МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»

Кафедра управления качеством, метрологии и сертификации

УТВЕРЖДАЮ
Первый проректор-
проректор по учебной работе
____________ Е.А. Кудряшов
« 16 » декабря ______ 2011 г.

РЕШЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Методические указания по выполнению лабораторной работы
по дисциплине «Компьютерное моделирование производственных
и технологических процессов»
для обучающихся по направлению
552200 (200500.68) «Метрология, стандартизация и сертификация»
магистерской программы
552215 «Всеобщее управление качеством»

Курск 2011

УДК 519.17

Составители: О.В. Аникеева, А.Г. Ивахненко

Рецензент
Доктор технических наук, профессор кафедры
«Машиностроительные технологии и оборудование» А.И. Ремнев

Решение производственных задач методами математического программирования: методические указания по выполнению лабораторной работы по дисциплине «Компьютерное моделирование производственных и технологических процессов» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: О.В. Аникеева, А.Г. Ивахненко. Курск, 2011. 27 с. Библиогр.: с. 27.

Излагаются краткие теоретические сведения по математическому программированию. Приводятся варианты задания, а также примеры их выполнения.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утвержденной учебно-методическим объединением по направлению «Метрология, стандартизация и сертификация».

Предназначены для обучающихся по направлению 552200 (200500.68) «Метрология, стандартизация и сертификация» магистерской программы 552215 «Всеобщее управление качеством» очной формы обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч. - изд. л. . Тираж 20 экз. Заказ .
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1 Цель работы

Решение производственных задач, сводимых к задачам математического программирования.

При выполнении индивидуального задания рекомендуется обратить особое внимание на возможность решения задач несколькими способами, в том числе, с помощью программной среды Maple.

2 Задание

По указанным преподавателем вариантам решить:

1) задачу планирования работы предприятия:

- составить математическую модель задачи;
- решить задачу графическим способом и в Maple;
- проанализировать решение, сделать вывод.

2) транспортную задачу:

- составить матричную модель задачи;
- составить математическую модель задачи;
- построить начальный план перевозок методом северо-западного угла и определить его общую стоимость;
- методом потенциалов найти оптимальный план распределения и определить его общую стоимость;
- проанализировать решение, сделать вывод.

3) задачу нелинейного программирования:

- составить математическую модель задачи;
- решить задачу графическим способом;
- решить задачу методом множителей Лагранжа в Maple;
- проанализировать решение, сделать вывод.

3 Краткие теоретические положения

3.1 Задачи линейного программирования

Постановка задач линейного программирования заключается в нахождении экстремума (максимума или минимума) линейной целевой функции

$$f(x_1 ... x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$$

при ограничениях (условиях):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j \le b_i,\ i = 1..m,$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1..n \quad ,$$

где $a_{i,j}$, b_i, c_j – заданные постоянные величины.

Для решения таких задач используют симплекс-метод, рассмотренный в лекционном курсе, применимый при любом количестве независимых переменных x_j. В том случае, если количество независимых переменных n=2, то возможно применение графического метода решения таких задач.

Существуют разновидности задач линейного программирования – целочисленное линейное программирование (независимые переменные являются целыми числами), линейное программирование с булевыми переменными (независимые переменные могут принимать только два значения: 1 – истина, 0 - ложь) и др.

Рассмотрим постановку различных производственных задач, решение которых основано на применении линейного программирования.

3.1.1 Задача загрузки оборудования

Рассмотрим задачу планирования работы предприятия, выпускающего продукцию двух видов – *A* и *B*. Трудоемкость обработки каждого изделия на соответствующей машине, а также полезный фонд времени работы указаны в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Задание

Машина	Наименование продукта		Полезный фонд времени машины
	A	*B*	
1	2	3	6000
2	2	1	4000

Доход от реализации единицы продукта А составляет 0,5 ден.ед., единицы продукта В – 0,4 ден.ед. Необходимо разработать план работы предприятия на неделю, позволяющий максимизировать доход на имеющихся мощностях.

Обозначим через x_1 искомый выпуск за неделю продукта *A*, x_2 – соответственно продукта *B*.

По таблице 3.1 можно построить следующую систему ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6000, \\ 2x_1 + x_2 \le 4000, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Суммарный доход, описывающий целевую функцию решаемой задачи, линейно зависит от количества единиц произведенной продукции и записывается в виде:

$$F(x) = 0{,}5x_1 + 0{,}4x_2 \to \max.$$

Воспользуемся графическим методом решения задачи (рис.3.1).

