МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_________ О.Г. Локтионова
«15» 02 ________ 2021 г.

БИФУРКАЦИИ В ОДНОМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Методические указания для студентов направлений
подготовки 09.03.01 и 09.04.01

Курск 2021

УДК 534.1
Составитель Ж.Т. Жусубалиев

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент *Ю. А. Халин*

Бифуркации в одномерных отображениях: методические указания для студентов направлений подготовки 09.03.01 и 09.04.01 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Ж.Т. Жусубалиев. – Курск, 2021. – 18 с.: ил.7. – Библиогр.: с. 18.

Описываются бифуркации в одномерных отображениях. Предназначены для студентов направлений подготовки 09.03.01, 09.04.01 очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . .2021. Формат **60 × 84 1/16**.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 50 экз. Заказ 458 . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. Цель работы

Закрепление знаний по теории бифуркаций в одномерных отображениях путем решения тестовых задач.

2. Устойчивость и гиперболичность неподвижных точек и циклов

- 1. Мы говорили на предыдущих занятиях о бифуркациях неподвижных точек отображений

  $$x_{k+1} = F(a, x_k),$$

  зависящих от одного параметра a.

- 2. Неподвижную точку находим из условия

  $$x = F(a, x) \quad \text{или} \quad F(a, x) - x = 0.$$

  Аналогично, цикл с периодом m удовлетворяет уравнению:

  $$x = \mathrm{g}(a, x), \quad \text{или} \quad \mathrm{g}(a, x) - x = 0,$$

  где

  $$\mathrm{g}(a, x) = F^m(a, x) = \underbrace{F(\cdots F(a, x)) \cdots)}_{m}.$$

  Тогда периодической орбите с периодом m (циклу с периодом m), состоящей из последовательности различных точек $x_0, x_1 = F(a, x_0), x_2 = F^2(a, x_0), ..., x_m = x_0$ будет соответсвовать m неподвижных точек отображения:

  $$x_{k+1} = \mathrm{g}(a, x_k), \quad \mathrm{g}(a, x) = \underbrace{F(F(\cdots F(a, x)...)) \cdots)}_{m}.$$

- 3. Неподвижные точки/циклы делятся на гиперболические и негиперболические.

- 4. Гиперболическая неподвижная точка $x_* = F(a, x_*)$ устойчива согласно теореме 1, когда

  $$\left|\frac{\partial F(a, x_*)}{\partial x}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow -1 < \frac{\partial F(a, x_*)}{\partial x} + 1$$

и неустойчива, если

$$\left|\frac{\partial F(a,x_*)}{\partial x}\right| > 1.$$

- 5. Гиперболический цикл с периодом m устойчив, когда

  $$\left|\frac{\partial F(a,x_1)}{\partial x}\cdot\frac{\partial F(a,x_2)}{\partial x}\cdot\ldots\cdot\frac{\partial F(a,x_m)}{\partial x}\right| < 1$$

  или

  $$\left|\prod_{k=1}^{m}\frac{\partial F(a,x_k)}{\partial x}\right| < 1.$$

  Напомним, что циклу с периодом m отвечает m неподвижных точек $x_1, x_2, ..., x_m$ отображения

  $$x_{k+1} = \mathrm{g}(a,x_k), \quad \mathrm{g}(a,x) = \underbrace{F(F(\cdots F(a,x))\cdots)...)}_{m}.$$

- 6. Величины ρ и ρ_m

  $$\rho = \frac{\partial F(a,x_*)}{\partial x} \quad \text{и} \quad \rho_m = \prod_{k=1}^{m}\frac{\partial F(a,x_k)}{\partial x}$$

  называются мульипликаторами неподвижной точки x_* и цикла с периодом m, соответственно.

- 7. Необходимо обратить внимание на то обстоятельство, что неподвижная точка x_* отображения $x_{k+1} = F(a,x_k)$ есть цикл с периодом $m = 1$.

- 8. Неподвижная точка x_* называется негиперболической, если

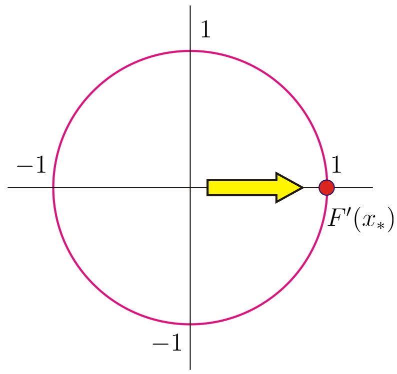
  $$\left|\frac{\partial F(a,x_*)}{\partial x}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{\partial F(a,x_*)}{\partial x} = +1 \quad \text{или} \quad \frac{\partial F(a,x_*)}{\partial x} = -1,$$

  иначе x_* – гиперболическая.

- 9. Цикл $x_1, x_2, ..., x_m$ с периодом m называется негиперболическим, если

  $$\left|\prod_{k=1}^{m}\frac{\partial F(a,x_k)}{\partial x}\right| = 1 \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{m}\frac{\partial F(a,x_k)}{\partial x} = +1 \quad \text{или} \quad \prod_{k=1}^{m}\frac{\partial F(a,x_k)}{\partial x} = -1$$

  иначе – гиперболическим.



