МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
____________О.Г. Локтионова
« 4 » 03 ____________2019 г.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ ГАУССА, ХОЛЕЦКОГО, ПРОГОНКИ И ИТЕРАЦИЙ

Методические указания
к лабораторной работе №6
по дисциплине «Вычислительная математика»
направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия»

Курск 2019

УДК 519.6

Составители Е.П. Кочура, В.М. Буторин

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии И.Н. Ефремова

Решение систем линейных уравнений методами Гаусса, Холецкого, прогонки и итераций: методические указания к лабораторной работе №6 по дисциплине «Вычислительная математика» для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Е.П. Кочура, В.М. Буторин. Курск, 2019. 19 с.

Содержит краткие теоретические сведения по теме лабораторной работы, цель выполнения работы, задание, пример выполнения лабораторной работы, требования к составлению отчета, список контрольных вопросов, таблицу индивидуальных заданий.

Предназначено для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия».

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 04.03.19. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 1,1. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ 148 .
Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет
305040, Курск, ул.50 лет Октября, 94.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ ГАУССА, ХОЛЕЦКОГО, ПРОГОНКИ И ИТЕРАЦИЙ

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Изучение основных определений и положений теории систем линейных алгебраических уравнений.
2. Изучение основных численных методов решения систем линейных уравнений.
3. Разработка численного алгоритма и решения на ЭВМ систем линейных уравнений методами прогонки, итераций и Гаусса.

II. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1. Основные определения. Система уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_1 + ... + a_{nn}x_n = b_n; \end{cases} \tag{2.1}$$

или в сокращенной записи:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i = b_j, \quad j = 1,...n;$$

называется линейной алгебраической системой из n уравнений с n-неизвестными x_i (i=1,...,n). В матричной форме она записывается следующим образом:

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{2.2}$$

где A - квадратная матрица, $\vec{x}$ и $\vec{b}$ - векторы столбцы вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Определителем (детерминантом) матрицы A порядка n называется число Δ_n (detA) равное:

$$\Delta_n = \sum (-1)^k a_{1\alpha} a_{2\beta} ... a_{n\omega},$$

где индексы α,β,...,α,β пробегают все возможные n! перестановок чисел 1,2,...n; k- число инверсий в данной перестановке (инверсия - количество всех возможных пар из индексов α,β,...,ω, для которых выполняется

условие, что в паре первый индекс больше второго, например, если $\alpha>\beta$ и $\alpha,\beta<...\omega$, то в перестановке всего одна инверсия).
Также используется следующее определение детерминанта, которое эквивалентно предыдущему:

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{1i} \cdot \Delta_{n-1}^{i},$$

где Δ_{n-1}^{i} - определитель матрицы порядка (n-1), образованной из матрицы A вычеркиванием первой строки и i-ого столбца.
Для существования единственности решения системы (2.1) необходимо и достаточно выполнения условия det A≠0.
Методы решения системы (2.1) делятся на две группы - прямые (точные) и итерационные (приближенные).

2. Прямые методы. Наиболее распространенными являются следующие прямые методы:

а) правила Крамера. Решение системы (2.1) имеет вид:

$$x_i = \frac{\Delta_n^i}{\Delta_n}, \qquad i = 1,...,n;$$

где

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1i} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2i} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{ni} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_n^i = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & b_2 & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2.3)$$

б) метод Гаусса. Этот метод основан на приведении методом исключения системы (2.1) к треугольному виду **(прямой ход):**

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & ... & a_{1,n-1}^{(n-1)} & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & ... & a_{2,n-1}^{(n-1)} & a_{2n}^{(n-1)} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_{n-1} \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1^{(n-1)} \\ b_2^{(n-1)} \\ ... \\ b_{n-1}^{(n-1)} \\ b_n^{(n-1)} \end{vmatrix}; \qquad (2.4)$$

а затем решение этой системы начиная с x_n, далее x_{n-1} и т.д. до x_1 **(обратный ход).**
Если система сразу сводится к диагональному виду, то такой метод называется методом Жордана-Гаусса.
Для уменьшения погрешности округления при сведении матрицы A к треугольному виду выбирается максимальный элемент в столбце или в строке и с помощью перестановок он делает главным (схема частичного

выбора). Если главный элемент выбирается во всей матрице, то схема носит название глобального выбора.
Алгоритм решения системы из n уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцам выглядит следующим образом.

