МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра теоретической механики и мехатроники

УТВЕРЖДАЮ
Первый проректор –
проректор по учебной работе
__________ Е.А. Кудряшов
«__» ________ 2012 г.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ОПТИМАЛЬНОМ ПЛАНИРОВАНИИ ЭКСПЕРИМЕНТА

Методические указания к выполнению лабораторной работы по дисциплине «Компьютерные системы математического моделирования» для студентов специальности 220401.65 Мехатроника; по дисциплине «Моделирование систем» для студентов направлений 220200.62 Автоматизация и управление и 221000.62 Мехатроника и робототехника

Курск 2011

УДК 621.(076.1)

Составители: Лушников Б.В., Мальчиков А.В.

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент *В.Я.Мищенко*

Математическое моделирование при оптимальном планировании эксперимента: методические указания к выполнению лабораторной работы / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Б.В. Лушников, А.В. Мальчиков; Курск, 2011. 15 с., ил. 4, табл. 2. Библиогр.: с.15.

Содержат сведения по вопросам математического моделирования при оптимальном планировании эксперимента. Приводится пример выполнения лабораторной работы, краткие теоретические положения и контрольные вопросы для защиты работы.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утверждённой учебно-методическим советом по направлениям Автоматизация и управление; Мехатроника и робототехника.

Предназначены для студентов направлений 220200.62 Автоматизация и управление, 221000.62 Мехатроника и робототехника и для студентов специальности 220401.65 Мехатроника всех форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции
Подписано в печать . Формат 60х84 1/16
Усл.печ.л. 2,03. Уч.-изд.л. 1,84 Тираж 20 экз. Заказ .Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Лабораторная работа №3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ОПТИМАЛЬНОМ ПЛАНИРОВАНИИ ЭКСПЕРИМЕНТА

Цель работы: *ознакомление с методами математического моделирования при оптимальном планировании эксперимента.*

Аппаратные средства: *виртуальная лаборатория на ЭВМ IBM PC, программные пакеты «MathCAD»,, «Matlab/Simulink».*

1. Теоретические положения

Математическое моделирование сложных динамических систем может быть успешно использовано при параметрической оптимизации различных технологических процессов, электронных систем управления, механических объектов. Эти задачи решаются методами оптимального планирования эксперимента.

Планирование эксперимента – это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью.

Для решения технологических и конструкторских задач планирование эксперимента играет важную роль. Оно позволяет:

– минимизировать общее число опытов;

– одновременно варьировать всеми переменными, определяющими процесс;

– использовать математический аппарат, формализующий многие действия экспериментатора.

Процесс решения задач, при котором ищутся наилучшие условия реализации процесса, называется оптимизацией.

При решении задач оптимизации выбирается критерий оптимизации и его зависимость от ряда факторов. Такая зависимость называется математической моделью объекта исследования:

$$K = f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

где K – критерий оптимизации;

x_i – варьируемые факторы;

n – количество факторов.

Фактором называется измеряемая переменная величина, принимающая в некоторый момент времени определённое значение.

Каждый фактор имеет свою область определения. Требования, предъявляемые к факторам: управляемость, точность, однозначность.

Факторы разделяются на количественные и качественные. Качественные факторы – это разные вещества, разные технологические способы, аппараты, исполнители и т.д. Количественные факторы – это время реакции, температура, концентрация, величина рН и т.д.

Фактор может принимать одно или несколько значений, которые называются **уровнями**.

Для проведения экспериментов задаются фиксированным числом уровней. При этом число различных состояний или число опытов определяется как p^n, где p – число уровней, n – число факторов.

Интервалом варьирования факторов называется некоторое число, прибавление которого к основному уровню даёт верхний, а вычитание – нижний уровень факторов. То есть интервал варьирования – это расстояние на координатной оси между основным и верхним (или нижним) уровнями. Для упрощения записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных масштабы по осям выбираются так, чтобы верхний уровень соответствовал +1, нижний -1, основной – нулю.

При планировании эксперимента важно определить параметр, который нужно оптимизировать. Параметр оптимизации должен быть количественным, то есть задаваться числом. Множество значений, которые может принимать параметр оптимизации, называется **областью его определения**.

Основные требования к параметру оптимизации: однозначность, универсальность, желательно, чтобы он имел физический смысл, был простым и легко вычисляемым.

После выбора параметра оптимизации и подбора факторов необходимо выбрать модель, то есть выбрать вид функции и записать её уравнение.