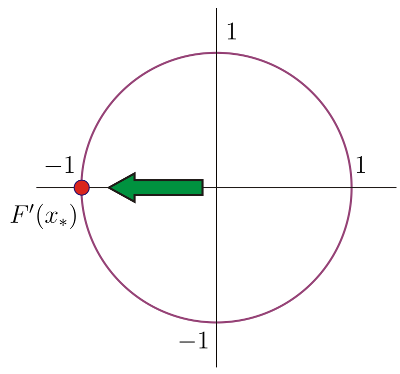


Рис. 1. Мультиплликаторы негиперболических неподвижных точек/циклов

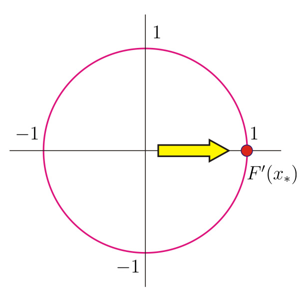
- 9. Устойчивость негиперболических неподвижных точек определяется теоремой 2 и теоремой 3.
- 10. Доказано, что кандитатами на точки бифуркации являются те значения параметра a, при которых неподвижная точка или цикл оказываются негиперболическими.

3. Обзор бифуркаций неподвижных точек/циклов

Переходим к краткому обзору бифуркаций, которые мы изучили, опуская при этом детали бифуркационного анализа.

3.1. КАСАТЕЛЬНАЯ БИФУРКАЦИЯ

- Касательная бифуркация, как мы уже знаем, связана с нарушением условия гиперболичности, когда мультипликатор неподвижной точки обращается в $+1$:



Таким образом, условие нарушения гиперболичности

$$x_* = F(a, x_*), \quad \frac{\partial F(a, x_*)}{\partial x} = +1$$

можно рассматривать как уравнение относительно бифуркационного значения параметра a.

Модельное отображения для описания касательной бифуркации (нормальная форма):

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad F(a, x) = a + x + x^2.$$

Отображение имеет две неподвижные точки при отрицательных значениях параметра a:

$$x_1^* = -\sqrt{-a}, \quad x_2^* = +\sqrt{-a}, \quad a < 0.$$

Причем x_1^* устойчива, когда

$$-1 < a < 0.$$

Неподвижная точка $x_1^* - \sqrt{-a}$ становится негиперболической с мультипликатором $+1$ при $a = 0$.

Вторая неподвижная точка $x_2^* = +\sqrt{-a}$ неустойчива для всех $a < 0$, но становится негиперболической с мультипликатором $+1$ при $a = 0$. Таким образом, при бифуркационном значении параметра

$$a = 0.0$$

существует негиперболическая неподвижная $x_* = x_{1,2}^* = 0$ с

$$\frac{\partial F(0,0)}{\partial x} = +1, \quad \frac{\partial F^2(0,0)}{\partial x^2} = 2 > 0.$$

Следовательно, x_* полуустойчива слева .

На рис. 4 приведены бифуркационная и итерационные диаграммы иллюстрирующие бифуркационнйй переход.

При $-1 < \alpha < 0$ существуют две неподвижные точки, одна из которых устойчива (x_1^*), а другая – неустойчива (x_2^*). В точке буфуракции $\alpha = 0.0$, когда мультипликаторы

$$\frac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} = \frac{\partial F(a, x_2^*)}{\partial x} = +1,$$

обе неподвижные точки сливаются при $a = 0$, а затем исчезают при переходе через бифуркациионное значение в область значений $a > 0.0$.

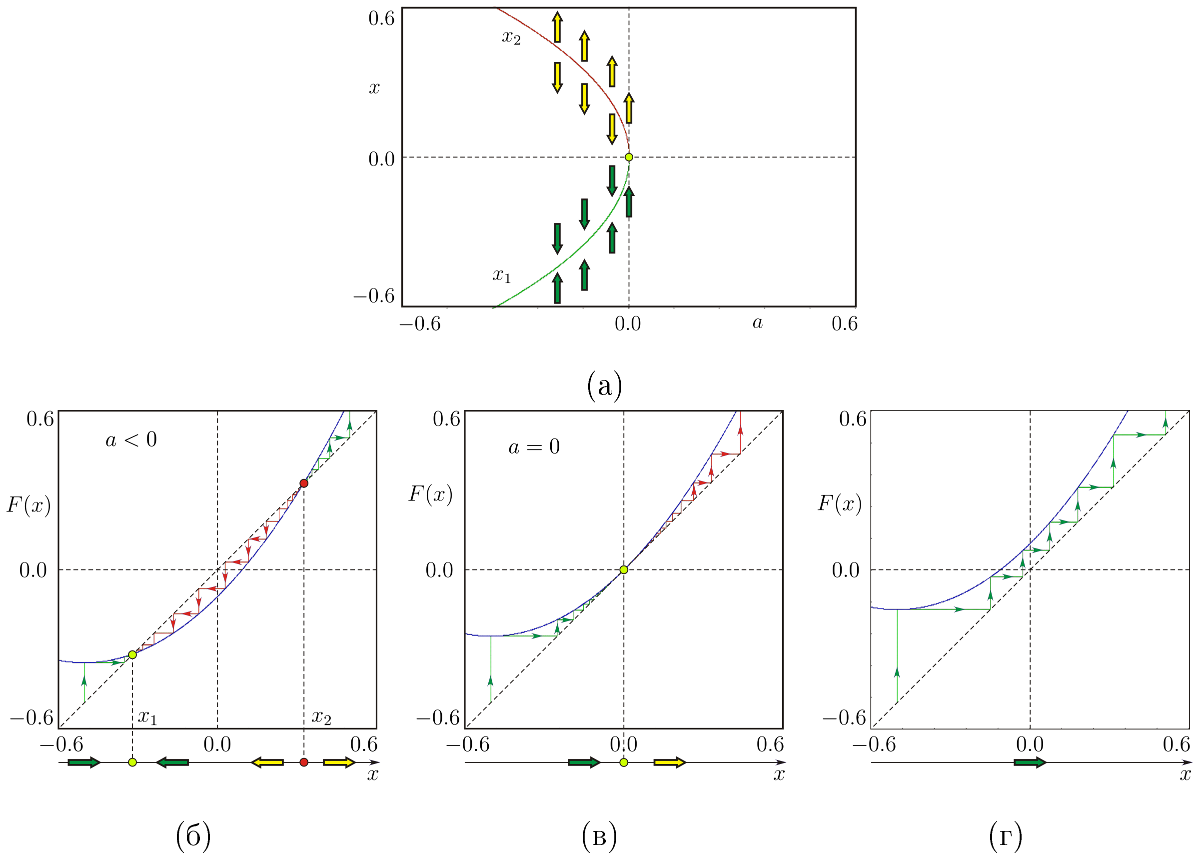
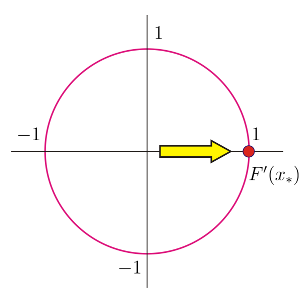