Прямой ход. На k шаге выбирается главный элемент в k столбце. Пусть это будет элемент в j -ой строке $a_{jk}^{(k)}$, k≤j≤n. Верхний индекс в скобках указывает, что коэффициенты уравнения получены после (k-1) шага исключения.
Перестановкой j и k строк делает этот элемент диагональным.

$$a_{ki}^{(k)} = a_{ji}^{(k)},\ a_{ji}^{(k)} = a_{ki}^{(k)},\ i = k,...,n.$$

Далее производим исключение x_k из уравнений с номерами k+1,...,n с помощью соотношения:

$$\begin{cases} a_{ji}^{(k+1)} = a_{ji}^{(k)} - \mu_{jk}^{(k)} * a_{ki}^{(k)},\ i = k,...n; \\ b_j^{(k+1)} = b_j^{(k)} - \mu_{jk}^{(k)} * b_k^{(k)}; \qquad\qquad j = k+1,...,n. \\ \mu_{jk}^{(k)} = \dfrac{a_{jk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}; \end{cases} \tag{2.5}$$

После n-1 шагов приходим к системе уравнений (2.4) с треугольной матрицей.

Обратный ход

Из последнего уравнения находим $x_n = \dfrac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$. Далее определяем x_{n-1}, а затем x_{n-2} и т.д. до x_1 с помощью соотношения:

$$x_k = \frac{b_k^{(n-1)} - \sum\limits_{i=k+1}^{n} a_{ki}^{(n-1)} \cdot x_i}{a_{kk}^{(n-1)}},\ k = n-1,...,1. \tag{2.6}$$

в) метод Холецкого (метод квадратных корней)

Метод применяется для систем с симметричной положительно определенной матрицей. Матрица А представляется в виде произведения нижнетреугольной матрицы L и ее транспонированной матрицы L^T:

$$A = L \cdot L^T, \qquad L = \begin{vmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2.7}$$

Далее решение сводиться к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами:

$$L\vec{y} = \vec{b}, \quad L^T\vec{x} = \vec{y}, \tag{2.8}$$

т.е. к двум последовательным действиям, аналогичные обратному ходу в методе Гаусса.

г) метод прогонки. Данный метод применяется для решения трех диагональных систем:

$$\begin{cases} b_1x_1 + & c_1x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & = d_1, \\ a_2x_1 + & b_2x_2 + & c_2x_3 & \cdot & \cdot & \cdot & = d_2, \\ \cdot & a_3x_2 + & b_3x_3 & + c_3x_4 & \cdot & \cdot & = d_3, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1}x_{n-2} + & b_{n-1}x_{n-1} + & c_{n-1}x_n & = d_{n-1}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_nx_{n-1} + & b_nx_n & = d_n. \end{cases} \tag{2.9}$$

Метод состоит из двух этапов **прямой прогонки - и обратной прогонки.**

Прямая прогонка: Величина x_i выразим через x_{i+1} с помощью коэффициентов A_i, B_i

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i, \quad i = 1,2,\dots,n. \tag{2.10}$$

Из первого уравнения находим значения A_1 и B_1:

$$A_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \qquad B_1 = \frac{d_1}{b_1}. \tag{2.11}$$