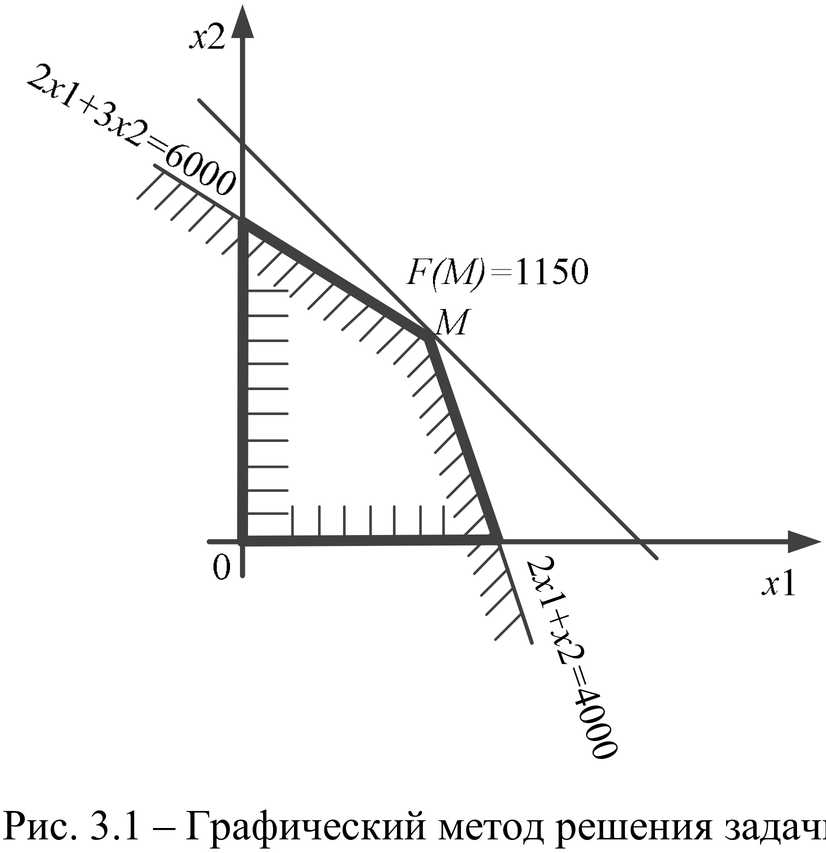

Рис. 3.1 – Графический метод решения задачи

Область поиска экстремума ограничена координатными осями $(0, x_1)$, $(0, x_2)$ и прямыми $2x_1+3x_2=6000$, $2x_1+x_2=4000$.

Вывод. Наибольшее значение целевой функции $z = F(x)$ достигается в точке M, где $F(x)$=1150 ден.ед. и соответствует выпуску продукции A в количестве 1500 единиц, B – 1000 единиц за неделю.

3.1.2 Транспортная задача

С помощью линейного программирования решается и т.н. транспортная задача, постановка которой заключается в нахождении экстремума линейной целевой функции

$$f(x_{1,1}..x_{m,n}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} \cdot x_{i,j} \to \min$$

при ограничениях (условиях) по потребностям, запасам и неотрицательности:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1..n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1..m,\ x_{ij} \ge 0,$$

где a_i, b_j, c_{ij} – заданные постоянные величины, причем выполняется условие общего баланса: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, т.е. суммарные запасы грузов поставщиков равны суммарным потребностям потребителей (такую задачу называют закрытой).

Для наглядности условие транспортной задачи представляют с помощью распределительной таблицы (табл.3.2), которую называют табличной или матричной моделью транспортной задачи [1].

Таблица 3.2

Матричная модель транспортной задачи

<table>
<tr><td rowspan="3">Поставщики</td><td colspan="4">Потребители</td><td rowspan="3">Запас груза a_i</td></tr>
<tr><td>B_1</td><td>B_2</td><td>…</td><td>B_n</td></tr>
<tr><td colspan="4">Затраты на перевозку 1 ед. груза, доставка</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>c_{11}
x_{11}</td><td>c_{12}
x_{12}</td><td>…</td><td>c_{1n}
x_{1n}</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>c_{21}
x_{21}</td><td>c_{22}
x_{22}</td><td>…</td><td>c_{2n}
x_{2n}</td><td>a_2</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>A_m</td><td>c_{m1}
x_{m1}</td><td>c_{m2}
x_{m2}</td><td>…</td><td>c_{mn}
x_{mn}</td><td>a_m</td></tr>
<tr><td>Потребность в грузе b_j</td><td>b_1</td><td>b_2</td><td>…</td><td>b_n</td><td></td></tr>
</table>

Решением транспортной задачи является оптимальный план перевозок, при котором транспортные затраты на перевозки минимальны.

В ряде случаев, когда целевая функция или ограничения не являются линейными функциями независимых переменных, задачу удается свести к задаче линейного программирования за счет некоторых преобразований.

3.1.3 Задача оптимальных режимов резания

Зависимости, отражающие известные характеристики режимов резания, имеют вид степенных и для оптимизации этих характеристик нужно использовать методы нелинейного программирования, что вызывает определенные вычислительные трудности. Гораздо проще эта задача решается с применением метода линейного программирования.

Таким образом, первая задача, которая должна быть решена – это приведение всех технических ограничений и оценочной функции к линейному виду.

