МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе
__________ О.Г. Локтионова
«28» 10 2020 г.

НАХОЖДЕНИЕ ГАМИЛЬТОНОВА КОНТУРА МИНИМАЛЬНОЙ ДЛИНЫ

Методические указания для выполнения лабораторной работы по дисциплине «Дискретная математика» для студентов направления подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Курск - 2020

УДК 519.71
Составитель: Р.А. Томакова

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент *А.В. Малышев*

Нахождение гамильтонова контура минимальной длины: методические указания для выполнения лабораторной работы по дисциплине «Дискретная математика» для студентов направления подготовки 09.03.04 Программная инженерия/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Р.А. Томакова. Курск, 2020. 15 с.

Составлены в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования направления подготовки 09.03.04 Программная инженерия и на основании учебного плана направления подготовки 09.03.04 Программная инженерия.

В методических указаниях представлены основные алгоритмы оптимизации сетевых структур, необходимые для выполнения лабораторной работы по дисциплине «Дискретная математика». Сформулированы требования для ее выполнения, разобраны примеры выполнения заданий, приведены контрольные вопросы к защите.

Предназначены для студентов, обучающихся направления подготовки 09.03.04 Программная инженерия (профиль «Разработка программно-информационных систем») всех форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 28.10.20 . Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 2,2 . Уч.- изд. л. 2,0. Тираж 25 экз. Заказ. 1390. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

НАХОЖДЕНИЕ ГАМИЛЬТОНОВА КОНТУРА МИНИМАЛЬНОЙ ДЛИНЫ. ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Цель работы:

1. Изучение основных алгоритмов теории графов, предназначенных для практических реализаций в профессиональной деятельности;

2. Приобретение навыков построения структур и исследование функционирования информации на основе графовых моделей.

ЗАДАНИЕ

1. Составить матрицу расстояний для 10 узлов, $d_{12}=n$, где n – номер студента в списке журнала группы. Остальные значения расстояний d_{ij} выбрать произвольно.
2. Привести матрицу расстояний по строкам и столбцам.
3. Найти увеличение оценки снизу для нулевых элементов.
4. Определить длину минимального гамильтонова контура.
5. Построить дерево разбиений.
6. Представить отчет.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Будем считать, что задача коммивояжера задана в виде матрицы. Для получения оценки снизу длин множества всех гамильтоновых контуров воспользуемся тем, что в каждый гамильтонов контур входит только по одному элементу из каждой строки и из каждого столбца матрицы расстояний. Поэтому, если элементы любой строки или любого столбца уменьшить на какое-либо число, то на это же число уменьшаются длины всех гамильтоновых контуров. На этом свойстве основан метод приведения матрицы расстояний.

Приведение матрицы может производиться по строкам и по столбцам. Приведение матрицы расстояний по строкам заключается в том, что из элементов каждой строки i вычитается наименьший элемент этой строки, обозначаемый h_i. При этом длины всех гамильтоновых контуров уменьшаются на сумму вычтенных из каждой строки чисел, то есть на величину $\sum_i h_i$, оставаясь в то же время неотрицательными.

Полученная оценка может быть улучшена путем повторного приведения матрицы расстояний по столбцам. При этом из элементов каждого столбца j приведенной по строкам матрицы расстояний вычитается наименьший элемент этого столбца, обозначаемый g_j.

Уточненная оценка снизу длин гамильтоновых контуров определяется в виде:

$$\hat{g} = \sum_i h_i + \sum_j g_j .$$

Метод приведения матрицы расстояний будем применять и далее для получения оценок снизу различных подмножеств множества гамильтоновых контуров.

Рассмотрим теперь способ разбиения множества гамильтоновых контуров на подмножества. Возьмем некоторую дугу (i, j). К первому подмножеству отнесем все гамильтоновы контуры, в которые эта дуга входит. Обозначим это множество $[(i, j)]$. Ко второму множеству отнесем все гамильтоновы контуры, в которые дуга (i, j) не входит. Это множество обозначим $\overline{[(i, j)]}$.

