0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное бюджетное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_______ О.Г. Локтионова
«___» _______ 2013 г.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД АДАМСА И РУНГЕ-КУТТА

Методические указания по выполнению лабораторной работы

КУРСК 2013

УДК 519

Составитель Е.А.Бойцова

Рецензент
Кандидат пед. наук, доцент Л.И. Студеникина

Численное решение дифференциальных уравнений. Метод Адамса и Рунге-Кутта: методические указания по выполнению лабораторной работы/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.А.Бойцова. Курск, 2013. 12 с.: ил. 4, табл. 1. Библиогр.: с.18.

Излагаются основные численные методы решения задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения: метод Адамса и метод Рунге-Кутта. Проводится разбор примеров с применением программного продукта MATHCAD.
Методические указания предназначены для студентов всех специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 0,7. Уч.-изд. л. 0,6. Тираж ___ экз. Заказ ___. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Цель работы: 1. Изучение основных положений теории дифференциальных уравнений.
2. Изучение основных численных методов решения задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения.
3. Изучение методов Адамса и Рунге-Кутта решения обыкновенного дифференциального уравнения.
4. Разработка алгоритма, программы и решение на ЭВМ обыкновенного дифференциального уравнения методами Рунге-Кутта и Адамса.

I. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1. **Основные понятия. Задача Коши.**

Определение: Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее функцию $y(x)$, аргумент x и производные функции $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

В общем случае дифференциальное уравнение можно записать в виде $F(x,y',y',\dots,y^{(n)})=0$.

Так как искомая функция $y=y(x)$, фигурирующая в уравнении, есть функция одного аргумента, то дифференциальное уравнение называют в этом случае *обыкновенным дифференциальным уравнением.*

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид $F(x,y,y')=0$. Уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, будет иметь вид:

$$y'=f(x,y) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad (1.1)$$

Обычно такое уравнение имеет бесконечно много решений $y=y(x)$, и выделение одного конкретного (частного) решения осуществляется предъявлением к решению дополнительных требований. Часто, например, ставится так называемая задача Коши: среди всех решений дифференциального уравнения

$$y'=f(x,y)$$

найти такое решение $y = y(x)$, которое при заданном значении $x = x_0$ аргумента принимает заданное значение y_0:

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.2}$$

Числа x_0, y_0 называются при этом начальными данными, а условие (1.2) - начальным условием.

Равенство $\Phi(x, y, C) = 0$, неявно задающее общее решение, называется общим интегралом дифференциального уравнения.

Определение: Частным решением называется любая функция $y = \varphi(x, C_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi(x, C)$, если в последнем придать C конкретное значение $C=C_0$.

Соотношение $\Phi(x, y, C_0) = 0$ называется в этом случае частным интегралом.

2. Метод Рунге-Кутта для решения задачи Коши

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$y'=f(x,y) \tag{2.1}$$

при начальном условии $y=y_0$ при $x=x_0$.

Требуется на данном промежутке $x_0 \le x \le X$ найти решение $y(x)$ уравнения (2.1) с заданной степенью точности ε. Для этого выберем шаг вычислений $h = \dfrac{X - x_0}{n}$, деля отрезок $[x_0, X]$ на n равных частей так, чтобы $h^4<\varepsilon$. Точки деления отрезка определим по формуле $x_i=x_0+i \cdot h$ (i=0,1,2,3,…,n). Соответствующие значения $y_i=y(x_i)$ искомой функции по методу Рунге-Кутта последовательно вычисляются по формулам:

$$y_{i+1}=y_i+\Delta y_i,$$

где $\Delta y_i = \dfrac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right)$, i=0,1,2,…,n,

$$k_1^{(i)} = f\left(x_i, y_i\right) \cdot h,$$
$$k_2^{(i)} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right) \cdot h,$$
$$k_3^{(i)} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right) \cdot h, \qquad (2.2)$$
$$k_4^{(i)} = f\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}\right) \cdot h.$$

Грубую оценку погрешности метода Рунге-Кутта на данном промежутке $[x_0, X]$ можно получить, исходя из принципа Рунге:

$R = \dfrac{\left|y_{2m} - \tilde{y}_m\right|}{15}$, где $n=2m$, y_{2m}, $\tilde{y}_m$ результаты вычислений по схеме (2.2) с шагом h и $2h$.