Например, методом логарифмирования преобразуется известная в теории резания зависимость в промежуточную форму

$$\ln n + y_v \ln s \le \ln\left(\frac{318 C_v D^{z_{v-1}} K_v}{T^m t^{x_{v_x}} Z^{U_v} B_{\phi}^{r_v}}\right).$$

Получаем одно из неравенств: $x_1 + y_v x_2 \le b_1$.

Аналогично могут быть получены в линейном виде зависимости для других технических ограничений.

Анализ критериев оптимальности показывает, что при оптимизации по двум элементам резания n и s без изменения глубины резания, стойкости инструмента и других технических факторов эти оценочные функции при некотором упрощении выражаются через n и s достаточно просто. Так, для минимальной себестоимости операции можно записать

$$C_{on} = C_1/(n \cdot s),$$

где C_1 – постоянная величина, не зависящая от режимов резания.

Отсюда функция C_{on} будет наименьшей при максимальном произведении $n \cdot s$. В этом случае при приведении оценочной функции к линейному виду получим:

$$f_0 = (x1 + x2)\max.$$

Преобразование технических ограничений к линейному виду и представление их в виде системы неравенств в совокупности с оценочной функцией дает математическую модель процесса резания металлов:

$$
\begin{array}{c}
x_1+y_v x_2 \le b_1 \\
n_z x_1+y_z x_2 \le b_2 \\
x_1+x_2 \ge b_3 \\
x_1 \ge b_4 \\
x_1 \le b_5 \\
x_2 \ge b_6 \\
x_2 \le b_7 \\
n_z x_1+y_z x_2 \le b_8 \\
n_z x_1+y_z x_2 \le b_9 \\
n_y x_1+y_y x_2 \le b_{10} \\
n_s x_1+y_s x_2 \le b_{11} \\
\hline
f_0=(x_1+x_2)\max
\end{array}
$$

Математическая модель процесса резания может быть представлена в графическом виде (рис. 3.2).

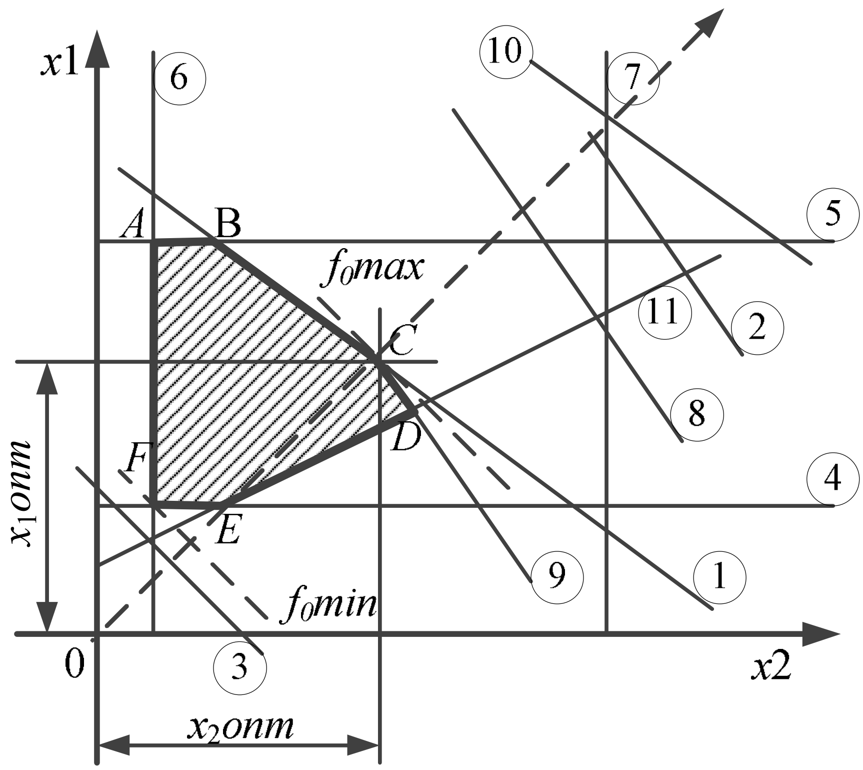

Рис. 3.2 – Математическая модель процесса резания

Здесь каждое техническое ограничение представляется граничной прямой, каждая определяет полуплоскость, где возможно существование решений системы неравенств. Граничные прямые, пересекаясь, образуют многоугольное решения, внутри которого любая точка удовлетворяет всем без исключения неравенствам. Экстремальное значение функции f_0 обеспечивается в точке, лежащей на одной из граничных прямых или в точке их пересечения. Поэтому задача отыскания оптимальных значений $x_{1опт}$ и $x_{2опт}$ сводится к последовательному вычислению координат всех возможных точек пересечения граничных прямых и затем определению для них наибольшей суммы $(x_1+x_2)_{\max}$.