Подставляя $x_1=A_1 \cdot x_2+B_1$ во второе уравнение (2.9) имеем:

$$a_2(A_1x_2+B_1)+b_2x_2+c_2x_3=d_2,$$

или

$$x_2 = -\frac{c_2}{a_2 \cdot A_1 + b_2} \cdot x_3 + \frac{d_2 - a_2 \cdot B_1}{a_2 \cdot A_1 + b_2}$$

Отсюда согласно (2.10) находим A_2 и B_2

$$A_2 = -\frac{c_2}{e_2}, \quad B_2 = \frac{d_2 - a_2B_1}{e_2}, \quad e_2 = a_2A_1 + b_2, \tag{2.12}$$

т.е. зная A_1 и B_1 по этой формуле мы можем вычислить A_2 и B_2. Аналогично подставляя значение $x_{i-1}=A_{i-1}x_i+B_{i-1}$ в i уравнение имеем:

$$a_i(A_{i-1}x_i+B_{i-1})+b_ix_i+c_ix_{i+1}=d_i, \ i=1,2,\dots n.$$

Если в формуле (2.12) индекс 1 заменить на индекс i-1, а индекс 2 - на индекс i, то получим общую формулу для прямой прогонки:

$$A_i = -\frac{c_i}{e_i}, \quad B_i = \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{e_i}, \quad e_i = a_i A_{i-1} + b_i, \qquad i=2,...,n; \tag{2.13}$$

которая позволяет определить последующие значения A_i, B_i через предыдущие A_{i-1}, B_{i-1}.

После n шагов получим значения A_n и B_n. Так как $c_n=0$, то $A_n=0$. Следовательно на основание (2.10) имеем: $x_n=B_n$.

Обратная прогонка состоит в последовательных вычислениях по формуле (2.10) значений x_{n-1}, x_{n-2} и т.д. до x_1.

Если для трех диагональной системы выполнены условия $|b_i| \geq |a_i| + |c_i|$, $|b_i| > |a_i|$, $i=1,...,n$, то эта система имеет **единственное** решение.

3. Итерационные методы. Эти методы используются обычно при решении уравнений большого порядка, поскольку при итерационном процессе не накапливается ошибка округления.

Задается некоторое приближенное решение $x^{(0)}$, затем производится цикл вычислений (итераций) и вычисляется новое приближение $x^{(1)}$. Процесс продолжается до получения решения с заданной точностью, т.е. до выполнения условий:

$$\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| \leq \varepsilon, \; i = 1,...,n., \; i=1,2,...,n.$$

а) метод простой интерполяции (**Метод Якоби**). Система уравнений (2.1) сводится к виду:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - ... - a_{1n}x_n), \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - ... - a_{2n}x_n), \\ .... \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - ... - a_{n,n-1}x_{n-1}). \end{cases} \tag{2.14}$$

Задаются значения нулевого приближения $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_n^{(0)}$ и вычисляется значение первого приближения $x_1^{(1)}$, затем с помощью $x_1^{(1)}$ вычисляется значение $x_2^{(1)}$ и т.д. до $x_n^{(1)}$. Затем процесс повторяется. С помощью значений $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)}$ вычисляется второе приближение и т.д. Здесь при вычислении k приближения для $x_j^{(k)}$ используется k-е приближение для значений $x_1^{(k)},\ldots,x_{j-1}^{(k)}$ и k-1 приближение для значений $x_{j+1}^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k-1)}$.

б) метод Гаусса-Зейделя. В этом методе система (2.1) также сводится к виду (2.14), при этом для вычисления всех значений k приближения для $x_j^{(k)}$ $(j=1,\ldots,n)$ используются только значения (k-1) приближения $x_j^{(k-1)}$ $(j=1,\ldots,n)$.

Для сходимости интерполяционного процесса Якоби и Гаусса-Зейделя **достаточно** выполнения условия :

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i=1,2,\ldots,n. \tag{2.15}$$

Метод Якоби применяются к системам с матрицами близким к диагональным, а метод Гаусса-Зейделя - близким к нижним треугольникам.