Рис. 2. Касательная бифуркация. (а) Бифуркационная диаграмма. (б) До бифуркации $a < 0.0$. (в) В точке бифуркации $a = 0.0$. (г) После бифуркации $a > 0.0$

3.2. Суперкритическая вилообразная бифуркации

Существуют две модификации: субкритическая и суперкритическая. Вилообразная бифуркация также связана с обращением мультипликатора в $+1$.



Начнем с суперкритического варианта. Модельное отображения для описания бифуркации (нормальная форма):

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad F(a, x) = (1 + a)x - x^3.$$

При $a < 0$ отображение имеет единственную неподвижную точку $x_1^* = 0$, а при $a > 0$ появляются еще две: $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{a}, \quad a > 0$.

Если

$$-2 < a < 0,$$

то $x_1^* = 0$ устойчива.

При $a > 0$ неподвижная точка x_1^* теряет устойчивость, но появляются еще две: $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{a}$, которые устойчивы, когда $0 < a < 1$.

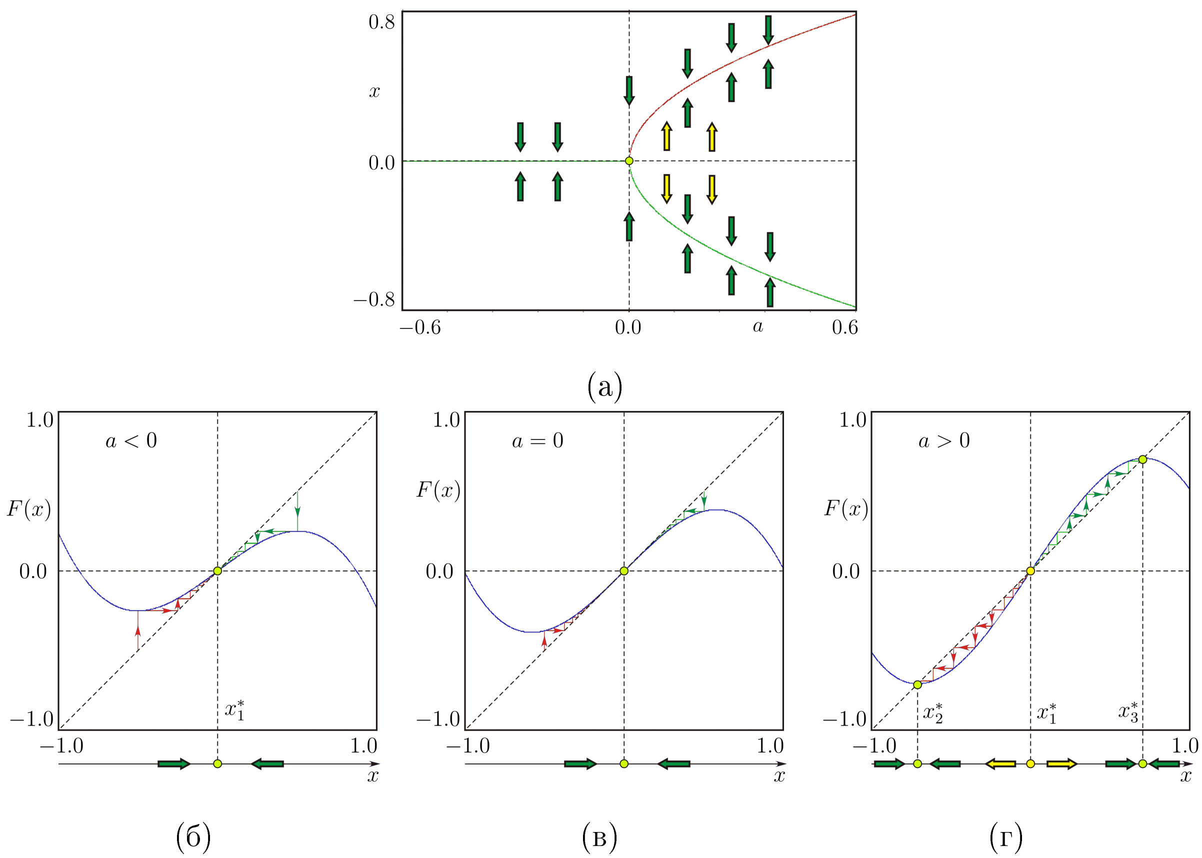


Рис. 3. Суперкритическая вилообразная бифуркация. (а) Бифуркационная диаграмма. (б) До бифуркации $a < 0.0$. (в) В точке бифуркации $a = 0.0$. (г) После бифуркации $a > 0.0$