После определения координат $x_{1опт}$ и $x_{2опт}$ вычисляют оптимальные значения элементов режимов резания по формулам

$$n_{опт}=\ell^{x1опт}$$

$$s_{опт}=\ell^{x2опт/100}$$

Граничное решение этой задачи сводится к следующему:

Целевая функция $f_0=(x_1+x_2)$ изображается прямой, перпендикулярной вектору максимизации. Так как его направление есть направление возрастания линейной функции, то следует ожидать, что в первой точке касания f_0 с многоугольником решения $ABCDEF$ она принимает минимальное значение $f_{0\min}$, а в последней точке C – максимальное значение $f_{0\max}$. Следовательно, вершина многоугольника решений C – точка оптимума, а её координаты x_{1C} и x_{2C} – оптимальное решение системы.

3.2 Задачи нелинейного программирования

3.2.1 Понятие о нелинейных моделях

В общем виде задача нелинейного программирования формулируется следующим образом [1]:

минимизировать $f(x_1,x_2,..., x_n)$ при ограничениях

$$\begin{aligned} g_j(x_1,x_2,...,x_n) &\le 0,\ j=\overline{1,m};\\ h_j(x_1,x_2,...,x_n) &= 0,\ j=\overline{1,k}. \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Задачи такого рода возникают как в теории управления, так и в естественных науках, их систематическое исследование привело к возникновению самостоятельной научной дисциплины – нелинейного программирования (НП).

Совокупность неизвестных ($x_1,x_2,..., x_n$) обозначим через X и будем считать X точкой в пространстве R^n. Тогда соотношение (3.1) можно записать в более компактном виде:

минимизировать $f(X)$ при ограничениях $g(X) \le 0, h(X) = 0.$

Точка X^* в R^n, удовлетворяющая условиям $g(X^*) \le 0,$ $h(X^*) = 0$, называется ***решением*** или ***глобальным решением*** задачи (3.1), если $f(X^*) \le f(X)$ для всех X, удовлетворяющих условиям $g(X) \le 0, h(X) = 0.$

Рассмотрим частный случай общей задачи нелинейного программирования, предполагая, что система ограничений содержит только ограничения-равенства, отсутствуют условия неотрицательности переменных и f и h_j – функции, непрерывные вместе со своими частными производными, по крайней мере, второго порядка. Тогда задача нелинейного программирования формулируется следующим образом: минимизировать (максимизировать) $f(X)$ при ограничениях в виде равенств:

$$\begin{aligned} &h_j(X) = \mathrm{b_j},\ j = \overline{1,m}, \\ &X = (x_1, x_2, ..., x_n). \end{aligned} \tag{3.2}$$

В общем случае функции f и h_j, $j = \overline{1,m}$ являются нелинейными, $m<n$. Задача (3.2) называется задачей ***на условный экстремум*** или ***классической задачей оптимизации***. Если ограничения в задаче НП отсутствуют, то имеем дело с ***задачей на безусловный экстремум*** или ***задачей безусловной оптимизации***.

3.2.2 Использование геометрической интерпретации и метода множителей Лагранжа для решения задач нелинейного программирования [1]

Задачи (3.1) и (3.2) можно решить, используя их геометрическую интерпретацию, если f и h_j являются функциями двух переменных. Для решения задачи (3.2) можно использовать метод ***множителей Лагранжа***.

Выпуклая (вогнутая) функция $f(X)$, определённая на выпуклом множестве X, достигает своего глобального максимума (минимума) в каждой точке x, в которой градиент функции обращается в нуль. Локальный минимум (максимум) выпуклой (вогнутой) функции $f(X)$, определённой на выпуклом множестве X, совпадает с её глобальным минимумом (максимумом) на этом множестве.

Функция $f(X)$ будет выпуклой, если её вторые частные производные образуют матрицу, в которой все главные миноры неотрицательны.

Процесс нахождения решения задачи нелинейного программирования (3.1) с использованием её ***геометрической интерпретации*** включает следующие этапы:

1) Находят область допустимых решений задачи, определяемую соотношениями $g(X) \le 0, h(X) = 0$ (если она пуста, то задача не имеет решения).

2) Строят гиперповерхность $f(X)=c$ (в двумерном случае, например, график нелинейной функции).

3) Определяют гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня, имеющую хотя бы одну общую точку с множеством допустимых решений, или устанавливают неразрешимость задачи из-за неограниченности функции $f(X)$ сверху (снизу) на множестве допустимых решений.

4) Находят точку области допустимых решений, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня, и определяют в ней значение функции $f(X)$.

Алгоритм определения экстремальных точек задачи НП (3.2) ***методом множителей Лагранжа***:

1) Вводят набор неотрицательных переменных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, называемых ***множителями Лагранжа***, и составляют функцию Лагранжа:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = \\ = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[b_j - h_j(x_1, x_2, ..., x_n)\right], \qquad (3.3)$$

в области допустимых решений функцию f можно заменить функцией Лагранжа.