III. ЗАДАНИЕ

1. Решить систему линейных алгебраических уравнений, коэффициенты которой приведены в таблице заданий методами Гаусса, прогонки, итерационным методом. Предварительно систему привести к трех диагональному виду.
2. Показать, что используемый метод имеет единственное решение в случае использования прямого метода или сходится в случае итерационного метода.
3. Написать программу и решить на ЭВМ с помощью этих методов систему уравнений и сравнить результаты.

IV. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Задание. Решить систему линейных уравнений методами Гаусса, Гаусса-Зейделя, методом прогонки и сравнить результаты.

$$\begin{cases} -3{,}1x_1 + 0{,}9x_2 = 1{,}2; \\ 2{,}3x_1 + 7{,}6x_2 - 0{,}7x_3 = -3{,}5; \\ -1{,}4x_2 + 4{,}9x_3 + 1{,}7x_4 = -1{,}8; \\ 1{,}5x_3 - 3{,}5x_4 = 0{,}7 \end{cases} . \qquad (4.1)$$

1. Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцам.

1.1. Задаем цикл по k от 1 до n-1, где n –порядок системы, затем выбираем наибольший по модулю элемент в k-ом столбце и перестановкой строк делаем его диагональным:

$$a_{ki}^{(k)} = a_{ji}^{(k)},\ a_{ji}^{(k)} = a_{ki}^{(k)},\ i = k,...,n. \qquad (4.2)$$

1.2. По формулам прямого хода (2.4) приводим матрицу к верхне треугольному виду.

1.3. Вычисляем значение x_n: $x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$, и далее в цикле по формулам обратного хода (2.5) элементы $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$.

2. Метод Гаусса-Зейделя.

2.1. Так как система (4.1) удовлетворяет условию:

$$|a_{ii}| \ge \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{4} |a_{ij}|,\ i = 1,...,4;$$

то ее можно решать методами Якоби и Гаусса-Зейделя. Записываем итерационную формулу метода Гаусса-Зейделя:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - ... - a_{1n}x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - ... - a_{2n}x_n^{(k)}), \\ .... \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - ... - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}). \end{cases} \qquad (4.3)$$

2.2. Задаем точность $\varepsilon = 10^{-6}$ и начальное приближение:

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_4^{(0)} = 0. \qquad (4.4)$$

3. Метод прогонки.

3.1. Система (4.1) имеет трех диагональную матрицу четвертого порядка и ее можно решать методом прогонки.

Из системы (4.1) следует, что $|b_i| > |a_i| + |c_i|$, $i = 1,...,4.$. Следовательно, система имеет единственное решение и для решения можно применить метод прогонки.

3.2. Согласно (2.8,2.10) имеем: (прямая прогонка):

$$\begin{aligned} &A_1 = -\frac{c_1}{b_1},\ B_2 = \frac{d_1}{b_1}; \\ &A_i = -\frac{c_i}{e_i},\ B_i = \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{e_i},\ e_i = a_i A_{i-1} + b_i,\ i = 2,...,n. \end{aligned} \qquad (4.5)$$

С помощью (2.7) вычисляем значения:

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i,\ i = 4,...,1. \qquad (4.6)$$

