может изображаться вектором $M = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$, число компонент которого равно числу позиций сети Петри, а значение i-й компоненты, $i = \overline{1, n}$, есть натуральное число $\mu_i = M(p_i)$ — число маркеров в позиции.

Чтобы переход сработал, необходимо наличие маркеров во всех входных позициях, равное кратности дуг, ведущих из этих позиций. После срабатывания маркеры из входных позиций удаляются, а во всех выходных позициях появляются в количестве, равном кратности дуг ведущих в эти позиции.

Для сети Петри на рисунке 1 начальная маркировка $M_0 = (2, 1, 0, 0, 0, 1. 0)$. При начальной маркировке имеется один возбужденный переход — t_1. После его срабатывания изымается по одному маркеру из входных позиций p_1 и p_2, а в выходные позиции p_3 и p_4 добавляется по одному маркеру. Таким образом, из начальной маркировки $M_0 = (2, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$ непосредственно следует маркировка $M_1 = (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0)$: $M_0 \rightarrow M_1$.При маркировки M_1 возбуждены переходы t_2, t_3 и t_4. При срабатывании t_2 или t_3 будет достигнута одна и та же маркировка $M_3 = (1, 0, 0, 1, 1, 1, 0)$, при срабатывании t_4 — маркировка $M_4 = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)$.

Для задания динамики поведения сети Петри обычно используют так называемые диаграммы достижимых состояний (маркировок). Диаграмма представляет собой орграф, вершины которого — достижимые маркировки из множества M_D, а дуги направлены из M_A в M_B, если имеет место $M_A \to M_B$ ($M_A \to M_A$ означает наличие петли). Дуги помечают обозначениями тех переходов, срабатывание которых является причиной смены маркировки.

Диаграмма на рисунке 2 соответствует сети Петри, изображенной на рисунке 1. Пометки вида $(t_2 \vee t_3) \wedge t_4$ в данном случае означают, что одновременно срабатывает одна из пар (t_2, t_4) или (t_3, t_4) переходов. Диаграмма отражает возможный параллелизм процесса, представимого сетью Петри. Множество допустимых маркировок (состояний) в данном случае состоит из 16 маркировок, причем из выделенной начальной маркировки M_0 достижима лишь одна результирующая (тупиковая) маркировка $M_T = (0, 1, 0, 0, 2, 1, 0)$, из которой сеть Петри никогда не выходит, что гарантирует однозначное завершение процесса.

При выполнении сети Петри получается две последовательности: последовательность маркировок $\{M_0, M_1, M_2, \ldots\}$; последовательность запущенных переходов $\{t_{j0}, t_{j1}, t_{j2}, \ldots\}$.

В дереве маркировок могут встречаться повторяющиеся маркировки. В этом случае дальнейшее построение дерева ведется только для одной из них. Если выделить путь по дугам графа маркировок, начинающийся в вершине M_0 и заканчивающийся в различных вершинах и выписать подряд все встречающиеся символы переходов, то полученное слово образует последовательность срабатываний сети, а их совокупность свободный язык сети Петри. Так, язык сети Петри,