3. Метод Адамса для решения задачи Коши

Для решения уравнения (2.1) по методу Адамса, исходя из начальных условий $y(x_0) = y_0$ мы находим методом Рунге-Кутта следующие три значения искомой функции $y(x)$:

$y_1 = y(x_1) = y(x_0+h)$, $y_2 = y(x_2) = y(x_0+2h)$, $y_3 = y(x_3) = y(x_0+3h)$

Находим далее величины

$$q_0 = h \cdot y_0' = h \cdot f\left(x_0, y_0\right), \qquad q_1 = h \cdot y_1' = h \cdot f\left(x_1, y1\right),$$
$$q_2 = h \cdot y_2' = h \cdot f\left(x_2, y_2\right), \qquad q_3 = h \cdot y_3' = h \cdot f\left(x_3, y_3\right).$$

Составим диагональную таблицу конечных разностей значений q:

x_n	y_n	$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$	$y_n' = f(x_n, y_n)$	$q_n = y_n' \cdot h$	$\Delta q_n = q_{n+1} - q_n$	$\Delta^2 q_n = \Delta q_{n+1} - \Delta q_n$	$\Delta^3 q_n = \Delta^2 q_{n+1} - \Delta^2 q_n$
x_0	y_0	Δy_0	$f(x_0,y_0)$	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
x_1	y_1	Δy_1	$f(x_1,y_1)$	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	$\Delta^3 q_1$
x_2	y_2	Δy_2	$f(x_2,y_2)$	q_2	Δq_2	$\Delta^2 q_2$	$\Delta^3 q_2$
x_3	y_3	Δy_3	$f(x_3,y_3)$	q_3	Δq_3	$\Delta^2 q_3$	
x_4	y_4	Δy_4	$f(x_4,y_4)$	q_4	Δq_4		
x_5	y_5	Δy_5	$f(x_5,y_5)$	q_5			
x_6	y_6		$f(x_6,y_6)$				

Метод Адамса заключается в продолжении диагональной таблицы разностей с помощью формулы Адамса

$$\Delta y_i = q_i + \frac{1}{2}\Delta q_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{i-3} \qquad (3.\ 1)$$

Полагая в формуле (3.1) i=3, вычисляем

$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0$. Найдя Δy_3, вычисляем $y_4=y_3+\Delta y_3$. Зная x_4 и y_4 , находим $q_4=h\cdot f(x_4,y_4)$ и вносим значения y_4, Δy_3 и q_4 в таблицу разностей и пополняем её конечными разностями Δq_3, $\Delta^2 q_2$, $\Delta^3 q_1$, расположенными вместе с q_4 по новой диагонали, параллельно прежней и т.д. Аналогично находится диагональ q_5, Δq_4, $\Delta^2 q_3$, $\Delta^3 q_2$. С помощью этой диагонали мы находим значение y_6 искомого решения $y(x)$.

II. ЗАДАНИЕ

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Таблица 1

№	Уравнение	Начальные условия
1	$y' = \frac{y+1}{x}$	y=0 при x=0
2	$2xy\,y'+x^2-y^2=0$	y=0 при x=1
3	$e^{x-y}y'=1$	y=1 при x=1
4	$y'ctgx+y=2$	y=2 при x=0
5	$e^y(y'+1)=1$	y=0 при x=0
6	$y'+y=cosx$	y=0,5 при x=0
7	$y'-2y=-x^2$	y=0,25 при x=0
8	$y'+y=2x$	y=-1 при x=0
9	$x\,y'=y$	y=1 при x=1
10	$2x\,y'=y$	y=1 при x=1
11	$2xy\,y'+x^2-y^2=0$	y=0 при x=0
12	$x\,y'=y$	y=0 при x=0
13	$2x\,y'=y$	y=0 при x=0
14	$2xy\,y'+x^2-y^2=0$	y=1 при x=0
15	$x\,y'+y-e^x=0$	y=1 при x=0

III. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка $y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0$, при заданных начальных условиях y=0 при x=0. Требуется на данном промежутке $0 \le x \le 1$ найти решение $y(x)$ уравнения $y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0$ с заданной степенью точности ε=0,001. Для этого выберем шаг вычислений $h = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$, деля отрезок [0, 1] на 6 равных частей так, чтобы $h^4<\varepsilon$ (0,00077<0,001). Точки деления отрезка определим по формуле $x_i=0+i\cdot 0{,}167$ (i=0,1,2,3,…,6). Соответствующие значения $y_i=y(x_i)$ искомой функции по методу Рунге-Кутта последовательно вычисляются по формулам: $y_{i+1}=y_i+\Delta y_i$, где $\Delta y_i = \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right)$, i=0,1,2,…,6,

$$k_1^{(i)} = f\left(x_i, y_i\right)\cdot h,$$

$$k_2^{(i)} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right)\cdot h,$$

$$k_3^{(i)} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right)\cdot h,$$

$$k_4^{(i)} = f\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}\right)\cdot h.$$