4. Примеры текстов программ для решения системы (4.1) на Delphy (в консольном режиме) методами Гаусса-Зейделя и прогонки, а также на Mathcad методом Гаусса.

```
   program lab6(1);
     {Решение системы линейных уравнений методом Гаусса-Зейделя}
     {a[j,i] - элементы матрицы A для системы линейных уравнений}
     {b[i] - элементы вектора-столбца правой части системы уравнений}
     {e - точность решения}
     {xk[i] - элементы вектора-столбца “к”-го приближенного решения}
     {yk[i] - элементы вектора-столбца “к+1”-го приближенного решения}
var a : array[0..10,0..10] of real;
var b,xk,yk : array[1..10] of real;
var e: real;
var i,j: integer;
label m;
        begin
         for j:=1 to 4 do begin
         writeln(‘Введите значения строки j=’j,’   матрицы A’);
        readln (a[j,1],a[j,2],a[j,3],a[j,4]);
          end;
         writeln(‘Введите 4 значения столбца правой части b’);
```

```
readln (b[1],b[2],b[3],b[4]);
  writeln('Введите задаваемую точность e');
readln (e);
  writeln('Введите 4 значения столбца нулевого приближения x');
readln (xk[1],xk[2],xk[3],xk[4]);
    m: for j:=1 to 4 do begin
            yk[j]:=b[j]/a[j,j];
              for i:=1 to 4 do begin
                if i<>j then yk[j]:=yk[j]-a[j,i]*xk[i]/a[j,j];       вычисления по (4.3)
              end;
          end;
        i:=1;
        for j:=1 to 4 do begin
          if abs(yk[j]-xk[j]) <e then i:=i*1 else i:=i*0;
          xk[j]:=yk[j];
          end;
          if i=0 then goto m;
    writeln('Решение линейной системы методом Гаусса-Зейделя');
writeln('x1=',xk[1],'   x2=',xk[2],'    x3=',xk[3],'    x4=',xk[4]);
end.
```

```
program lab6(2);
    {Решение системы линейных уравнений методом прогонки}
    {a[j,i] - элементы матрицы A для системы линейных уравнений}
    {b[i] - элементы вектора-столбца правой части системы уравнений}
    {x[i] - элементы вектора-столбца искомого решения}
var a : array[0..10,0..10] of real;
var x,b,ai,bi,ci,di,Aii,Bii : array[0..10] of real;
var e: real;
var i,j: integer;
      begin
        for j:=1 to 4 do begin
        writeln('Введите 4 значения строки j=',j,'   матрицы A');
      readln (a[j,1],a[j,2],a[j,3],a[j,4]);
          end;
        writeln('Введите 4 значения столбца правой части b');
      readln (b[1],b[2],b[3],b[4]);
          for i:=1 to 4 do begin
            if i:=1 then ai[i]:=0 else ai[i]:=a[i,i-1];                  вычисление ai
            bi[i]:=a[i,i];                                                вычисление bi
```

```
        if i:=4 then ci[i]:=0 else ci[i]:=a[i,i+1];                    вычисление ci
        di[i]:=b[i];                                                   вычисление di
      end;
         Aii[1]:=-ci[1]/bi[1];                                         вычисление A1
         Bii[1]:=di[1]/bi[1];                                          вычисление B1
        for i:=2 to 4 do begin
            e:=ai[i]*Aii[i-1]+bi[i];
            Aii[i]:=-ci[i]/e;
            Bii[i]:=(di[i]-ai[i]*Bii[i-1])/e;
        end;
            for i:=4 downto 1 do begin
             x[i]:=Aii[i]*x{i+1]+Bii[i];                         вычисление xi по (4.6)
      writeln('Решение линейной системы методом прогонки');
    writeln('x1=',x[1],'   x2=',x[2],'    x3=',x[3],'    x4=',x[4]);
end.
```

Метод Гаусса

$n := 4$ $\qquad$ $ORIGIN := 1$

Оператор ORIGIN устанавливает нумерацию массивов с первого элемента

Выбор главного элемента в столбцах

```
G(A, b, n) :=  for k ∈ 1 .. n − 1
                 i ← k
                 for j ∈ k + 1 .. n
                   i ← j  if |A[j,k]| > |A[i,k]|
```

Перестановка строк

```
                 i ≠ k  if  for j ∈ 1 .. n
                              AA ← A[i,j]
                              A[i,j] ← A[k,j]
                              A[k,j] ← AA
                            bb ← b[i]
                            b[i] ← b[k]
                            b[k] ← bb
```