В основе решения задачи планирования лежит многомерное квадратичное планирование эксперимента с последующим решением задачи многомерной аппроксимации. Для этого используются стандартные планы второго порядка типа Бокса-Бенкена, Рехтшафнера и другие, а разработанные в МГУ им. Ломоносова для этих планов матрицы позволяют очень легко определять коэффициенты регрессионной модели. Получаемые аппроксимационные поверхности второго порядка являются выпуклыми и гладкими, что позволяет искать экстремум простыми градиентными методами. При этом используется дробный факторный эксперимент, при котором число опытов значительно меньше, чем при полном факторном эксперименте (где число опытов при двух уровнях $N=2^n$, n – число факторов).

Для нахождения глобального экстремума первоначально проводится планируемый эксперимент с охватом всего пространства. Проанализировав результаты численного эксперимента, можно выбрать узкую область, находящуюся в непосредственной близости от искомого экстремума. Затем выбирается новая область экстремума, при этом, если установлено, что тот или иной фактор мало влияет на критерий оптимизации, его целесообразно зафиксировать, что уменьшает пространство варьируемых параметров и упрощает решение задачи. Таким образом, перемещаясь в пространстве, удаётся найти решение поставленной задачи.

Зависимость критерия оптимизации K от вектора варьируемых параметров можно представить в виде линейной или нелинейной зависимости:

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}_0 + \mathrm{K}_1 \cdot \overline{\mathrm{q}} + \overline{\mathrm{q}} \cdot \mathrm{K}_2 \cdot \overline{\mathrm{q}}^{\mathrm{T}},$$

где K_0, K_1, K_2 – коэффициенты регрессионной модели,

$\overline{\mathrm{q}}^{\mathrm{T}}$ - транспонированный вектор q.

Коэффициенты, вычисленные по результатам эксперимента, указывают на силу влияния фактора.

Нахождение экстремальных значений на этой поверхности осуществляется градиентным методом наискорейшего спуска, что позволит определить вектор $\overline{\mathrm{q}}_{\mathrm{M}}$, которому соответствует экстремум K_M.

Проведение эксперимента осуществляется в такой последовательности:

1. Описание изучаемого процесса.

2. Определение цели исследования.
3. Выбор параметров оптимизации.
4. Формулировка задачи оптимизации.
5. Определение факторов, влияющих на процесс (варьируемых факторов).
6. Выбор основного уровня и интервалов варьирования (табл. 1).

Таблица 1

Уровни факторов и интервалы варьирования

Факторы	Уровни			Интервал варьирования	Размерность
	-1	0	+1		

7. Составление матрицы планирования (для четырёхфакторного трёхуровневого эксперимента см. табл. 2) и получении результатов эксперимента.

Таблица 2

Рабочая матрица планирования

№ эксперимента	Варьируемые параметры				Функция аппроксимации
	X_1	X_2	X_3	X_4	
1	-	-	-	-	Y_1
2	+	0	0	0	Y_2
3	0	+	0	0	Y_3
4	0	0	+	0	Y_4
5	0	0	0	+	Y_5
6	-	+	+	+	Y_6
7	+	-	+	+	Y_7
8	+	+	-	+	Y_8
9	+	+	+	-	Y_9
10	-	-	+	+	Y_{10}
11	-	+	-	+	Y_{11}
12	-	+	+	-	Y_{12}
13	+	+	-	-	Y_{13}
14	+	-	+	-	Y_{14}
15	+	-	-	+	Y_{15}

8. Обработка экспериментальных данных на ЦЭВМ, построение регрессионной модели, определение оптимальных параметров.
9. Выводы.

Примечание. Для решения задач оптимизации используется стандартный план Рехтшафнера, на основании которого была составлена программа расчёта в среде MathCAD.

2. Пример выполнения лабораторной работы

2.1 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ПОДВЕСКИ АВТОМОБИЛЯ ПРИ ПРОЕЗДЕ ЕДИНИЧНОЙ НЕРОВНОСТИ.