В точке $a = 0$ сушествуют устойчивые негиперболические неподвижные точки $x_1^* = x_{2,3}^* = 0$ с мультипликаторами $+1$. Причем, как можно видеть из графика функции $F(a, x)$, производные в точке бифуркации $a = 0.0$ равны $\dfrac{\partial F(0,0)}{\partial x} = +1$, $\quad \dfrac{\partial F^2(0,0}{\partial x^2} = 0$. Поскольку $\dfrac{\partial F^2(0,0)}{\partial x^2} = 0$ и $\dfrac{\partial F^3(0,0)}{\partial x^3} = -6 < 0$, то негиперболические неподвижные точки $x_1^* = x_{2,3}^* = 0$ асиптотически устойчивы.

Таким образом, если $-2 < a < 0$, то отображение имеет единственную гиперболическую устойчивую неподвижную точку $x_1^* = 0$.

При увеличении параметра a мультипликатор $\dfrac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} = 1 + a$ стремится к $+1$. При $a = 0.0$, где $\dfrac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} = +1$, неподвижная точка $x_1^* = 0$ становится негиперболической. При переходе через точку бифуркации $a = 0.0$ неподвижная точка $x_1^* = 0$ становится неустойчивой с $\dfrac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} > +1$. При этом возникают две новые неподвижные точки $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{a}$, которые устойчивы в диапазоне изменения параметра $0 < a < 1$ (см. рис. 3). Как можно видеть из рис. 3(а), *бифуркационная диаграмма напоминает вилы, откуда и следует название бифуркации.*

3.3. Субкритическая вилообразная бифуркация

Как мы говорили ранее, существуют и другой вариант, который называется субкритической бифуркацией.

Модельное отображения для описания бифуркации (нормальная форма):

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad F(a, x) = (1 + a)x + x^3. \qquad (2)$$

При $a < 0$ отображение имеет три неподвижные точки $x_1^* = 0$, $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{-a}$, а при $a > 0$ – одну: $x_1^* = 0$.

Область устойчивости гиперболической неподвижной точки $x_1^* = 0$ остается без изменения:

$$-2 < a < 0.$$

Однако симметричные неподвижные точки $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{-a}$ при $a < 0$ неустойчивы.

Когда $a = 0$ симметричные неподвижные точки сливаются с $x_1^* = 0$:

$$x_1^* = x_{2,3}^* = 0$$

и становятся негиперболическими с мультипликатором $+1$.

Неподвижная точка, как и ранее становится неустойчивой при $a > 0$. Однако неустойчивые $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{-a}$, $a < 0$ при увеличении a «влипают» в $x_1^* = 0$ и исчезают при смене знака a с «минуса» на «плюс».

Как можно видеть из графика функции $F(a, x)$ (рис. 4), производные в точке бифуркации $a = 0.0$ равны $\dfrac{\partial F(0, 0)}{\partial x} = +1, \quad \dfrac{\partial F^2(0, 0)}{\partial x^2} = 0.$

Поскольку $\dfrac{\partial F^3(0, 0)}{\partial x^3} = 6 > 0$, то при $a = 0.0$ негиперболические неподвижные точки $x_1^* = x_{2,3}^* = 0$ неустойчивы.

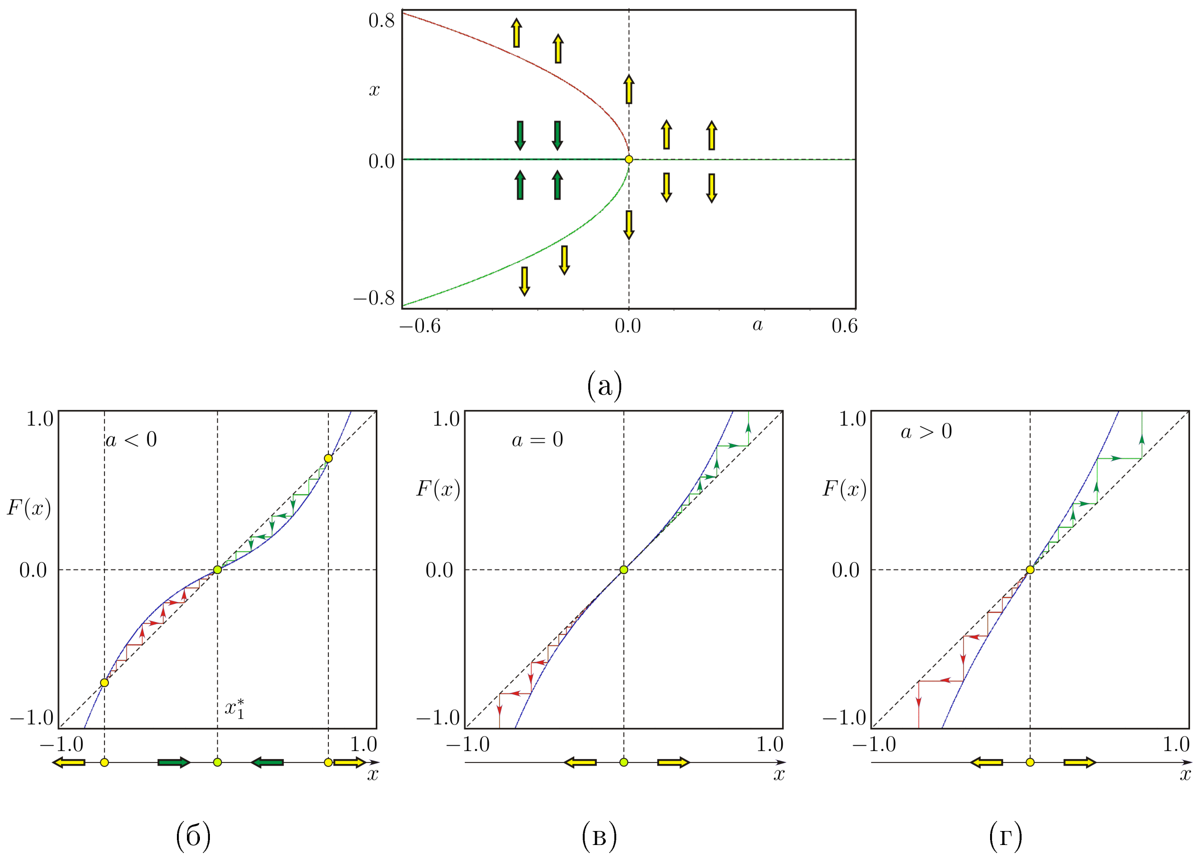
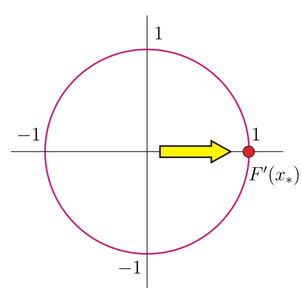