Прямой ход

```
                 for j ∈ k + 1 .. n
                   s ← −A[j,k] / A[k,k]
                   b[j] ← b[j] + s·b[k]
                   for i ∈ k .. n
                     A[j,i] ← A[j,i] + s·A[k,i]
               x[n] ← b[n] / A[n,n]
```

Обратный ход

```
               for j ∈ n − 1 .. 1
                 s ← b[j]
                 for i ∈ j + 1 .. n
                   s ← s − A[j,i]·x[i]
                 x[j] ← s / A[j,j]
               x
```

$$A := \begin{pmatrix} -3.1 & 0.9 & 0 & 0 \\ 2.3 & 7.6 & -0.7 & -1 \\ 0 & -1.4 & 4.9 & 1.7 \\ 0 & 0 & 1.5 & -3.5 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 1.2 \\ -3.5 \\ -1.8 \\ 0.7 \end{pmatrix} \qquad G(A, b, n) = \begin{pmatrix} -0.49986735 \\ -0.388432 \\ -0.35600593 \\ -0.35257397 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{lsolve}(A,b)=\begin{pmatrix}-0.49986735\\-0.388432\\-0.35600593\\-0.35257397\end{pmatrix}$$

Проверка встроенной программой MATHCAD

Метод Холецкого (метод квадратных корней)

ORIGIN := 1

```
Hlc(A,b,n) := | for k ∈ 1..n
              |   | L[k,k] ← √(A[k,k])
              |   | L[k,k] ← √( A[k,k] − Σ_{j=1}^{k−1} (L[k,j])^2 )  if k ≠ 1
              |   | for i ∈ k+1..n
              |   |   if k ≠ n
              |   |     | L[i,k] ← (A[i,k]) / L[k,k]  if k = 1
              |   |     | L[i,k] ← ( A[i,k] − Σ_{j=1}^{k−1} L[i,j]·L[k,j] ) / L[k,k]  otherwise
              | for k ∈ 1..n
              |   | y[k] ← b[k] / L[k,k]
              |   | y[k] ← ( b[k] − Σ_{j=1}^{k−1} L[k,j]·y[j] ) / L[k,k]  if k ≠ 1
              | for k ∈ 1..n
              |   | i ← n − k + 1
              |   | x[i] ← y[i] / L[i,i]
              |   | x[i] ← ( y[i] − Σ_{j=i+1}^{n} L[j,i]·x[j] ) / L[i,i]  if i ≠ n
              | x
```

$$L_{k,k}\leftarrow\sqrt{A_{k,k}}$$
$$L_{k,k}\leftarrow\sqrt{A_{k,k}-\sum_{j=1}^{k-1}\left(L_{k,j}\right)^2}\quad \text{if } k\neq 1$$
$$L_{i,k}\leftarrow\frac{\left(A_{i,k}\right)}{L_{k,k}}\quad \text{if } k=1\qquad L_{i,k}\leftarrow\frac{\left(A_{i,k}-\sum_{j=1}^{k-1}L_{i,j}\cdot L_{k,j}\right)}{L_{k,k}}\quad\text{otherwise}$$

Нахождение элементов нижнетреугольной матрицы L:
A=L* L^T
для решения вместо уравнения
Ax=b уравнения L L^T**x=b**

$$y_k\leftarrow\frac{b_k}{L_{k,k}}\qquad y_k\leftarrow\frac{\left(b_k-\sum_{j=1}^{k-1}L_{k,j}\cdot y_j\right)}{L_{k,k}}\quad\text{if } k\neq 1$$

Решение уравнения
Ly=b где y= L^T**x**

$$i\leftarrow n-k+1\qquad x_i\leftarrow\frac{y_i}{L_{i,i}}\qquad x_i\leftarrow\frac{\left(y_i-\sum_{j=i+1}^{n}L_{j,i}\cdot x_j\right)}{L_{i,i}}\quad\text{if } i\neq n$$