Применение программного продукта MathCad

$$f(x,y) := 1 + x + \frac{y}{1-x^2}$$

$$x_0 := 0 \qquad y_0 := 0 \qquad h := \frac{1}{6} \qquad h = 0.167 \qquad i := 0..6 \qquad x_i := x_0 + i\cdot h$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.167 \\ 0.333 \\ 0.5 \\ 0.667 \\ 0.833 \\ 1 \end{pmatrix}$$

вычисляем коэффициенты:

$$k_1^{(i)} = f(x_i, y_i) \cdot h,$$
$$k_2^{(i)} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right) \cdot h,$$
$$k_3^{(i)} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right) \cdot h,$$
$$k_4^{(i)} = f\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}\right) \cdot h.$$

Для $i := 0$ найдём

$$k_1 := f(x_0, y_0) \cdot h \qquad k_1 = 0.167$$

$$k_2 := f\left[\left(x_0 + \frac{h}{2}\right), y_0 + \frac{k_1}{2}\right] \cdot h \qquad k_2 = 0.195$$

$$k_3 := f\left[\left(x_0 + \frac{h}{2}\right), y_0 + \frac{k_2}{2}\right] \cdot h \qquad k_3 = 0.197$$

$$k_4 := f\left[\left(x_0 + h\right), y_0 + k_3\right] \cdot h \qquad k_4 = 0.228$$

Тогда $\Delta Y_0 := \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)$ $\quad \Delta Y_0 = 0.196$

$y_1 := y_0 + \Delta Y_0 \qquad y_1 = 0.196$

Для $i := 1$ найдём

$k_1 := f(x_1, y_1) \cdot h \qquad k_1 = 0.228$

$$k_2 := f\left[\left(x_1 + \frac{h}{2}\right), y_1 + \frac{k_1}{2}\right] \cdot h \qquad k_2 = 0.264$$

$$k_3 := f\left[\left(x_1 + \frac{h}{2}\right), y_1 + \frac{k_2}{2}\right] \cdot h \qquad k_3 = 0.267$$

$$k_4 := f[(x_1 + h), y_1 + k_3] \cdot h \qquad k_4 = 0.309$$

Тогда $\Delta Y_1 := \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)$ $\quad \Delta Y_1 = 0.266$

$y_2 := y_1 + \Delta Y_1 \qquad y_2 = 0.463$

Для $i := 2$ найдём

$k_1 := f(x_2, y_2) \cdot h \qquad k_1 = 0.309$

$$k_2 := f\left[\left(x_2 + \frac{h}{2}\right), y_2 + \frac{k_1}{2}\right] \cdot h \qquad k_2 = 0.361$$

$$k_3 := f\left[\left(x_2 + \frac{h}{2}\right), y_2 + \frac{k_2}{2}\right] \cdot h \qquad k_3 = 0.366$$

$$k_4 := f\left[\left(x_2 + h\right), y_2 + k_3\right] \cdot h \qquad k_4 = 0.434$$

Тогда $\Delta Y_2 := \frac{1}{6} \cdot \left(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\right)$ $\qquad \Delta Y_2 = 0.366$

$$y_3 := y_2 + \Delta Y_2 \qquad y_3 = 0.828$$

Для $i := 3$ найдём

$$k_1 := f\left(x_3, y_3\right) \cdot h \qquad k_1 = 0.434$$

$$k_2 := f\left[\left(x_3 + \frac{h}{2}\right), y_3 + \frac{k_1}{2}\right] \cdot h \qquad k_2 = 0.528$$

$$k_3 := f\left[\left(x_3 + \frac{h}{2}\right), y_3 + \frac{k_2}{2}\right] \cdot h \qquad k_3 = 0.54$$

$$k_4 := f\left[\left(x_3 + h\right), y_3 + k_3\right] \cdot h \qquad k_4 = 0.688$$