Цель работы: *исследовать модель колебаний подвески автомобиля в продольной вертикальной плоскости; определить для данной модели оптимальные значения жёсткости упругих элементов и коэффициентов вязкого сопротивления передней подвески и её шин.*

Аппаратные средства: *виртуальная лаборатория на ЭВМ IBM PC, программный математический пакет «MathCAD».*

2.1.1 Расчётная схема и исходные данные:

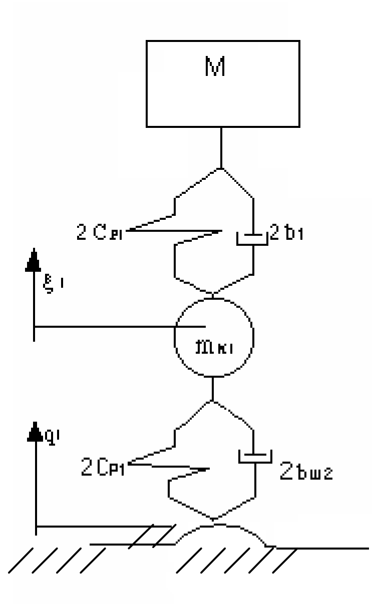

Рис.1 Расчётная схема колебаний передней подвески автомобиля.

Исходные данные:

$M := 1268$ - масса подрессоренных частей автомобиля (кг);

$m_{k1} := 130$ - масса неподрессоренных частей автомобиля, приходящаяся на переднюю ось (кг);

$C_{p1} := 82000$ - жесткость упругих элементов передней подвески (Н/м);

$C_{ш1} := 200000$ - радиальная жесткость шин передних колёс (Н/м);

$b_1 := 3000$ - коэффициент вязкого сопротивления амортизаторов передней подвески (Н*м/с);

$b_{ш1} := 1000$ - коэффициент сопротивления в шинах передней подвески (Н*м/с);

$A_0 := 0.015$ - наибольшая высота неровности (м);

$v := 5$ - скорость движения автомобиля (км/ч);

$S := 0.2$ - длина неровности (м);

$\nu := 2 \cdot \frac{\pi}{3.6} \cdot \frac{v}{S}$; $\nu = 43.633$ - частота воздействия неровностей дороги (c^{-1});

$t := 0, 0.006 .. 3.0$ - интервал и шаг изменения времени (с);

$x_0 := 2$ - координата появления единичной неровности (м);

$l := 0.2$ - длина неровности (м);

$a := 0.1$ - высота единичной неровности (м);

$x(t) := \frac{v}{3.6} \cdot t - x_0$ - путевая координата;

$ss(x, l) := \Phi(x) - \Phi(x - l)$ - функция "окна";

$n1(t) := \frac{a}{2} \cdot \left(1 - \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{v}{l \cdot 3.6} \cdot t\right)\right)$ - уравнение периодической неровности;

$dn1(t) := a \cdot \pi \cdot \frac{v}{3.6 \cdot l} \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{v}{3.6 \cdot l} \cdot t\right)$ - производная от $n1(t)$;

$q_3(t) := ss(x(t), l) \cdot n1(t)$ - функция единичной неровности, действующей на передние колёса;

$dq_3(t) := ss(x(t), l) \cdot dn1(t)$ - производная функции $q_3(t)$;

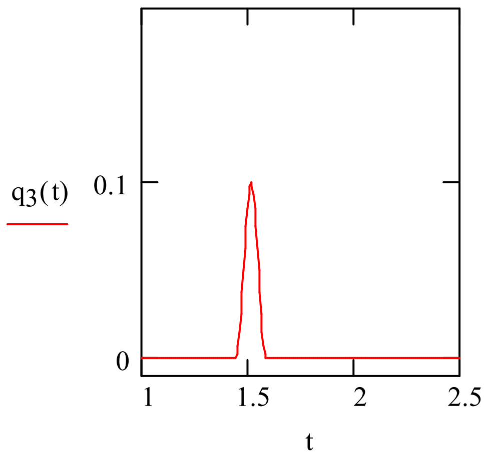

Рис.2 Вид неровности дороги

2.1.2 Математическая модель для системы подвески автомобиля

Вектор-столбец начальных условий зададим в следующем виде:

$$y := \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

-начальное смещение центра масс кузова;
-начальная скорость центра масс кузова;
-начальное смещение передней оси;
-начальная скорость передней оси.