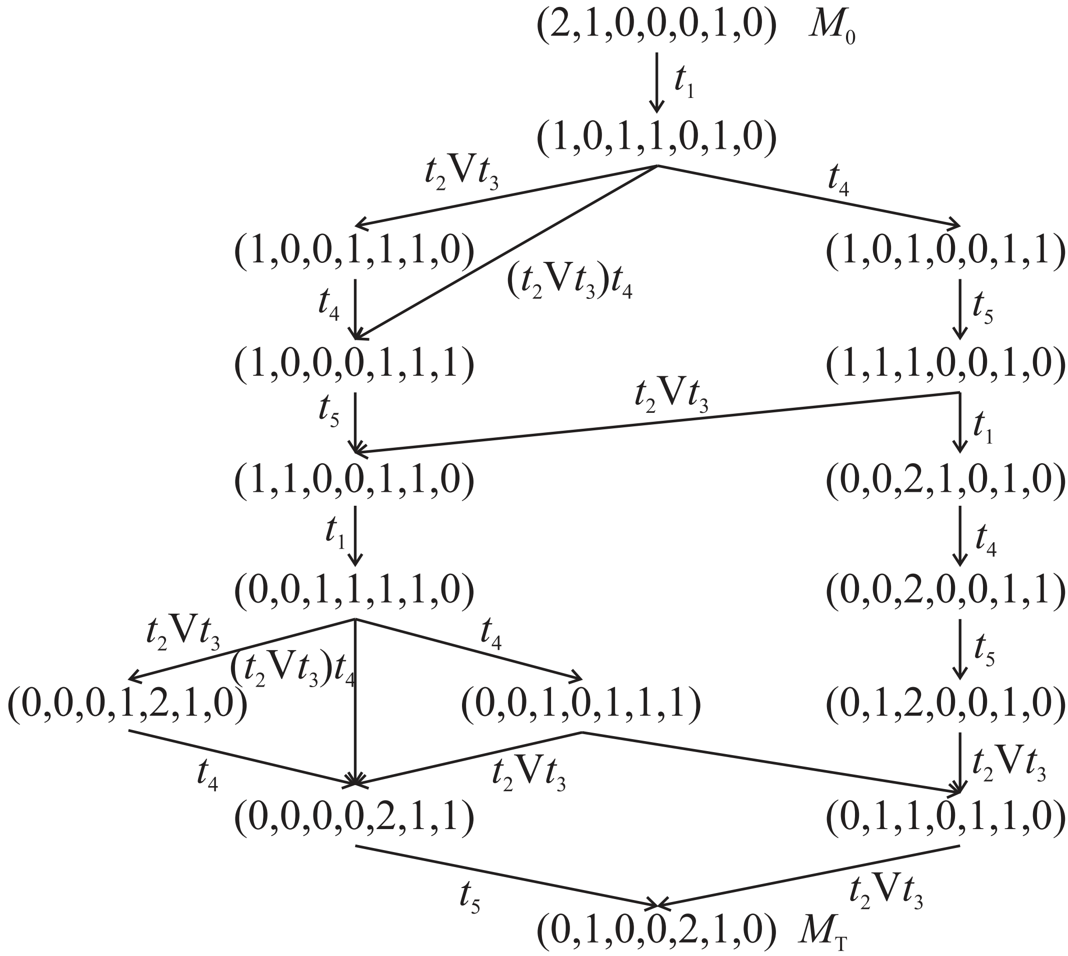


Рисунок 2 – Диаграмма дерева маркировок сети Петри

представленной на рисунке 1, включает слова
$\{\lambda, t_1, t_4, t_5, t_1, t_4, t_5, t_2. t_2\}$

В общем случае, одной начальной маркировке могут соответствовать несколько результирующих маркировок. Достижение каждой из них возможно при определенных распределениях скоростей срабатываний переходов. В некоторых позициях сетей возможно накопление бесконечного числа маркеров, тогда множество допустимых состояний может не быть конечным. В сети Петри может и не существовать тупиковых маркировок; такого рода сетями моделируются циклические или автономные процессы.

Если в результате запуска перехода при маркировке M образуется новая маркировка M', то маркировка M' достижима из M.

5. Основные своейства сетей Петри

Свойство ограниченности (не более 1 фишки). Позиция p_i в сети $PN = \{\Theta, P, T, F, M_0\}$ называется ограниченной, если для любой достижимой в сети маркировки M существует такое k, что $\mu_i \leq k$. Сеть PN называется ограниченной, если все ее позиции ограничены. Для обозначения неограниченной маркировки используется специальный символ ω.

Свойство безопасности. Сеть PN называется безопасной, если при любой достижимой маркировке $\mu_i \leq 1$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, в безопасной сети вектор маркировок состоит только из нулей и единиц (является двоичным словом).

Свойство консервативности. Сеть называется консервативной, если сумма фишек во всех позициях остается постоянной при работе сети:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\theta), \ \theta = 0, 1, \ldots.$$

Свойство живости (будет живая) — свойство переходов. Переход t_j в сети $PN = \{\Theta, P, T, F, M_0\}$ называется потенциально живым, если существует достижимая из M_0 маркировка M', при которой t_j может сработать. Если t_j является потенциально живым при любой достижимой в PN маркировке, то он называется живым. Переход t_j, не являющийся потенциально живым при начальной маркировке M_0, называется мертвым при этой маркировке. Маркировка M_0 в этом случае называется t_j–тупиковой. Если маркировка M_0 является t_j–тупиковой для всех $j = \overline{1, m}$, то она называется тупиковой. При тупиковой маркировке не может сработать ни один переход. На дереве маркировок тупиковая маркировка является листом.