Таблицы расстояний для множества $\overline{[(i, j)]}$ легко получить, если учесть, что включение дуги (i, j) в гамильтонов контур исключает возможность включения других дуг, стоящих в i строке и j столбце.

Следовательно, таблица расстояний для множества $[(i, j)]$ получается из первоначальной таблицы вычеркиванием i строки и j столбца.

Для того, чтобы получить таблицу расстояний для множества $\overline{[(i, j)]}$, следует в первоначальной таблице запретить движение по дуге (i, j), положив ее длину $= \infty$. Этот запрет движения по дуге (i, j) будем отмечать крестом в соответствующей клетке первоначальной таблицы.

Теперь возникает вопрос, какую дугу положить в основу разбиения множества маршрутов на подмножества? Заметим, прежде всего, что по количеству элементов множества $[(i, j)]$ и $\overline{[(i, j)]}$ не одинаковы. Общее число гамильтоновых контуров в задаче с n городами равно $(n - 1)!$. Если мы зафиксировали дугу (i, j), то есть уже выбрали две вершины, то имеется $n - 2$ способа выбрать третью, $n - 3$ четвертую и так далее. Следовательно, имеется $(n - 2)!$ гамильтоновых контуров, включающих дугу $(i,\ j)$, а значит, $(n - 1)! - (n - 2)! = (n - 2)\ (n - 2)!$ гамильтоновых контуров, не включающих дугу $(i,\ j)$. Поэтому при $n > 2$ множество $\overline{[(i,j)]}$ будет содержать большее число элементов, чем множество $[(i,j)]$. Поскольку множество с меньшим числом элементов исследовать проще, то в качестве дуги $(i,\ j)$ следует брать такую, при которой множество $[(i,j)]$ имеет меньшую оценку, чем множество $\overline{[(i,j)]}$.

Из множества дуг, удовлетворяющих этому условию, следует отдать предпочтение той, которая дает наибольшую разницу в оценках для множеств $[(i,j)]$ и $\overline{[(i,j)]}$.

Если в качестве дуг $(i,\ j)$ брать такую, у которой в приведенной таблице $d_{ij} \neq 0$, то для группы $[(i,j)]$ оценка снизу возрастает на d_{ij}, поскольку заранее известно, что эта дуга войдет во все гамильтоновы контуры. Она может еще возрасти, если таблица при вычеркивании i строки и j столбца будет допускать дальнейшее приведение. В то же время при замене элемента d_{ij} на ∞ таблица решений остается приведенной, то есть оценка снизу для $\overline{[(i,j)]}$ не возрастает. Следовательно, меньшее значение оценки будет для множества $\overline{[(i,j)]}$, что нежелательно. Поэтому в качестве дуги $(i,\ j)$ надо брать такую, у которой в приведенной таблице расстояний $d_{ij} = 0$.

Но таких дуг может быть несколько. Выбираем ту дугу, для которой увеличение оценки для $\overline{[(i,j)]}$ будет наибольшим. При этом получится наибольшая разница в оценках для множеств $[(i,j)]$ и $\overline{[(i,j)]}$.

Обозначим увеличение оценки множеств $[(i,j)]$ через $\Delta(i,\ j)$. Значение этой величины получаем путем сложения наименьших чисел в i-ой строке и в j-ом столбце.

Исключаем соответствующую i-ю строку и j-й столбец из приведенной матрицы расстояний. При получении подобных матриц нужно строго следить за тем, чтобы не могло получиться контуров, не являющихся гамильтоновыми.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Таблица 1.