Тогда $\Delta Y_3 := \frac{1}{6} \cdot \left(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\right)$ $\qquad \Delta Y_3 = 0.543$

$$y_4 := y_3 + \Delta Y_3 \qquad y_4 = 1.371$$

Для $i := 4$ найдём

$$k_1 := f\left(x_4, y_4\right) \cdot h \qquad k_1 = 0.689$$

$$k_2 := f\left[\left(x_4 + \frac{h}{2}\right), y_4 + \frac{k_1}{2}\right] \cdot h \qquad k_2 = 0.945$$

$$k_3 := f\left[\left(x_4 + \frac{h}{2}\right), y_4 + \frac{k_2}{2}\right] \cdot h \qquad k_3 = 0.994$$

$$k_4 := f\left[\left(x_4 + h\right), y_4 + k_3\right] \cdot h \qquad k_4 = 1.596$$

Тогда $\Delta Y_4 := \frac{1}{6} \cdot \left(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\right)$ $\qquad \Delta Y_4 = 1.027$

$$y_5 := y_4 + \Delta Y_4 \qquad y_5 = 2.399$$

Для $i := 5$ найдём

$$k_1 := f\left(x_5, y_5\right) \cdot h \qquad k_1 = 1.614$$

$$k_2 := f\left[\left(x_5 + \frac{h}{2}\right), y_5 + \frac{k_1}{2}\right] \cdot h \qquad k_2 = 3.665$$

$$k_3 := f\left[\left(x_5 + \frac{h}{2}\right), y_5 + \frac{k_2}{2}\right] \cdot h \qquad k_3 = 4.735$$

$$k_4 := f\left[\left(x_5 + h\right), y_5 + k_3\right] \cdot h \qquad k_4 = 5.354 \times 10^{15}$$

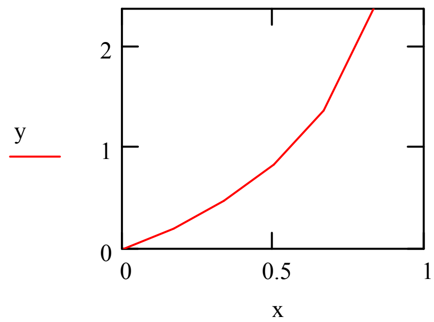
Тогда $\Delta Y_5 := \frac{1}{6} \cdot \left(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\right)$ $\qquad \Delta Y_5 = 8.924 \times 10^{14}$

$$y_6 := y_5 + \Delta Y_5 \qquad y_6 = 8.924 \times 10^{14}$$

Окончательно имеем:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.167 \\ 0.333 \\ 0.5 \\ 0.667 \\ 0.833 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.196 \\ 0.463 \\ 0.828 \\ 1.371 \\ 2.399 \\ 8.924 \times 10^{14} \end{pmatrix} \qquad \Delta Y = \begin{pmatrix} 0.196 \\ 0.266 \\ 0.366 \\ 0.543 \\ 1.027 \\ 8.924 \times 10^{14} \end{pmatrix}$$

Построим график искомой функции на отрезке [0,1]



Для решения по методу Рунге-Кутта можно воспользоваться так же готовой программой в среде MathCad «Метод Рунге-Кутта», которая имеет следующий вид:

$$f(x,y) := \frac{y}{1-x^2} + 1 + x \qquad a := 0 \qquad b := 1 \qquad x_0 := a \qquad n := 6 \qquad y_0 := 0$$

$$h := \frac{b - x_0}{n} \qquad h = 0.167 \qquad i := 0..6 \qquad x_i := x_0 + i \cdot h$$

$$
M := \left|
\begin{array}{l}
y_0 \leftarrow 0 \\
\text{for } \ i \in 0..5 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
k_{i,1} \leftarrow f\left(x_i, y_i\right) \cdot h \\
k_{i,2} \leftarrow f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_{i,1}}{2}\right) \cdot h \\
k_{i,3} \leftarrow f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_{i,2}}{2}\right) \cdot h \\
k_{i,4} \leftarrow f\left(x_i + h, y_i + k_{i,3}\right) \cdot h \\
\Delta y_i \leftarrow \dfrac{1}{6} \cdot \left(k_{i,1} + 2 \cdot k_{i,2} + 2 \cdot k_{i,3} + k_{i,4}\right) \\
y_{i+1} \leftarrow y_i + \Delta y_i
\end{array}
\right. \\
M_1 \leftarrow k \\
M_2 \leftarrow \Delta y \\
M_3 \leftarrow y \\
M
\end{array}
\right.
$$