Составим вектор-функцию решения системы дифференциальных уравнений колебаний подвески автомобиля и построим график перемещения подрессоренной части автомобиля:

$$D(t,y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ -1\cdot\dfrac{\left[2\cdot C_{p1}\cdot(y_0 - y_2) + 2b_1\cdot(y_1 - y_3)\right]}{M} \\ y_3 \\ -1\cdot\dfrac{\left[2\cdot C_{p1}\cdot(y_2 - y_0) + 2\cdot C_{ш1}\cdot(y_2 - q_3(t)) + 2\cdot b_1\cdot(y_3 - y_2) + 2\cdot b_{ш1}\cdot(y_3 - q_3(t))\right]}{m_{k1}} \end{bmatrix}$$

$Z := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 5, 2000, D)$ - оператор интегрирования дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта четвертого порядка с постоянным шагом;

$i := 1 .. \mathrm{last}\left(Z^{\langle 0 \rangle}\right)$ - счётчик количества точек;

$\Delta_i := \left(Z^{\langle 0 \rangle}\right)_i \quad z1_i := \left(Z^{\langle 1 \rangle}\right)_i$ - время и виброперемещение кузова автомобиля.

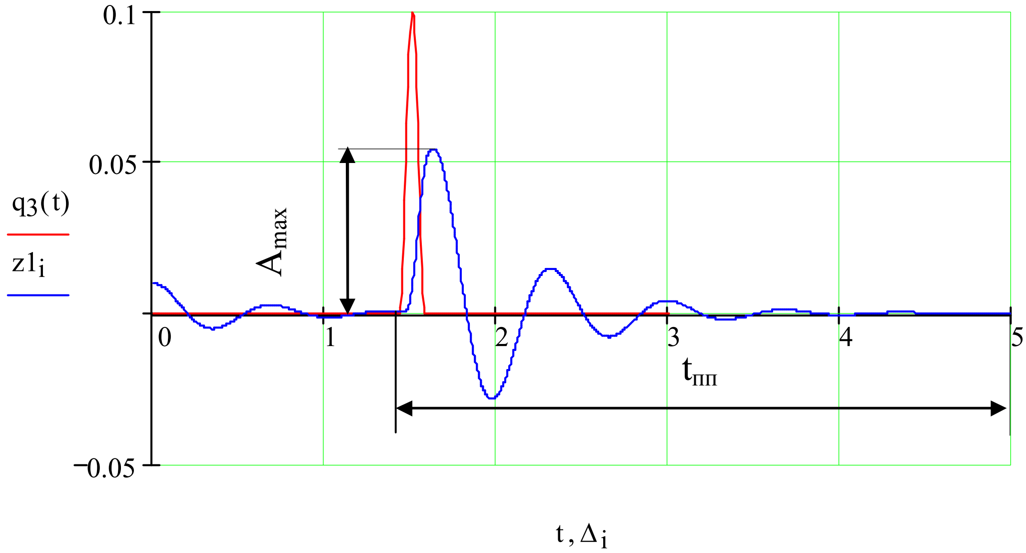

Рис.3 Перемещение подрессоренной части автомобиля

Оптимальное значение жёсткости и коэффициентов вязкости определим, используя четырёхфакторный трёхуровневый план Рехтшафнера.

Матрица планирования эксперимента по плану Рехтшафнера для четырёх факторов и трёх уровней содержит 15 испытаний:

$M_{plan} =$

	1	2	3	4
1	-1	-1	-1	-1
2	1	0	0	0
3	0	1	0	0
4	0	0	1	0
5	0	0	0	1
6	-1	1	1	1
7	1	-1	1	1
8	1	1	-1	1
9	1	1	1	-1
10	-1	-1	1	1
11	-1	1	-1	1
12	-1	1	1	-1
13	1	1	-1	-1
14	1	-1	1	-1
15	1	-1	-1	1

В качестве критерия оптимизации примем комплексный критерий, учитывающий время затухания свободных колебаний кузова при проезде единичной неровности $t_{пп}$ и его максимальное отклонение A_{max} (рис. 3):

$$K = k_1 \cdot t_{пп} + k_2 \cdot A_{max} .$$

Коэффициенты k_1 и k_2 обеспечивают равный вклад параметров $t_{пп}$ и A_{max} в значение комплексного критерия оптимизации K.

Целью оптимизации является минимизация критерия K, что позволит обеспечить как минимальное время переходного процесса, так и минимальное отклонение автомобиля при проезде единичной неровности.