Переход называется устойчивым, если никакой другой переход не может лишить его возможности сработать при наличии для этого необходимых условий.

Последовательность маркировок $M_0, M_1, \ldots, M_p$, в которой $M_{k+1} = \delta(M_k)$, $k = \overline{0, p}$ образует цикл, если $M_0 = M_p$. Каждому циклу соответствует последовательность слов свободного языка сети Петри.

6. Порядок выполнения работы

Варианты заданий студент получает у преподавателя.

1. Описать сеть Петри, заданную графом, используя аналитический и матричный способ.

2. Для заданной начальной маркировки сети Петри составить дерево маркировок на глубину до 5 шагов. При обнаружении повторяющихся маркировок пометить ее M_{Pi}, где i — номер обнаруженной повторяющейся маркировки, при этом построение дерева продолжается только из одной из них. Циклические маркировки, т.е. повторяющиеся на одном пути в дереве, обозначаются M_{Ci}. Тупиковые маркировки обозначаются M_{Ti}

3. Выписать все полученные слова свободного языка PN, начиная с пустого слова.

4. Оценить свойства PN: ограниченность, консервативность, безопасность, живость.

5. Оформить отчет.

7. Содержание отчета

1. Цель работы.

2. Исходные данные для решения задачи.

3. Аналитическое и матричное описание заданной сети Петри PN.

4. Дерево маркировок с помеченными начальной, повторяющимися, циклическими, тупиковыми маркировками.

5. Все полученные слова свободного языка PN.

6. Свойства заданной сети Петри PN.

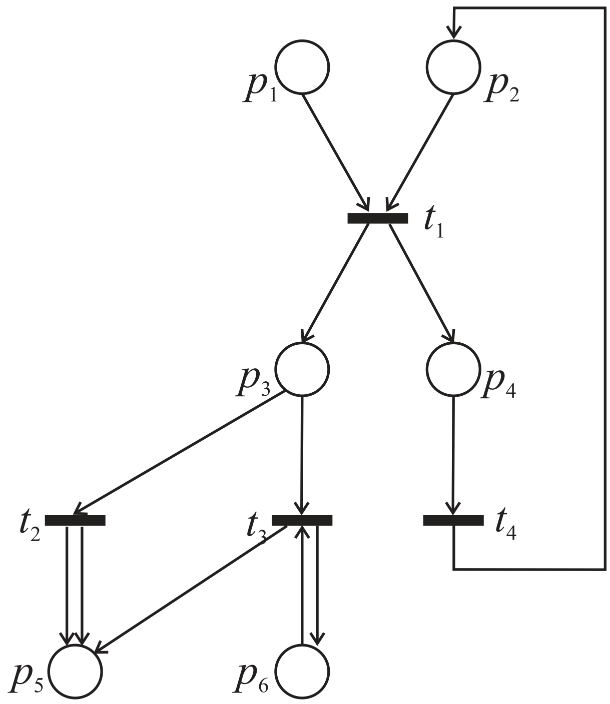
7. Выводы по результатам работы.

8. Список использованных источников

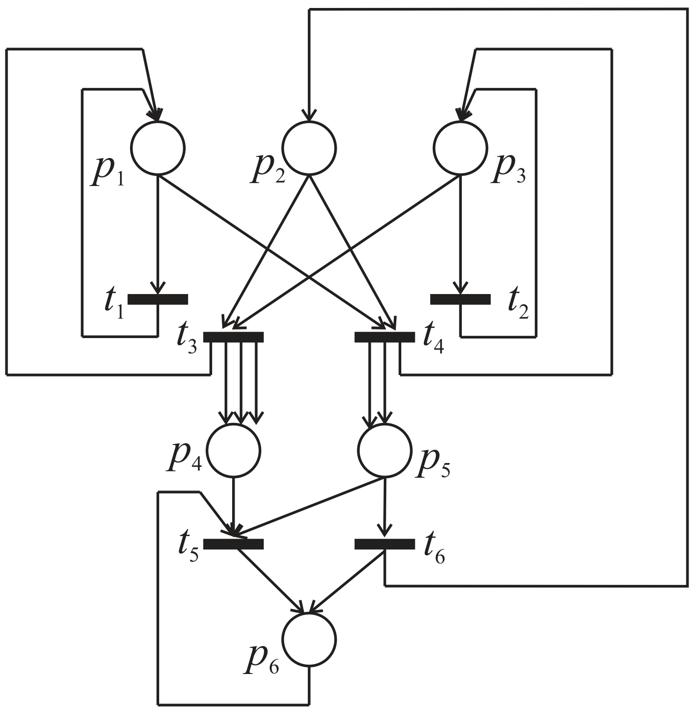
1. Проститенко, О.В. Моделирование дискретных систем на основе сетей Петри [Текст] : учебное пособие / О.В. Проститенко, В.И. Халимов, А.Ю. Рогов. — СПб : СПбГТИ(ТУ), 2017. — 69 с.
2. Васильев, В.В. Сети Петри, параллельные алгоритмы и модели мультипроцессорных систем [Текст] / В.В. Васильев, В.В. Кузьмук. — Киев : Наук. думка, 1990. — 216 с.