$k := M_1 \qquad \Delta y := M_2 \qquad y := M_3$

$$
k = \begin{pmatrix}
0 & 0.167 & 0.195 & 0.197 & 0.228 \\
0 & 0.228 & 0.264 & 0.267 & 0.309 \\
0 & 0.309 & 0.361 & 0.366 & 0.434 \\
0 & 0.434 & 0.528 & 0.54 & 0.688 \\
0 & 0.689 & 0.945 & 0.994 & 1.596 \\
0 & 1.614 & 3.665 & 4.735 & 5.354 \times 10^{15}
\end{pmatrix}
\qquad
\Delta y = \begin{pmatrix}
0.196 \\ 0.266 \\ 0.366 \\ 0.543 \\ 1.027 \\ 8.924 \times 10^{14}
\end{pmatrix}
\qquad
y = \begin{pmatrix}
0 \\ 0.196 \\ 0.463 \\ 0.828 \\ 1.371 \\ 2.399 \\ 8.924 \times 10^{14}
\end{pmatrix}
$$

Рассмотрим далее решение этой задачи по методу Адамса, исходя из начальных условий $y(0)=0$ мы запишем, найденные методом Рунге-Кутта, следующие три значения искомой функции $y(x)$:

$y_0 = y(0)=0$, $y_1=0{,}196$, $y_2=0{,}463$, $y_3= 0{,}828$

Находим далее величины

$$q_0 = h\cdot y_0' = h\cdot f(x_0, y_0), \qquad q_1 = h\cdot y_1' = h\cdot f(x_1, y1),$$

$$q_2 = h\cdot y_2' = h\cdot f(x_2, y_2), \qquad q_3 = h\cdot y_3' = h\cdot f(x_3, y_3).$$

Используя программный продукт MathCad найдём

$$q_0 := h\cdot f(x_0, y_0) \qquad q_0 = 0.167$$

$$q_1 := h\cdot f(x_1, y_1) \qquad q_1 = 0.228$$

$$q_2 := h\cdot f(x_2, y_2) \qquad q_2 = 0.309$$

$$q_3 := h\cdot f(x_3, y_3) \qquad q_3 = 0.434$$

Составим диагональную таблицу конечных разностей значений *q:*

	x_n	y_n	$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$	$y_n' = f(x_n, y_n)$	$q_n = y_n'\cdot h$	$\Delta q_n = q_{n+1} - q_n$	$\Delta^2 q_n = \Delta q_{n+1} - \Delta q_n$	$\Delta^3 q_n = \Delta^2 q_{n+1} - \Delta^2 q_n$
0	0	0	0,196	1	0,167	0,061	0,02	0,24
1	0,167	0,196	0,266	1,365	0,228	0,081	0,044	
2	0,333	0,463	0,366	1,85	0,309	0,125		
3	0,5	0,828		2,598	0,434			
4	0,667							
5	0,833							
6	1							

Метод Адамса заключается в продолжении диагональной таблицы разностей с помощью формулы Адамса

$$\Delta y_i = q_i + \frac{1}{2}\Delta q_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{i-3}$$

Используя программный продукт MathCad найдём

$q_3 = 0.434 \qquad \Delta q2 := 0.434 \quad \Delta 2q1 := 0.044 \quad \Delta 3q0 := 0.2$

$$\Delta y3 := q_3 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Delta q2 + \left(\frac{5}{12}\right) \cdot \Delta 2q1 + \left(\frac{3}{8}\right) \cdot \Delta 3q0$$

$\Delta y3 = 0.759 \qquad y_4 := y_3 + \Delta y3 \qquad y_4 = 1.588$

$q_4 := h \cdot f(x_4, y_4) \qquad q_4 = 0.754$

вносим значения y_4=1,588, Δy_3=0,759 и q_4=0,754 в таблицу разностей и пополняем её конечными разностями Δq_3, $\Delta^2 q_2$, $\Delta^3 q_1$, расположенными вместе с q_4 по новой диагонали, параллельно прежней.

	x_n	y_n	$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$	$y'_n = f(x_n, y_n)$	$q_n = y'_n \cdot h$	$\Delta q_n = q_{n+1} - q_n$	$\Delta^2 q_n = \Delta q_{n+1} - \Delta q_n$	$\Delta^3 q_n = \Delta^2 q_{n+1} - \Delta^2 q_n$
0	0	0	0,196	1	0,167	0,061	0,02	0,24
1	0,167	0,196	0,266	1,365	0,228	0,081	0,044	0,151
2	0,333	0,463	0,366	1,85	0,309	0,125	0,195	
3	0,5	0,828	0,759	2,598	0,434	0,32		
4	0,667	1,588		4,515	0,754			
5	0,833							
6	1							

Аналогично находится диагональ $q_5, \Delta q_4, \Delta^2 q_3, \Delta^3 q_2$.