2) Находят частные производные функции Лагранжа (3.3) по переменным x_i, $i = \overline{1, n}$ и λ_j, $j = \overline{1, m}$ и приравнивают их нулю; необходимое условие экстремума сводится к существованию решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)}{\partial x_k} = \dfrac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_k} - \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial h_j(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_k} = 0, k = \overline{1,n}; \\ \dfrac{\partial F(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)}{\partial \lambda_j} = b_j - h_j(x_1,\ldots,x_n) = 0, j = \overline{1,m}. \end{cases}$$

3) Решая последнюю систему уравнений любым известным способом, находят стационарные точки $(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)$ функции Лагранжа.

4) Среди стационарных точек функции Лагранжа выбирают такие, в которых функция f имеет условные экстремумы при наличии ограничений задачи (3.2). Этот выбор осуществляют, например, с помощью достаточных условий, применение которых связано с изучением знака второго дифференциала функции (3.3) [2,3]. Исследование упрощается, если использовать конкретные условия задачи. Затем вычисляют значения целевой функции в экстремальных точках.

4 Варианты заданий

По данным таблиц 4.1, 4.2 и 4.3 решить:

1) задачу планирования работы предприятия:

- составить математическую модель задачи;
- решить задачу графическим способом;
- проанализировать решение, сделать вывод.

2) транспортную задачу:

- составить матричную модель задачи;
- составить математическую модель задачи;
- построить начальный план перевозок методом северо-западного угла и определить его общую стоимость;
- методом потенциалов найти оптимальный план распределения и определить его общую стоимость;
- проанализировать решение, сделать вывод.

3) задачу нелинейного программирования:

- составить математическую модель задачи;
- решить задачу графическим способом;
- решить задачу методом множителей Лагранжа;
- проанализировать решение, сделать вывод.

Таблица 4.1

Задачи планирования работы предприятия. Варианты заданий

<table>
<tr><th>№ вар.</th><th>Задача</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют четыре вида ресурсов S_1, S_2, S_3 и S_4. Условия задачи приведены в таблице. Составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.
<table>
<tr><td rowspan="2">Вид ресурса</td><td colspan="2">Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции</td><td rowspan="2">Запас ресурса</td></tr>
<tr><td>P_1</td><td>P_2</td></tr>
<tr><td>S_1</td><td>1</td><td>3</td><td>18</td></tr>
<tr><td>S_2</td><td>2</td><td>1</td><td>16</td></tr>
<tr><td>S_3</td><td>-</td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>S_4</td><td>3</td><td>-</td><td>21</td></tr>
<tr><td>Прибыль, получаемая от единицы продукции</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>2</td><td>Для производства двух видов изделий А и В предприятие использует три вида сырья. Условия задачи приведены в таблице. Составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль предприятия от реализации продукции будет максимальной при условии, что изделий В надо выпустить не менее чем изделий А.
<table>
<tr><td rowspan="2">Вид сырья</td><td colspan="2">Нормы расхода сырья на одно изделие, кг</td><td rowspan="2">Общее количество сырья, кг</td></tr>
<tr><td>P_1</td><td>P_2</td></tr>
<tr><td>I</td><td>12</td><td>4</td><td>300</td></tr>
<tr><td>II</td><td>4</td><td>4</td><td>120</td></tr>
<tr><td>III</td><td>3</td><td>12</td><td>252</td></tr>
<tr><td>Прибыль от реализации одного изделия, ден. ед.</td><td>30</td><td>40</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>3</td><td>Для изготовления трех видов изделий А,В и С используется токарное, фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Условия задачи приведены в таблице. Определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была бы максимальной.
<table>
<tr><td rowspan="2">Тип оборудования</td><td colspan="3">Затраты времени (станко-ч) на обработку одного изделия вида</td><td rowspan="2">Общий фонд рабочего времени оборудования (ч)</td></tr>
<tr><td>А</td><td>В</td><td>С</td></tr>
<tr><td>Фрезерное</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>120</td></tr>
<tr><td>Токарное</td><td>1</td><td>8</td><td>6</td><td>280</td></tr>
<tr><td>Сварочное</td><td>7</td><td>4</td><td>5</td><td>240</td></tr>
<tr><td>Шлифовальное</td><td>4</td><td>6</td><td>7</td><td>360</td></tr>
<tr><td>Прибыль (ден. ед.)</td><td>10</td><td>14</td><td>12</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
</table>

Продолжение табл. 4.1

4	Кондитерская фабрика для производства трех видов карамели A, B и C использует три вида основного сырья: сахарный песок, патоку и фруктовое пюре. Условия задачи приведены в таблице. Найти план производства карамели, обеспечивающий максимальную прибыль от ее реализации.

Вид сырья	Нормы расхода сырья (т) на 1 т карамели			Общее количество сырья (т)
	A	B	C	
Сахарный песок	0.8	0.5	0.6	800
Патока	0.4	0.4	0.3	600
Фруктовое пюре	-	0.1	0.1	120
Прибыль от реализации 1 т продукции (ден. ед.)	108	112	126	

5	Для изготовления различных изделий A, B и C предприятие использует три различных вида сырья. Условия задачи приведены в таблице. Изделия A, B и C могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но производство ограничено выделенным предприятию сырьем каждого вида. Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной.