Рис. 4. Субкритическая вилообразная бифуркация. (а) Бифуркационная диаграмма. (б) До бифуркации $a < 0.0$. (в) В точке бифуркации $a = 0.0$. (г) После бифуркации $a > 0.0$

3.4. Транскритическая бифуркация

Транскритическая бифуркация связана с обращением мультипликатора в $+1$.



4. Модельное отображения для описания бифуркации (нормальная форма)

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad F(a, x) = (1 + a)x - x^2. \tag{1}$$

Отображение имеет две неподвижные точки:

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = a.$$

Неподвижная точка x_1^* устойчива, когда:

$$-2 < a < 0,$$

x_2^* устойчива, когда

$$0 < a < 2.$$

При вариации a неподвижная точка x_1^* сливается с x_2^* и обе неподвижные точки становится негиперболическими $x_1^* = x_2^* = 0$ с мультипликатором $+1$ в точке $a = 0$:

На рис. 5 приведены диаграммы, иллюстрирующие бифуркационный переход.

При $-2 < a < 0$ отображение имеет две неподвижные точки, одна из которых устойчивая $x_1^* = 0$, а другая $x_2^* = a$ – неустойчивая.

При увеличении параметра a обе неподвижные точки $x_{1,2}^*$ сближаются. При этом оба мультипликаторы $\dfrac{\partial F(a, x_{1,2}^*)}{\partial x} = 1 \pm a$ стремятся к $+1$. В точке $a = 0.0$, где $\dfrac{\partial F(a, x_{1,2}^*)}{\partial x} = 1 \pm a = +1$ неподвижные точки $x_{1,2}^*$ сливаются, а график функции $F(a, x)$ касается биссектрисы $y = x$.

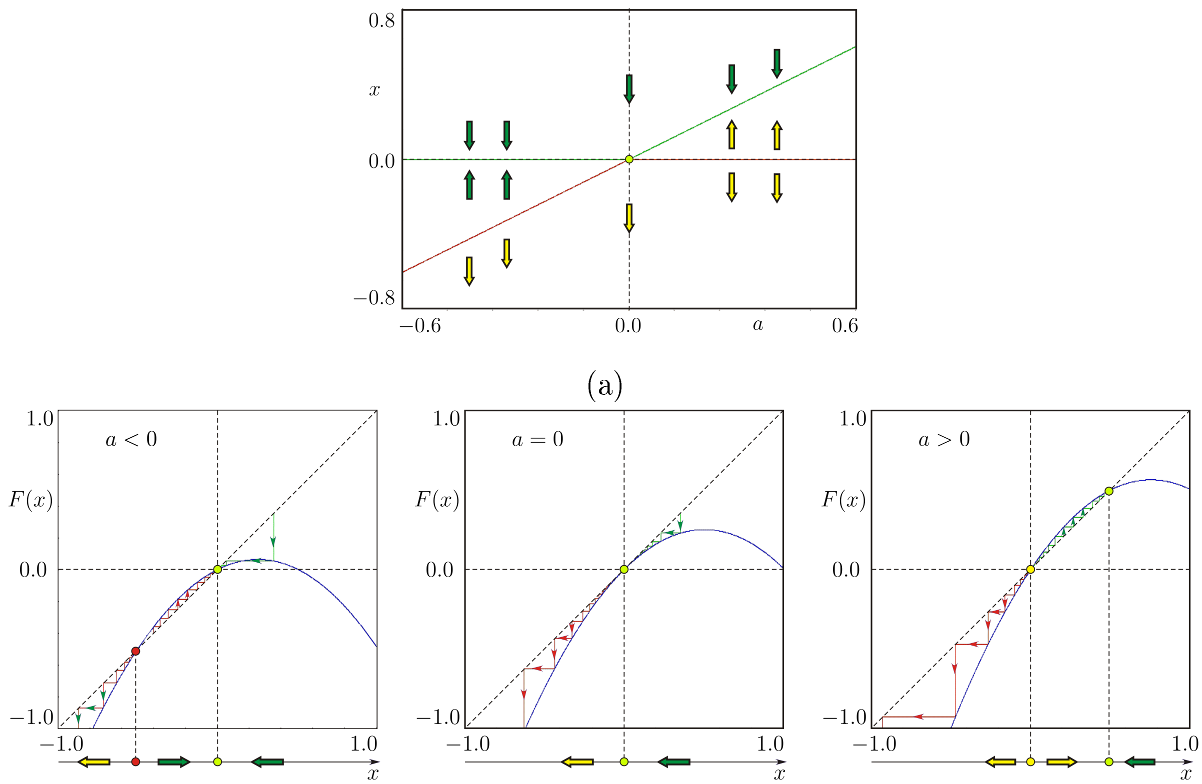
При $a = 0.0$ неподвижные точки $x_{1,2}^* = 0$ становятся негиперболическими с мультипликатором $+1$, причем