Исходная матрица расстояний

i	j										h_i
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	X	7	5	6	5	2	8	8	4	2	2
2	4	X	4	4	7	5	1	7	2	3	1
3	7	5	X	6	4	6	3	9	8	8	3
4	2	6	7	X	8	5	6	4	7	5	2
5	5	3	7	5	X	9	3	5	6	7	3
6	8	5	3	2	5	X	4	7	5	2	2
7	3	4	6	4	6	8	X	7	2	4	2
8	8	6	4	8	5	7	2	X	5	9	2
9	7	4	8	9	4	8	5	8	X	4	4
10	4	7	5	3	8	6	2	5	9	X	2

Приведем матрицу расстояний по строкам, для этого в каждой i, i=1,2,…,10 строке найдем минимальный элемент $h_{i.,}$. Затем вычтем это значение из всех элементов соответствующей строки матрицы расстояний. При этом длины всех гамильтоновых контуров уменьшаются на сумму вычтенных из каждой строки чисел, то есть на величину $\sum_i h_i$, оставаясь в то же время неотрицательными. Поэтому величина $\sum_i h_i$ дает некоторую оценку снизу длин всех гамильтоновых контуров, в нашем случае $\sum_{i=1}^{10} h_i = 23$.

После этого приведем матрицу расстояний по столбцам, для этого в каждом столбце j , j=1,2,…,10 найдем минимальный элемент g_j , затем вычтем это значение из всех элементов соответствующего столбца матрицы расстояний, получим $\sum_{j=1}^{10} g_j = 3$.

Уточненная оценка снизу длин гамильтоновых контуров

$$\hat{q} = \sum_i h_i + \sum_j g_j = 23 + 3 = 26$$

Приведенная матрица расстояний по строкам и столбцам имеет вид:

Таблица 2.

Приведенная матрица расстояний на первой итерации

i	j										h_i
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	X	5	2	4	3	0	6	4	2	0	
2	3	X	2	3	6	5	0	4	1	2	
3	4	2	X	3	1	3	0	4	5	5	
4	0	4	4	X	6	3	4	0	5	3	
5	2	0	3	2	X	6	0	0	3	4	
6	6	3	0	0	3	X	2	3	3	0	
7	1	2	3	2	4	6	X	3	0	2	
8	6	4	1	6	3	5	0	X	3	7	
9	3	0	3	5	0	4	1	2	X	0	
10	2	5	2	1	6	4	0	1	7	X	
g_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Найдем наибольшее увеличение оценки для нулевых элементов матрицы расстояний max{ Δ (i,j)=0}

Δ (1,6)=3+0=3;
Δ (1,10)=0+0=0;
Δ (2,7)=0+1=1;
Δ (3,7)=0+1=1;
Δ (4,1)=0+1=1;
Δ (4,8)=0+0=0;
Δ (5,2)= 0+0=0;
Δ (5,7)= 0+0=0;
Δ (5,8)= 0+0=0;
Δ (6,3)=0+1=1;
Δ (6,4)=0+1=1;
Δ (6,10)= 0+0=0;
Δ (7,9)=1+1=2;
Δ (8,7)=0+1=1;
Δ (9,2)= 0+0=0;
Δ (9,5)=0+1=1;
Δ (9,10)= 0+0=0;
Δ (10,7)=0+1=1;

max { Δ (i,j)=0}= Δ (1,6)=3; Значит дуга (1,6) вводится в намечаемый гамильтонов контур. При этом накладываем запрет на (6,1), чтобы не получить контур.

Вычеркиваем в матрице 1-ю строку и 6-й столбец, получаем матрицу расстояний.

Таблица 3.

Преобразованная матрица расстояний после 1-ой итерации

i	j									h_i
	1	2	3	4	5	7	8	9	10	
2	3	X	2	3	6	0	4	1	2	0
3	4	2	X	3	1	0	4	5	5	0
4	0	4	4	X	6	4	0	5	3	0
5	2	0	3	2	X	0	0	3	4	0
6	X	3	0	0	3	2	3	3	0	0
7	1	2	3	2	4	X	3	0	2	0
8	6	4	1	6	3	0	X	3	7	0
9	3	0	3	5	0	1	2	X	0	0
10	2	5	2	1	6	0	1	7	X	0
g_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