Решение уравнения
L^T**x=y**

$$n := 4 \qquad A := \begin{pmatrix} 3.0 & -5.5 & 7.24 & -6.7 \\ -5.5 & 2.6 & 8.1 & 9.85 \\ 7.24 & 8.1 & 1.5 & -0.32 \\ -6.7 & 9.85 & -0.32 & 4.9 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 1.9 \\ 2.5 \\ 3.1 \\ 4.4 \end{pmatrix}$$

Проверка с помощьк обратной матрицы

$$\mathrm{Hlc}(A, b, n) = \begin{pmatrix} -0.209 \\ 0.481 \\ 0.411 \\ -0.328 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -0.209 \\ 0.481 \\ 0.411 \\ -0.328 \end{pmatrix}$$

6. Заполняем таблицу:

Метод	x_1	x_2	x_3	x_4
Гаусса	-0.49986735	-0.388432	-0.35600593	-0.35257397
Гаусса-Зейделя				
Прогонки				
Холецкого	-0.209	0.481	0.411	-0.328

V. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Название лабораторной работы.
2. Индивидуальное задание.
3. Теоретическая часть.
4. Текст программы.
5. Результаты расчета.

Замечание: Пункт 1-4 должны быть оформлены до начала выполнения лабораторной работы.

VI. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Матричная форма записи системы линейных уравнений.
2. Что такое определитель?
3. Необходимое и достаточное условие существования единственного решения системы линейных уравнений.
4. Определение обратной матрицы. Условие ее существования.
5. Что такое единичная матрица?
6. Основные методы решения системы линейных уравнений.
7. Правило Крамера.
8. Методы Гаусса, Жордана-Гаусса.
9. Метод Холецкого
10. Метод прогонки.
11. Условие единственности решения методом прогонки
12. Итерационные методы Якоби, Гаусса-Зейделя.
13. Достаточное условие сходимости итерационных методов Якоби и Гаусса-Зейделя.

VII. ТАБЛИЦА ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ.

№	Матрица системы				Правая часть
1	2				3
1	0.401	0.301	0.000	0.000	0.122
	-0.029	-0.500	-0.018	0.000	-0.253
	0.000	-0.050	-1.400	-0.039	-0.988
	0.000	0.000	-0.007	-2.300	-2.082
2	-1.700	0.003	0.000	0.000	0.681
	0.002	0.800	0.001	0.000	0.480
	0.000	-0.002	-0.100	0.030	-0.802
	0.000	0.000	-0.003	-1.600	-1.007
3	-3.000	0.001	0.000	0.000	1.514
	-0.011	2.100	0.5200	0.000	1.478
	0.000	0.005	1.200	0.600	1.083
	0.000	0.000	-0.010	-0.300	-1.007
4	4.300	0.217	0.000	0.000	2.663
	0.100	-3.400	-0.207	0.000	2.778
	0.000	0.090	2.500	0.197	2.533
	0.000	0.000	0.080	-1.600	1.928
5	-5.600	0.268	0.000	0.000	4.032
	0.147	4.700	0.271	0.000	4.313