$$\frac{\partial F(0,0)}{\partial x} = +1, \quad \frac{\partial F^2(0,0)}{\partial x^2} = -2 < 0.$$

Следовательно, в точке бифуркации $a = 0.0$ существует полуустойчивая справа негиперболическая неподвижная точка $x_1^* = x_2^* = 0$. При переходе через точку бифуркации $a = 0.0$, т.е. при смене знака параметра с «минуса» на «плюс», неподвижные точки $x_{1,2}^*$ «обмениваются» (“exchange of stability”) устойчивостью: $x_1^* = 0$ становится неустойчивой, а $x_2^* = a$ – устойчивой (рис. 5).

4.1. Бифуркация удвоения периода

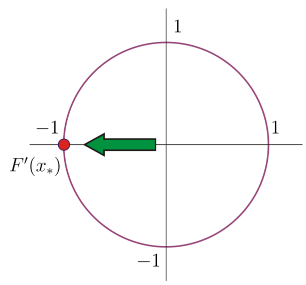
Бифуркация удвоения периода связана с обращением мультипликатора в -1. Существуют две модификации: суперкритическая и субкритическая. Изучим суперкритическую бифуркацию удвоения периода.



(а)

(б) (в) (г)

Рис. 5. Транскритическая бифуркация. (а) Бифуркационная диаграмма. (б) До бифуркации $a < 0.0$. (в) В точке бифуркации $a = 0.0$. (г) После бифуркации $a > 0.0$



Модельное отображения для описания бифуркации (нормальная форма)

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad F(a, x) = a - x - x^2. \qquad (1)$$

Отображение имеет две неподвижные точки:

$$x_1^* = -1 + \sqrt{1+a} \quad \text{and} \quad x_2^* = -1 - \sqrt{1+a}, \quad a > -1.0$$

Неподвижная точка x_1^* устойчива, если

$$-1 < a < 0.$$

Неподвижная точка $x_1^* = 0$ становится негиперболической с мультипликатором -1 при $a = 0.0$:

$$\frac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} = -1 \Leftrightarrow a = 0.$$

Таким образом, $a = 0$ есть бифуркационное значение параметра. Вторая неподвижная точка $x_2^* = -1 - \sqrt{1+a}$ неустойчива для всех $a > -1$. Заметим, что мультипликатор неподвижной точки x_1^* в точке $a = -3/4$ равен:

$$\frac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} = 0.$$

Следовательно при переходе через $a = -3/4$ характер сходимости орбиты к x_1^* меняется. При

$$-1 < a < -3/4$$

переходный процесс монотонный, а при

$$-3/4 < a < 0$$

– колебательный.

Таким образом, при $-1 < a < 0$ отображение имеет устойчивую гиперболическую неподвижную точку x_1^*, причем, если $-3/4 < a < 0$, то знак мультипликатора отрицательный.

Когда параметр достигает значения $a = -1$ неподвижная точка x_1^* становится негиперболической с мультипликатором $\dfrac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} = -1$. Поскольку производная Шварца

$$SF(0, x_1^*) = -\frac{\partial F^3(0, x_1^*)}{\partial x^3} - \frac{3}{2}\left[\frac{\partial F^2(0, x_1^*)}{\partial x^2}\right]^2 = -6 < 0,$$

то x_1^* асимптотически устойчива. При $a > 0.0$ неподвижная точка x_1^* становятся неустойчивой.

При $a > 0$ траектория начинает удаляться от x_1^* колебательно. Как можно видеть из рис. 6(в), траектория сходится к устойчивому циклу с периодом 2, т.е. происходит удвоения периода колебаний (неподвижная точка – это цикл с периодом 1) !!!

Однако, если мы будем следить за траекторией через каждые две итерации, то она будет сходиться либо к одному $x_1 = F(x_2)$ или к другому $x_2 = F(x_1)$ элементам цикла (рис. 6 (в)). В этом случае $x_1 \neq F(x_1)$,