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие, кг			Общее количество сырья, кг
	A	B	C	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена одного изделия (ден. ед.)	9	10	16	

6	Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют четыре вида ресурсов S_1, S_2, S_3. Условия задачи приведены в таблице. Составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Вид ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции		Запас ресурса
	P_1	P_2	
S_1	2	3	180
S_2	4	1	240
S_3	6	7	426
Прибыль, получаемая от единицы продукции	16	12	

7	Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют четыре вида ресурсов S_1, S_2, S_3. Условия задачи приведены в таблице. Составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Вид ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции		Запас ресурса
	P_1	P_2	
S_1	10	8	168
S_2	5	10	180
S_3	6	12	144
Прибыль, получаемая от единицы продукции	14	18	

Окончание табл. 4.1

8

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют четыре вида ресурсов S_1, S_2, S_3. Условия задачи приведены в таблице. Составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Вид ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции		Запас ресурса
	P_1	P_2	
S_1	0.2	0.1	40
S_2	0.1	0.3	60
S_3	1.2	1.5	371.4
Прибыль, получаемая от единицы продукции	6	8	

9

Для изготовления двух видов продукции P_1, P_2, P_3 и P_4 используют четыре вида ресурсов S_1, S_2, S_3. Условия задачи приведены в таблице. Составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Вид ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции				Запас ресурса
	P_1	P_2	P_3	P_4	
S_1	1	-	2	1	180
S_2	-	1	3	2	210
S_3	4	2	-	4	800
Прибыль, получаемая от единицы продукции	9	6	4	7	

10

Для изготовления двух видов продукции $P_1 - P_4$ используют четыре вида ресурсов S_1, S_2, S_3. Условия задачи приведены в таблице. Составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Вид ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции				Запас ресурса
	P_1	P_2	P_3	P_4	
S_1	2	1	1	3	300
S_2	1	-	2	1	70
S_3	1	2	1	-	340
Прибыль, получаемая от единицы продукции	8	3	2	1	

Таблица 4.2

Транспортные задачи. Варианты заданий

№ вар.	Задача
1	Для строительства четырех объектов используется кирпич, изготовляемый на трех заводах. Ежедневно каждый из заводов может изготовлять 100, 150 и 50 усл. ед. кирпича. Ежедневные потребности в кирпиче на каждом из строящихся объектов соответственно равны 75, 80, 60 и 85 усл. ед. Известны также тарифы перевозок 1 усл. ед. кирпича с каждого с заводов к каждому из строящихся объектов: $C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}$ Составить такой план перевозок кирпича к строящимся объектам, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.
2	На трех хлебокомбинатах ежедневно производится 110, 190 и 90 т муки. Эта мука потребляется четырьмя хлебозаводами, ежедневные потребности которых равны соответственно 80, 60, 170 и 80 т. Тарифы перевозок 1 т муки с хлебокомбинатов к каждому из хлебозаводов задаются матрицей $C = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ Составить такой план доставки муки, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.
3	В трех хранилищах горючего ежедневно хранится 175, 125 и 140 т бензина. Этот бензин ежедневно получают четыре заправочные станции в количествах, равных соответственно 180, 160, 60 и 40 т. Стоимости перевозок 1 т бензина с хранилищ к заправочным станциям задаются матрицей $C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}$ Составить такой план перевозок бензина, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.
4	На трех железнодорожных станциях A_1, A_2 и A_3 скопилось 120, 110 и 130 незагруженных вагонов. Эти вагоны необходимо перегнать на железнодорожные станции B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5. На каждой из этих станций потребность в вагонах соответственно равна 80, 60, 70, 100 и 50. Тарифы перегонки одного вагона определяются матрицей $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 8 & 9 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ Составить такой план перегонок вагонов, чтобы общая стоимость была минимальной.

Продолжение табл. 4.2

5	Для строительства трех дорог используется гравий из четырех карьеров. Запасы гравия в каждом из карьеров соответственно равны 120, 280 и 160 усл. ед. Потребности в гравии для строительства каждой из дорог соответственно равны 130, 220, 160 и 50 усл. ед. Известны также тарифы перевозок 1 усл. ед. гравия из каждого из карьеров к каждой из строящихся дорог, которые задаются матрицей $C=\begin{pmatrix}1&7&9&5\\4&2&6&8\\3&8&1&2\end{pmatrix}$ Составить такой план перевозок гравия, при котором потребности в нем каждой из строящихся дорог были бы удовлетворены при наименьшей общей стоимости перевозок.
6	Три предприятия данного экономического района могут производить некоторую однородную продукцию в количествах, соответственно равных 180, 350 и 20 ед. Эта продукция должна быть поставлена пяти потребителям в количествах, соответственно равных 110, 90, 120, 80 и 150 ед. Затраты, связанные с производством и доставкой единицы продукции, задаются матрицей $C=\begin{pmatrix}2&4&1&6&7\\3&3&5&4&2\\8&9&6&3&4\end{pmatrix}$ Составить такой план прикрепления получателей продукции ее поставщикам, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.
7	Производственное объединение имеет в своем составе три филиала, которые производят однородную продукцию соответственно в количествах, равных 50, 30 и 10 ед. Эту продукцию получают четыре потребителя, расположенные в разных местах. Их потребности соответственно равны 30, 30, 10 и 20 ед. Тарифы перевозок единицы продукции от каждого из филиалов соответствующим потребителям задаются матрицей $C=\begin{pmatrix}1&2&4&1\\2&3&1&5\\3&2&4&4\end{pmatrix}$ Составить такой план прикрепления получателей продукции ее поставщикам, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.
8	На трех складах оптовой базы сосредоточен однородный груз в количествах 180, 60 и 60 ед. Этот груз необходимо перевезти в четыре магазина. Каждый из магазинов должен получить соответственно 120, 40, 60 и 80 ед. груза. Тарифы перевозок единицы груза из каждого из складов во все магазины задаются матрицей $C=\begin{pmatrix}2&3&4&3\\5&3&1&2\\2&1&4&2\end{pmatrix}$ Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Окончание табл. 4.2