№	Матрица системы				Правая часть
1	2				3
	0.000	-0.150	-3.800	0.274	4.235
	0.000	0.000	0.153	2.900	3.797
6	6.900	0.319	0.000	0.000	5.664
	0.191	-6.000	-4.040	0.000	6.112
	0.000	-0.205	5.100	0.000	6.201
	0.000	0.000	0.020	4.200	5.937
7	-8.200	0.370	0.000	0.000	7.559
	0.234	7.300	5.600	0.000	8.175
	0.000	0.260	-0.340	-0.422	8.421
	0.000	0.000	0.268	5.500	8.322
8	9.500	0.422	0.000	0.000	9.719
	0.278	8.601	0.459	0.000	10.500
	0.000	0.315	7.700	0.496	10.915
	0.000	0.000	0.351	6.803	10.978
9	10.800	-0.5760	0.000	0.000	12.143
	0.321	9.900	7.300	0.000	13.089
	0.000	0.369	9.000	-6.060	13.674
	0.000	0.000	0.416	8.100	13.897
10	-1.100	0.528	0.000	0.000	14.830
	0.365	0.113	0.536	0.000	15.941
	0.000	-0.423	1.031	0.534	16.969
	0.000	0.000	0.481	-0.570	17.081
11	13.400	0.581	0.000	0.000	17.782
	-0.408	12.500	-0.650	0.000	19.593
	0.000	0.477	-11.600	0.781	19.974
	0.000	0.000	0.546	10.700	20.528
12	30.300	0.153	0.000	0.000	80.168
	0.975	-29.400	0.011	0.000	83.578
	0.000	0.117	-2.500	1.660	86.609
	0.000	0.000	10.700	27.600	89.278
13	0.161	0.332	0.000	0.000	86.814
	0.109	-0.301	-0.150	0.000	90.358
	0.000	-0.060	0.171	0.051	19.861
	0.000	0.000	0.145	-0.298	93.502
14	-22.500	-0.956	0.000	0.000	45.802
	0.714	21.600	0.109	0.000	48.261
	0.000	0.855	20.714	0.124	50.343

№	Матрица системы				Правая часть
1	2				3
	0.000	0.000	-0.996	19.800	52.453
15	26.400	0.117	0.000	0.000	61.853
	0.840	-25.513	0.198	0.000	64.730
	0.000	0.105	24.600	-8.810	63.880
	0.000	0.000	0.000	2.451	59.376
16	5.500	0.622	0.000	0.000	0.719
	0.278	5.601	0.459	0.000	1.500
	0.000	0.315	8.700	0.696	10.915
	0.000	0.000	0.351	2.340	14.978
17	1.800	-0.5760	0.000	0.000	2.143
	0.321	6.900	7.300	0.000	1.089
	0.000	0.369	9.000	-6.060	13.674
	0.000	0.000	0.416	8.100	3.897
18	-7.600	0.828	0.000	0.000	14.830
	0.265	0.7113	0.536	0.000	15.941
	0.000	-0.423	2.031	0.534	1.969
	0.000	0.000	0.481	-0.570	17.081
19	7.400	0.581	0.000	0.000	7.782
	-0.408	2.500	-0.650	0.000	19.593
	0.000	0.477	-1.600	0.881	9.974
	0.000	0.000	0.546	12.700	2.528
20	5.25	4.066	0.000	0.000	3.663
	0.300	2.900	-0.207	0.000	4.778
	0.000	0.090	8.660	0.197	2.533
	0.000	0.000	0.080	-13.800	6.928
21	5.600	0.268	0.000	0.000	4.032
	0.147	6.700	0.271	0.000	6.313
	0.000	-0.150	-7.800	0.274	4.235
	0.000	0.000	0.153	9.900	3.797
22	1.900	0.519	0.000	0.000	0.664
	0.191	-4.000	-6.040	0.000	2.112
	0.000	-0.205	2.100	0.000	7.201
	0.000	0.000	0.020	1.200	9.937
23	3.401	0.301	0.000	0.000	3.122
	-0.029	-6.500	-0.018	0.000	-0.253
	0.000	-0.050	-7.400	-0.039	-9.988
	0.000	0.000	-0.007	-0.300	-2.082

№	Матрица системы				Правая часть
1	2				3
24	-6.700 0.002 0.000 0.000	0.003 7.800 -0.002 0.000	0.000 0.001 -9.100 -0.003	0.000 0.000 0.030 -9.600	1.681 6.480 -0.802 -1.007
25	-6.000 -0.011 0.000 0.000	1.001 4.100 0.005 0.000	0.000 0.9200 3.200 -1.010	0.000 0.000 1.600 -7.300	2.514 1.478 2.083 -1.007