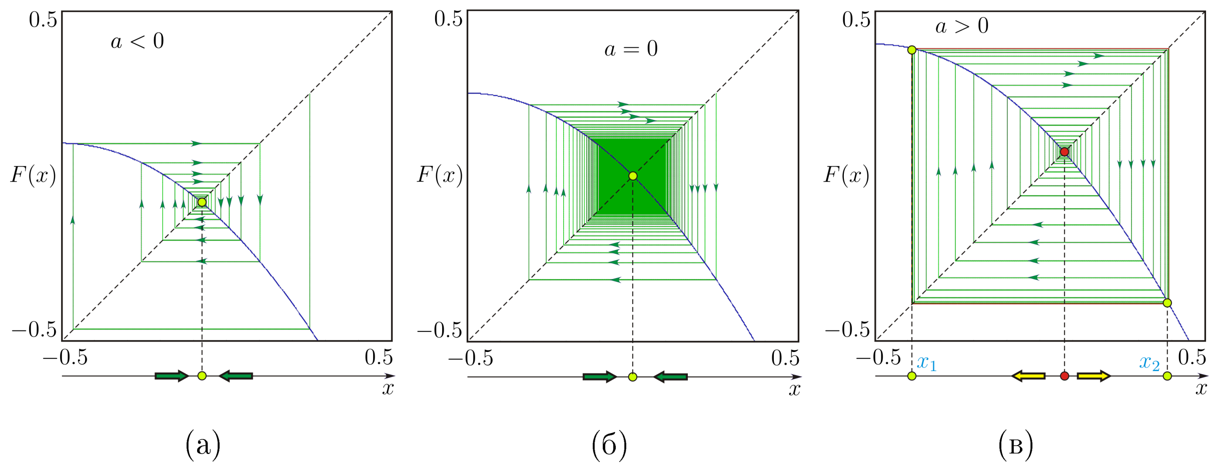


Рис. 6. Суперкритическая бифуркация удвоения периода. (а) До бифуркации $a < 0.0$. (б) В точке бифуркации $a = 0.0$. (в) После бифуркации $a > 0.0$

$x_2 \neq F(x_2)$ и $x_1 = F^2(x_1)$, $x_2 = F^2(x_2)$. Тогда говорят, что x_1, x_2 – есть периодические точки с периодом 2.

Рассмотрим вторую итерацию функции $F(a, x)$:

$$x_{k+1} = Q(a, x) = F^2(a, x_k),$$
$$Q(a, x) = F^2(a, x) = F(F(a, x)) = a - (a - x - x^2) - (a - x - x^2)^2.$$

Неподвижные точки отображения $Q(a, x)$:

$$a - x - (a - x - x^2) - (a - x - x^2)^2 = 0.$$

Это уравнение имеет четыре корня. Два корня отвечают неподвижным точкам исходного отображения $x_{k+1} = F(a, x)$, а две дополнительные при $a > 0$, которые не являются неподвижными точками $x_{k+1} = F(a, x)$, отвечают циклу периода 2. Тогда негиперболическая неподвижная точка $x_1^* = 0$ при $a = 0$ с мультиликатором -1 для исходного отображения $F(a, x)$ есть негиперболическая неподвижная точка с мультиликатором $+1$ для дважды проитерированного отображения $Q(a, x) = F(F(a, x))$:

$$\frac{\partial Q(0, x_1^*)}{\partial x} = +1.$$

Утверждение. *Если в исходном отображении $x_{k+1} = F(a, x_k)$ происходит бифуркация удвоения периода, связанная с обращением мультипликатора в -1, то в дважды проитерированном отображении $x_{k+1} = Q(a, x_k)$, $Q(a, x) = F^2(a, x) = F(F(a, x))$ имеет место вилообразная бифуркация (pitchfork), связанная с обращением мультипликатора в $+1$.*