9	Четыре предприятия данного экономического района для производства продукции используют три вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны 120,50,190 и 110 ед. Сырье сосредоточено в трех местах его получения, а запасы соответственно равны 160, 140, 170 ед. На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок являются известными величинами и задаются матрицей. $C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.
10	Четыре предприятия данного экономического района для производства продукции используют пять видов сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны 120,50,190 и 110 ед. Сырье сосредоточено в пяти местах его получения, а запасы соответственно равны 160, 100, 40, 100 и 70 ед. На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок являются известными величинами и задаются матрицей. $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 3 \\ 7 & 1 & 4 & 9 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Таблица 4.3

Задачи нелинейного программирования. Варианты заданий

№ вар.	Задача
1	По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 120 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При производстве x_1 изделий первым способом затраты равны $2x_1+x_1^2$ ден.ед., а при изготовлении x_2 изделий вторым способом они составляют $6x_2+x_2^2$ ден.ед. Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, чтобы общие затраты на производство продукции были минимальными.
2	По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 150 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При производстве x_1 изделий первым способом затраты равны $4x_1+x_1^2$ ден.ед., а при изготовлении x_2 изделий вторым способом они составляют $6x_2+x_2^2$ ден.ед. Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, чтобы общие затраты на производство продукции были минимальными.

Продолжение табл. 4.3

3	По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 170 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При производстве x_1 изделий первым способом затраты равны $4x_1+4x_1^2$ ден.ед., а при изготовлении x_2 изделий вторым способом они составляют $6x_2+x_2^2$ ден.ед. Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, чтобы общие затраты на производство продукции были минимальными.
4	По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 130 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При производстве x_1 изделий первым способом затраты равны $2x_1+x_1^2$ ден.ед., а при изготовлении x_2 изделий вторым способом они составляют $4x_2+4x_2^2$ ден.ед. Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, чтобы общие затраты на производство продукции были минимальными.
5	По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 150 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При производстве x_1 изделий первым способом затраты равны $6x_1+x_1^2$ ден.ед., а при изготовлении x_2 изделий вторым способом они составляют $4x_2+4_2^2$ ден.ед. Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, чтобы общие затраты на производство продукции были минимальными.
6	По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 160 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При производстве x_1 изделий первым способом затраты равны $10x_1+x_1^2$ ден.ед., а при изготовлении x_2 изделий вторым способом они составляют $4x_2+x_2^2$ ден.ед. Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, чтобы общие затраты на производство продукции были минимальными.
7	По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 170 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При производстве x_1 изделий первым способом затраты равны $6x_1+x_1^2$ ден.ед., а при изготовлении x_2 изделий вторым способом они составляют $6x_2+x_2^2$ ден.ед. Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, чтобы общие затраты на производство продукции были минимальными.
8	По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 180 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При производстве x_1 изделий первым способом затраты равны $4x_1+x_1^2$ ден.ед., а при изготовлении x_2 изделий вторым способом они составляют $4x_2+x_2^2$ ден.ед. Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, чтобы общие затраты на производство продукции были минимальными.

Окончание табл. 4.3

9	По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 280 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При производстве x_1 изделий первым способом затраты равны $6x_1+9x_1^2$ ден.ед., а при изготовлении x_2 изделий вторым способом они составляют $6x_2+9x_2^2$ ден.ед. Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, чтобы общие затраты на производство продукции были минимальными.
10	По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 220 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При производстве x_1 изделий первым способом затраты равны $4x_1+4x_1^2$ ден.ед., а при изготовлении x_2 изделий вторым способом они составляют $6x_2+9x_2^2$ ден.ед. Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, чтобы общие затраты на производство продукции были минимальными.

5 Пример решения варианта задания

5.1 Пример решения задачи оптимальной загрузки оборудования

См. п. 3.1.1.