$$\sum_{i=1}^{9} h_i = 0;$$

$$\sum_{j=1}^{9} g_j = 0;$$

$$\hat{q} = \sum_i h_i + \sum_j g_j = 0 + 0 = 0;$$

Δ (2,7)=0+1=1;
Δ (3,7)=0+1=1;
Δ (4,1)=0+1=1;
Δ (4,8)=0+0=0;
Δ (5,2)= 0+0=0;
Δ (5,7)= 0+0=0;
Δ (5,8)= 0+0=0;
Δ (6,3)=0+1=1;
Δ (6,4)=0+1=1;
Δ (6,10)= 0+0=0;
Δ (7,9)=1+1=2;
Δ (8,7)=0+1=1;
Δ (9,2)= 0+0=0;

Δ (9,5)=0+1=1;
Δ (9,10)= 0+0=0;
Δ (10,7)=0+1=1.
max{ Δ (i,j)=0} = Δ (7,9)=2, значит дуга (7,9) вводится в намечаемый гамильтонов контур.
Накладываем запрет на (9,7), чтобы не получить контур.
Вычеркиваем в матрице 7-ю строку и 9-й столбец, получаем матрицу

. Таблица 4.

Преобразованная матрица расстояний после 2-ой итерации

i	j								h_i
	1	2	3	4	5	7	8	10	
2	3	X	2	3	6	0	4	2	0
3	4	2	X	3	1	0	4	5	0
4	0	4	4	X	6	4	0	3	0
5	2	0	3	2	X	0	0	4	0
6	X	3	0	0	3	2	3	0	0
8	6	4	1	6	3	0	X	7	0
9	3	0	3	5	0	X	2	0	0
10	2	5	2	1	6	0	1	X	0
g_j	0	0	0	0	0	0	0	0	

$$\sum_{i=1}^{8} h_i = 0$$

$$\sum_{j=1}^{8} g_j = 0;$$

$$\hat{q} = \sum_i h_i + \sum_j g_j = 0 + 0 = 0;$$

Δ (2,7)=0+2=2;
Δ (3,7)=0+1=1;
Δ (4,1)=0+2=2;
Δ (4,8)=0+0=0;
Δ (5,2)= 0+0=0;
Δ (5,7)= 0+0=0;
Δ (5,8)= 0+0=0;
Δ (6,3)=0+1=1;
Δ (6,4)=0+1=1;
Δ (6,10)= 0+0=0;

Δ (8,7)=0+1=1;
Δ (9,2)= 0+0=0;
Δ (9,5)=0+1=1;
Δ (9,10)= 0+0=0;
Δ (10,7)=0+1=1;

max{ Δ (i,j)=0} = Δ (2,7)=2, Δ (4,1)=2, значит дуги (2,7) и (4,1) входят в планируемый минимальный гамильтонов контур.
Накладываем запрет на (9,2) и (6,4), чтобы не получить контур.
Вычеркиваем 2-ю строку и 7-й столбец.
Вычеркиваем 4-ю строку и 1-й столбец, получаем матрицу расстояний.

Таблица 5.

Преобразованная матрица расстояний после 3-ей итерации

i	j						h_i
	2	3	4	5	8	10	
3	2	X	3	1	4	5	1
5	0	3	2	X	0	4	0
6	3	0	X	3	3	0	0
8	4	1	6	3	X	7	1
9	X	3	5	0	2	0	0
10	5	2	1	6	1	X	
g_j	0	0	1	0	0	0	

$$\sum_{i=1}^{6} h_i = 2;$$

$$\sum_{j=1}^{6} g_j = 1;$$

$$\hat{q} = \sum_i h_i + \sum_j g_j = 2 + 1 = 3$$

i	j						h_i
	2	3	4	5	8	10	
3	1	X	1	0	X	4	
5	0	3	1	X	0	4	
6	3	0	X	3	3	X	
8	3	0	4	2	X	6	
9	X	3	4	0	2	0	
10	5	2	0	6	1	X	
g_j							