Критерий оптимизации K, аппроксимированный поверхностью отклика в 5-мерном пространстве факторов x_1, x_2, x_3, x_4, имеет вид:

$$y(x) := A_0 + B_1 \cdot x_1 + B_2 \cdot x_2 + B_3 \cdot x_3 + B_4 \cdot x_4 + C_{11} \cdot (x_1)^2 + C_{22} \cdot (x_2)^2 + C_{33} \cdot (x_3)^2 + C_{44} \cdot (x_4)^2 \ldots$$
$$+ C_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + C_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + C_{14} \cdot x_1 \cdot x_4 + C_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + C_{24} \cdot x_2 \cdot x_4 + C_{34} \cdot x_3 \cdot x_4$$

Функция поиска координат минимума критерия оптимизации $K = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в 5-мерном пространстве методом половинного деления имеет вид:

```
min_opt(y, x, D) := | Ymin ← y(x)
                    | while D > TOL
                    |   | p ← 1
                    |   | while p
                    |   |   | p ← 0
                    |   |   | for i ∈ 1 .. length(x)
                    |   |   |   for X ∈ −D, D
                    |   |   |     | break if |x_i| > 1
                    |   |   |     | x_i ← x_i + X
                    |   |   |     | Y ← y(x)
                    |   |   |     | if Y < Ymin
                    |   |   |     |   | p ← X
                    |   |   |     |   | j ← i
                    |   |   |     |   | Ymin ← Y
                    |   |   |     | break if |x_i| > 1
                    |   |   |     | x_i ← x_i − X
                    |   |   | break if |x_j| > 1
                    |   |   | x_j ← x_j + p
                    |   | D ← D/2
                    | x
```

2.1.3 Анализ полученных результатов

Результатом поиска параметров, обеспечивающих минимум функции аппроксимации, является вектор-столбец

$$x_{opt} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

При переходе к размерным значениям, получим оптимальные параметры подвески автомобиля:

$C_{p1} := 10000$ (Н/м);

$C_{ш1} := 350000$ (Н/м);

$b_1 := 1000$ (Н*м/с);

$b_{ш1} := 1900$ (Н*м/с).

График переходного процесса колебаний автомобиля при оптимальных значениях параметров подвески представлен на рис. 4.

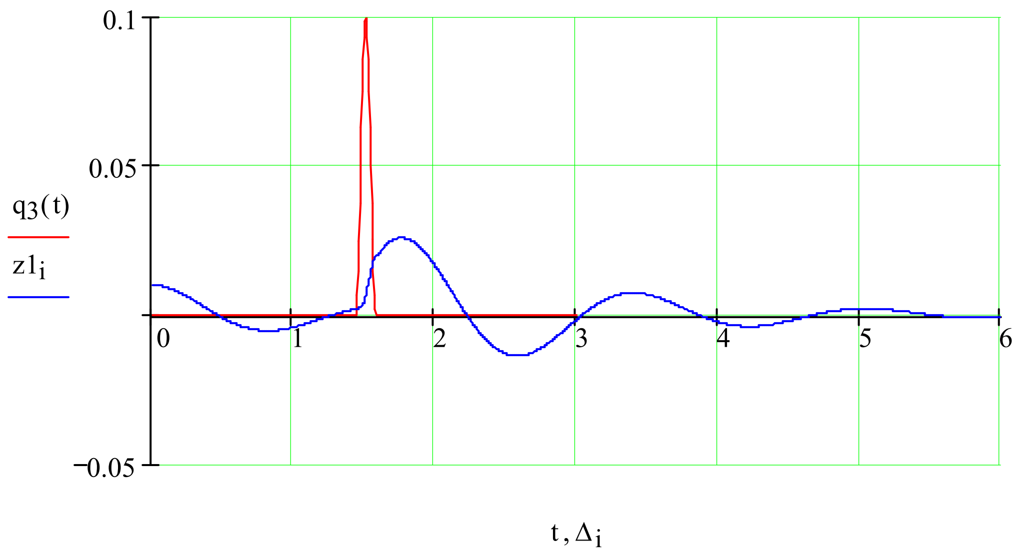

Рис.4 Перемещение подрессоренной части автомобиля при оптимальных параметрах передней подвески

Вопросы для самоконтроля

1. В чём заключается планирование эксперимента?
2. Что является математической моделью объекта исследования?
3. Что называется фактором, какие виды факторов вы знаете?
4. Что такое оптимизация?
5. Как выбираются уровни факторов и интервалы варьирования?

Литература

1. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М.: Наука, 1976. – 280 с.
2. Васильков Ю.В., Василькова Н.Н. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании: Учеб. Пособие. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 256 с.