Варианты схем сети Петри

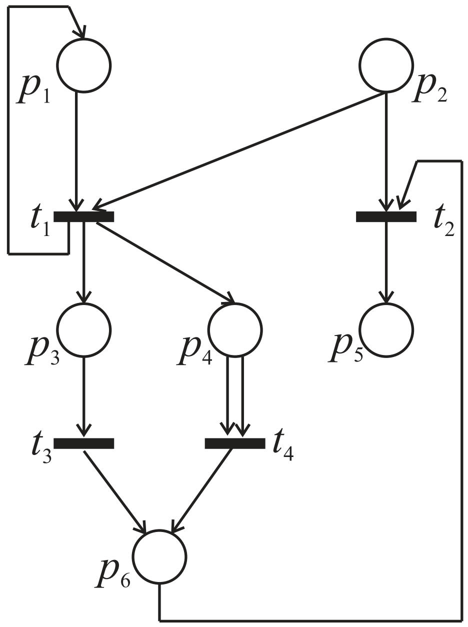
Вариант 1



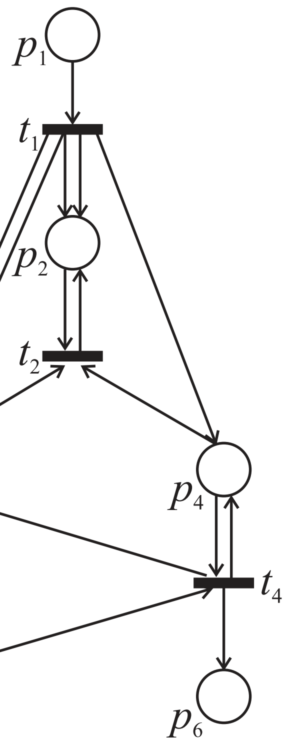
Вариант 2



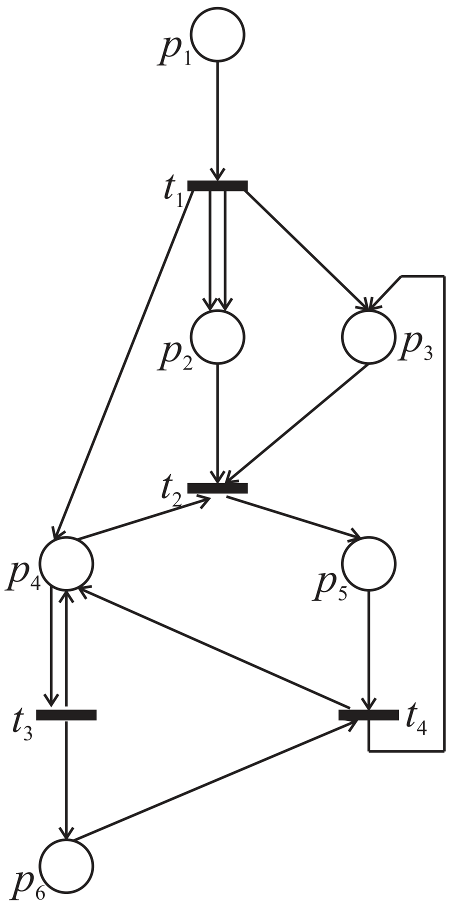
Вариант 3



Вариант 4



Вариант 5



Начальная разметка

вариант	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
1	2	0	2	3	1	0
2	3	0	2	0	1	2
3	2	1	0	2	0	1
4	1	2	1	0	2	0
5	3	1	0	0	1	1