Δ (3,5)= 0+1=1;
Δ (5,2)=0+1=1;
Δ (5,8)=0+1=1;
Δ (6,3)= 0+0=0;
Δ (6,10)=0+1=1;
Δ (8,3)= 2+0=2;
Δ (9,5)=0+0=0;
Δ (9,10)= 0+0=0;
Δ (10,4)=1+1=2;

max { Δ (i,j)=0}= Δ (8,3)=2, Δ (10,4)=2, значит дуги (8,3) и (10,4) входят в планируемый минимальный гамильтонов контур.
Накладываем запрет на (3,8) и (6,10), чтобы не получить контур.
Вычеркиваем 8-ю строку и 3-й столбец.
Вычеркиваем 10-ю строку и 4-й столбец, получаем матрицу расстояний.

i	j				h_i
	2	5	8	10	
3	1	0	X	4	0
5	0	X	0	4	0
6	3	3	3	X	3
9	X	0	2	0	0
g_j	0	0	0	0	

$$\sum_{i=1}^{4} h_i = 3;$$

$$\sum_{j=1}^{4} g_j = 0;$$

$$\hat{q} = \sum_i h_i + \sum_j g_j = 3 + 0 = 3$$

i	j				h_i
	2	5	8	10	
3	1	0	X	4	
5	0	X	0	4	
6	0	0	0	X	
9	X	0	2	0	
g_j					

Δ (3,5)= 0+1=1;
Δ (5,2)=0+0=0;
Δ (5,8)=0+0=0;
Δ (6,2)= 0+0=0;
Δ (6,5)=0+0=0;
Δ (6,8)= 0+0=0;
Δ (9,5)=0+0=0;
Δ (9,10)= 0+4=4;

max { Δ (i,j)=0}= Δ (9,10)=4, значит дуга (9,10) входит в планируемый минимальный гамильтонов контур.
Накладываем запрет на (6,2), чтобы не получить контур.
Вычеркиваем 9-ю строку и 10-й столбец.

i	j			h_i
	2	5	8	
3	1	0	X	
5	0	X	0	
6	X	X	0	
g_j				

$\sum_{i=1}^{3} h_i = 0$;

$\sum_{j=1}^{3} g_j = 0$;

$\hat{q} = \sum_i h_i + \sum_j g_j = 0 + 0 = 0$;

Δ (3,5)=0+1=1;
Δ (5,2)= 0+1=1;

Δ (5,8)=0+0=0;
Δ (6,5)=0+0=0;

max { Δ (i,j)=0}= Δ (3,5)=1, Δ (5,2)=1. Дуги (3,5) и (5,2) входят в планируемый минимальный гамильтонов контур.
Накладываем запрет на (6,3) и (6,5), чтобы не получить контур.
Вычеркиваем 3-ю строку и 5-й столбец.
Вычеркиваем 5-ю строку и 2-й столбец.