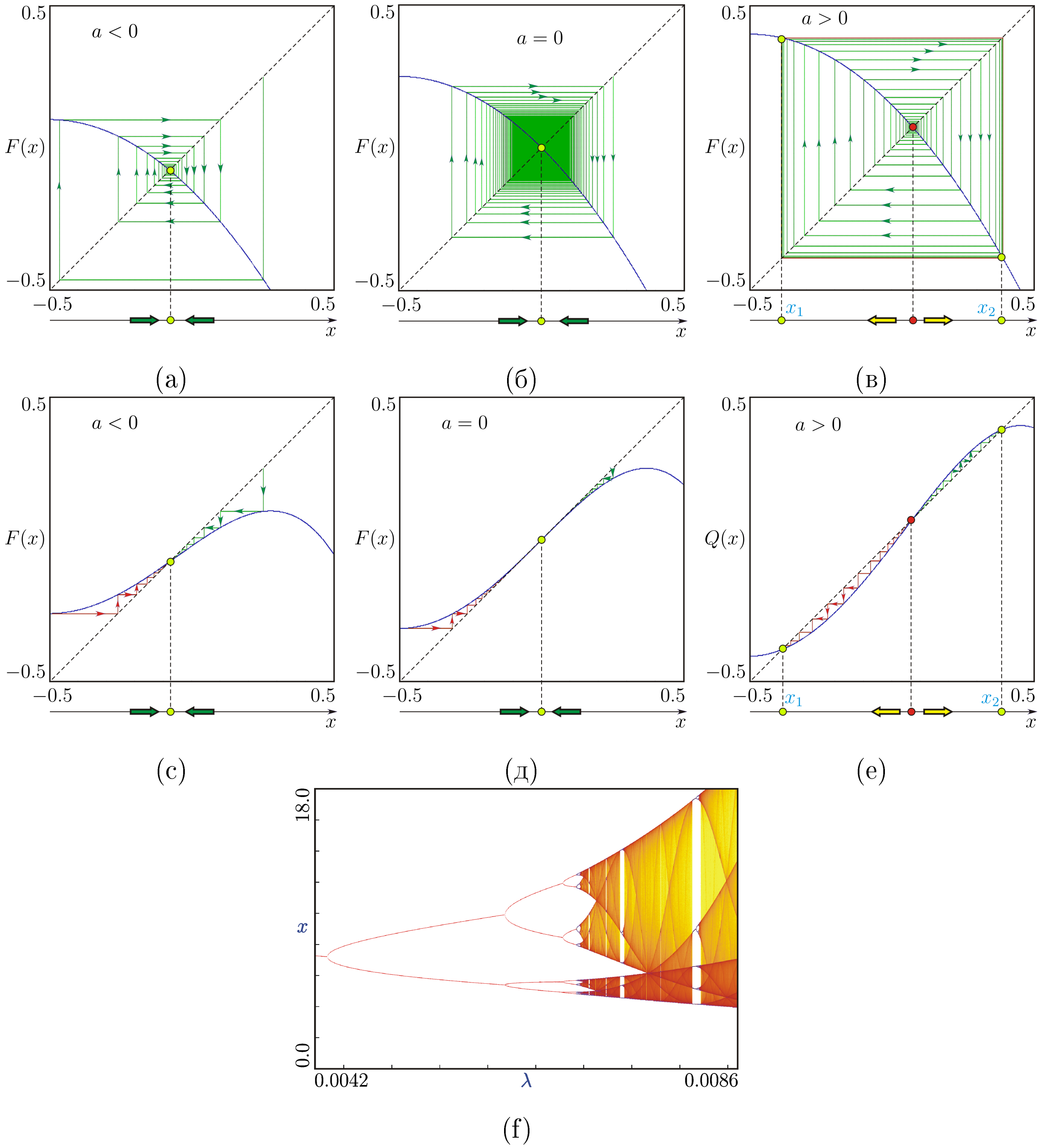


Рис. 7. Суперкритическая бифуркация удвоения периода. (а),(c) До бифуркации $a < 0.0$. (б),(d) В точке бифуркации $a = 0.0$. (в),(e) После бифуркации $a > 0.0$. (f) Бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода

5. Задание на лабораторную работу

Задача 1

Найдите неподвижные точки и отвечающие им мультипликаторы отображения

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$$
$$F(a, x) = a - x^2.$$

Здесь a – параметр. Используя этот результат, выполните качественный анализ касательной бифуркации и бифуркации удвоения периода.

Задача 2

Постройте график функции

$$\mathrm{g}(a, x) = F(F(a, x)), F(a, x) = a - x^2$$

при различных значениях параметра a. Опишите трансформацию графиков $\mathrm{g}(a, x)$ и $F(a, x)$ в окрестности точки бифуркации удвоения периода неподвижной точки отображения:

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad F(a, x) = a - x^2.$$

Укажите элементы цикла с периодом 2 после бифуркации на графике дважды проитерированной функции $\mathrm{g}(a, x) = F(F(a, x))$.

Задача 3

Покажите, что если отображение

$$x_{k+1} = F(x_k)$$

имеет негиперболическую неподвижную точку x_* с мультипликатором -1:

$$F'(x_*) = -1,$$

то вторая итерация этого отображения

$$\mathrm{g}(x_*) = F(F(x_*))$$

обладает следующими свойствами:

- $\mathrm{g}'(x_*) = +1$;
- $\mathrm{g}''(x_*) = 0$;
- $\mathrm{g}'''(x_*) = 2SF(x_*)$, где

$$SF(x) = \frac{F'''(x)}{F'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{F''(x)}{F'(x)}\right]^2$$

– производная Шварца.

Задача 4

Используя результат задачи 3, покажите, что бифуркации удвоения периода неподвижной точки отображения

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad F(a, x) = a(x - x^2)$$

отвечает вилообразная бифуркация неподвижной точки дважды проитерированного отображения

$$x_{k+1} = \mathrm{g}(a, x_k), \quad \mathrm{g}(a, x) = F(Fa, x), \quad F(a, x) = a(x - x^2).$$

Проверьте условие вилообразной бифуркации. Что можете сказать о знаке производной Шварца?

Задача 5

Найдите значения параметра a, отвечающие касательной бифуркации и бифуркации удвоения периода неподвижной точки отображения

$$x_{k+1} = a - x_k^4.$$

Задача 6

Найдите значение параметра a для суперкритической вилообразной бифуркации неподвижной точки отображения

$$x_{k+1} = ax_k - x_k^3.$$

Изобразите итерационные диаграммы до, в точке и после бифуркации.

Проделайте тоже самое для субкритической вилообразной бифуркации, рассмотрев отображение

$$x_{k+1} = ax_k + x_k^3.$$

Задача 7

Найдите неподвижные точки и отвечающие им мультипликаторы отображения

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$$
$$F(a, x) = ax(1 - x).$$

Здесь a – параметр. Используя этот результат, выполните качественный анализ транскритической бифуркации.

5.1. Порядок выполнения работы

- 1. Изучите теоретический материал по бифуркациям одномерных отображений и методику качественного анализа (см. также методические указания к предыдущим лабораторным работам).
- 2. Решите задачи 1-7, используя инструкции, приведенные в методических указаниях к предыдущим лабораторным работам.
- 3. Оформите отчет по лабораторной работе.

Библиографический список

1. *Kuznetsov Yu. A.* Elements of Applied Bifurcation Theory.— New York: Springer–Verlag, 2004.

2. *Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E.* Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. — Singapore: World Scientific, 2003.

3. *Жусубалиев Ж. Т.* Хаотическая динамика в импульсных системах: учебное пособие/ Ж. Т. Жусубалиев, В. Г. Рубанов, В. С. Титов, О. О. Яночкина. – Курск; Белгород: Изд-во БГТУ, 2018. - 143 с.