$q_4 = 0.754 \qquad \Delta q3 := 0.32 \qquad \Delta 2q2 := 0.195 \quad \Delta 3q1 := 0.151$

$$\Delta y4 := q_4 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Delta q3 + \left(\frac{5}{12}\right) \cdot \Delta 2q2 + \left(\frac{3}{8}\right) \cdot \Delta 3q1$$

$\Delta y4 = 1.052 \qquad y_5 := y_4 + \Delta y4 \qquad y_5 = 2.64$

$q_5 := h \cdot f(x_5, y_5) \qquad q_5 = 1.746$

	x_n	y_n	$\Delta y_n =$ $= y_{n+1} - y_n$	$y_n' =$ $=f(x_n, y_n)$	$q_n =$ $= y_n' \cdot h$	$\Delta q_n =$ $= q_{n+1} - q_n$	$\Delta^2 q_n =$ $=\Delta q_{n+1} - \Delta q_n$	$\Delta^3 q_n =$ $=\Delta^2 q_{n+1} - \Delta^2 q_n$
0	0	0	0,196	1	0,167	0,061	0,02	0,24
1	0,167	0,196	0,266	1,365	0,228	0,081	0,044	0,151
2	0,333	0,463	0,366	1,85	0,309	0,125	0,195	0,531
3	0,5	0,828	0,759	2,598	0,434	0,32	0,682	
4	0,667	1,588	1,052	4,515	0,754	1,002		
5	0,833	2,64		10,515	1,756			
6	1							

С помощью этой диагонали мы находим значение y_6 искомого решения $y(x)$.

$q_5 = 1.746 \qquad \Delta q_4 := 1.002 \quad \Delta 2 q_3 := 0.682 \quad \Delta 3 q_2 := 0.53$

$$\Delta y_5 := q_5 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Delta q_4 + \left(\frac{5}{12}\right) \cdot \Delta 2 q_3 + \left(\frac{3}{8}\right) \cdot \Delta 3 q_2$$

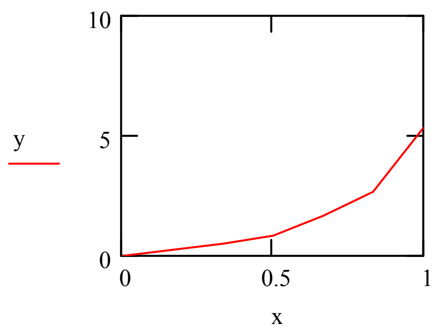
$\Delta y_5 = 2.73 \qquad y_6 := y_5 + \Delta y_5 \qquad y_6 = 5.37$

	x_n	y_n	$\Delta y_n =$ $= y_{n+1} - y_n$	$y_n' =$ $=f(x_n, y_n)$	$q_n =$ $= y_n' \cdot h$	$\Delta q_n =$ $= q_{n+1} - q_n$	$\Delta^2 q_n =$ $=\Delta q_{n+1} - \Delta q_n$	$\Delta^3 q_n =$ $=\Delta^2 q_{n+1} - \Delta^2 q_n$
0	0	0	0,196	1	0,167	0,061	0,02	0,24
1	0,167	0,196	0,266	1,365	0,228	0,081	0,044	0,151
2	0,333	0,463	0,366	1,85	0,309	0,125	0,195	0,531
3	0,5	0,828	0,759	2,598	0,434	0,32	0,682	
4	0,667	1,588	1,052	4,515	0,754	1,002		
5	0,833	2,64	2,73	10,515	1,756			
6	1	5,37						

Получили искомую функцию, заданную таблично.

x	0	0,167	0,333	0,5	0,667	0,833	1
y	0	0,196	0,463	0,828	1,588	2,64	5,37

Построим график искомой функции на отрезке [0,1]



IV. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется дифференциальным уравнением?
2. Какое уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением?
3. Какое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением?
4. Определение частного и общего решения дифференциального уравнения.
5. Задача Коши.
6. Метод Рунге-Кутта.
7. Метод Адамса.

Библиографический список

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст] : учебное пособие. Т. 1 / Н. С. Пискунов. - изд., стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2007. - 416 с. - ISBN 5-89602-012-0

4. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу [Текст] : учебное пособие / Григорий Иванович Запорожец. - 6-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2010. - 464 с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 978-5-8114-0912-9 :