i	j	h_i
	8	
6	0	
g_j		

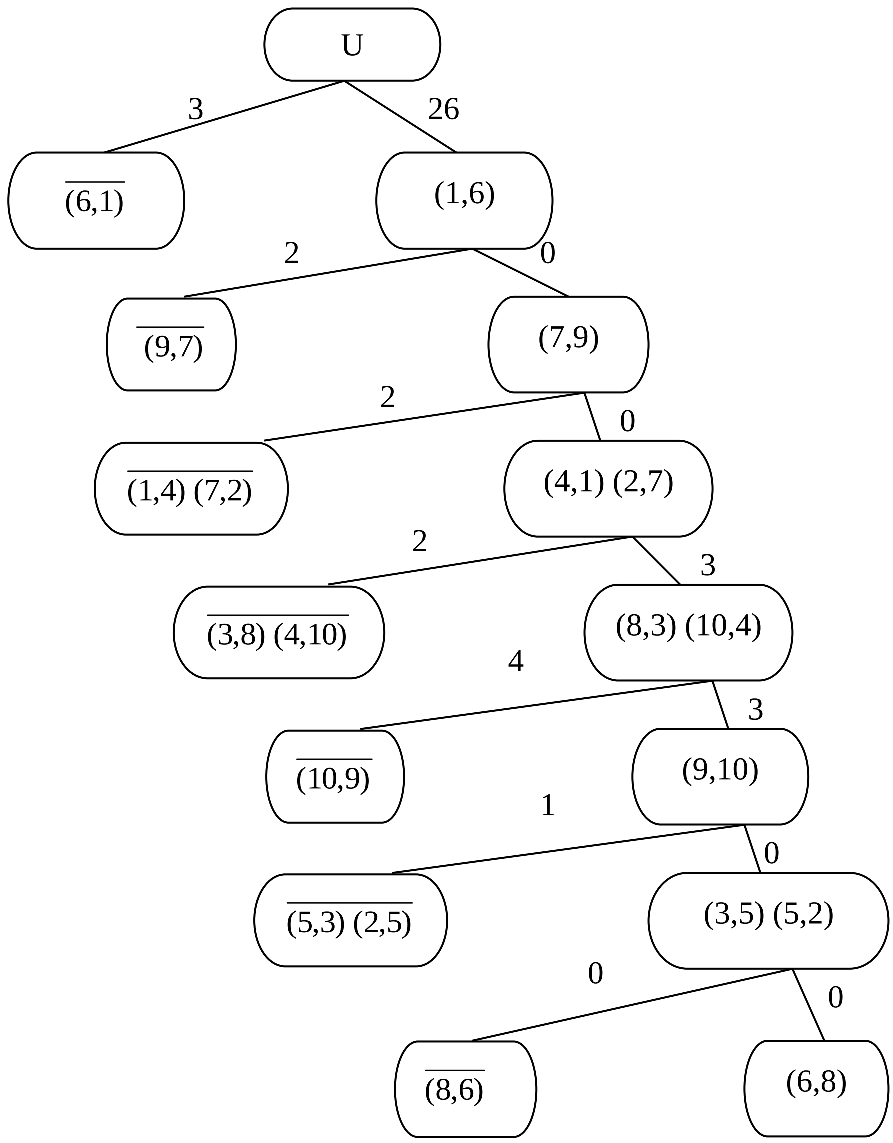
Для замыкания цепи не хватает дуги (6,8), ее вводим в гамильтонов контур.

$\hat{\hat{q}} = \sum_i h_i + \sum_j g_j = 0 + 0 = 0$;

(1,6)
Δ (1,6) = 3; $\hat{q} = 26$
(7,9)
Δ (7,9) = 2; $\hat{q} = 0$
(4,1) (2,7)
Δ (4,1) = 2; Δ (2,7) = 2; $\hat{q} = 0$
(8,3) (10,4)
Δ (8,3) = 2; Δ (10,4) = 2; $\hat{q} = 3$
(9,10)
Δ (9,10) = 4; $\hat{q} = 3$
(3,5) (5,2)
Δ (3,5) = 1; Δ (5,2) = 1; $\hat{q} = 0$
(6,8)
Δ (6,8) = 0; $\hat{q} = 0$

Получаем оптимальный гамильтонов контур:
(8,3), (3,5), (5,2), (2,7), (7,9), (9,10), (10,4), (4,1), (1,6), (6,8)
Длина минимального гамильтонова контура
$l = 2 + 2 + 2 + 1 + 4 + 3 + 4 + 4 + 3 + 7 = 32.$

Дерево разбиений, строящееся по ходу решения задачи, будет иметь вид:



Контрольные вопросы

1. Что называется гамильновым контуром?
2. Какими свойствами должен обладать граф, чтобы можно было найти гамильтонов контур?
3. Как определяется уточненная оценка снизу длин гамильтоновых контуров?
4. Как определяется наибольшее увеличение оценки для нулевых элементов матрицы расстояний?
5. На основании какого критерия анализируют возможность принадлежности дуги к минимальному гамильнову контуру?

6. Как рассчитывается длина минимального гамильтонова контура?
7. Как строится дерево разбиений?