5.2 Пример решения транспортной задачи

Задача. На трех станциях отделения железной дороги имеется избыток однотипных порожних вагонов, запасы которых составляют соответственно a_1, a_2, a_3, а на четырех станциях – их не хватает (недостаток соответственно равен b_1, b_2, b_3, b_4). Требуется так распределить порожние вагоны на станциях с недостатком вагонов, чтобы пробеги были минимальны. Расстояния от станций избытка до станций недостатка порожних вагонов приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1

Матричная модель задачи

Поставщики	Потребители				Мощности поставщиков, ваг.
	1	2	3	4	
1	65	40	35	30	a_1=35
2	60	35	90	25	a_2=50
3	90	65	120	55	a_3=410
Спросы потребителей, ваг.	b_1=240	b_2=75	b_3=70	b_4=110	

Суммарный избыток вагонов равен суммарному недостатку, что составляет 495 вагонов (условие общего баланса выполняется).

Составляем математическую модель задачи:

План перевозок, который необходимо найти, имеет вид:

$$X = \|x_{ij}\| = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix}$$ при условиях неотрицательности переменных: $x_{ij} \geq 0$, $i=1,\ldots,3$, $j=1,\ldots,4$ и ограничениях на избыток:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=35,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=50,$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=410,$$

и на недостаток вагонов:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=240,$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=75,$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=70,$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=110.$$

При этом стоимость перевозок минимальна:

$$f(x)= 65x_{11}+40x_{12}+35x_{13}+30x_{14}+60x_{21}+35x_{22}+90x_{23}+25x_{24}+90x_{31}+ +65x_{32}+120x_{33}+55x_{34}\rightarrow\min.$$

Построим начальный базисный (опорный) план методом северо-западного угла (диагональным методом).

Базисный план предполагает, что количество перевозок в нем равно $m+n-1$, т.е. план невырожденный. Если план является вырожденным, т.е. количество перевозок в нем меньше $m+n-1$, то его необходимо дополнить клеткой с нулевой перевозкой и продолжать вычислительный процесс согласно алгоритму.

Назначение корреспонденций начинают с верхней левой клетки (северо-западного угла) расчетной матрицы.

В верхнюю левую клетку записывается наименьшее из значений a_1 и b_1 ($\min(a_1, b_1) = \min(35,240)$) – 35. Остальные клетки этой строки будут с нулевыми перевозками, так как у первого поставщика вагонов больше нет. Далее перемещаемся в клетку (2,1). У второго поставщика имеется 50 вагонов, а первому потребителю необходимо 240-235=205 вагонов. Для клетки (2,1) корреспонденция – 50 вагонов. Процедура построения начального плана продолжается по аналогичной схеме до тех пор, пока все запасы поставщиков не будут израсходованы, а потребности потребителей удовлетворены. Построенный начальный план перевозок приведен в таблице 5.2.

Таблица 5.2

Начальный план перевозок

Поставщики	Потребители				a_i
	1	2	3	4	
1	65 35	40 0	35 0	30 0	35-0
2	60 50	35 0	90 0	25 0	50-0
3	90 155	65 75	120 70	55 110	410-255-180-110-0
b_j	240-205-155-0	75-0	70-0	110-0	

Затраты при данном плане перевозок:

z=65·35+60·50+90·155+65·75+120·70+55·110 = 38500 ваг.·км.

Число назначенных перевозок равно 6, что соответствует базисности начального плана.

На практике часто встречаются задачи, когда нужно исключать из рассмотрения и строку, и столбец до назначения последней перевозки (случай вырождения). Для сохранения базисности плана назначают нулевые перевозки. Исключают строку или столбец, в которых находятся клетки с большими стоимостями, и в которые может попасть нулевая перевозка.

Полученный начальный план перевозок путем постепенного его улучшения доводится до оптимального, т.е. методом потенциалов строится оптимальный план.

Потенциалами называется система чисел, приписанных по определенному правилу каждому поставщику и потребителю (соответственно каждой строке i (u_i) и каждому столбцу j(v_j) расчетной матрицы).

1) Значения потенциалов определяются по стоимости перевозок в базисных (занятых, загруженных) клетках из условия оптимальности Канторовича:

$$\begin{cases} v_j - u_i = c_{ij}, \text{ если } x_{ij} > 0, \\ v_j - u_i \le c_{ij}, \text{ если } x_{ij} = 0. \end{cases}$$

Если известен u_i, то $v_j = c_{ij} + u_i$, если известен v_j, то $u_i = v_j - c_{ij}$.

Для строки с наибольшей стоимостью перевозок c_{33}=120 положим u_3=0. Пользуясь вышеприведенными формулами, вычислим остальные потенциалы (таблица 5.3).

Таблица 5.3

Таблица потенциалов

	v_1=90	v_2=65	v_3=120	v_4=55
u_1=25	4 65 35	40 0	1 35 0	30 0
u_2=30	60 50	35 0	90 0	25 0
u_3=0	3 90 155	65 75	2 120 70	55 110

2) Выполняем проверку второго условия оптимальности для всех незагруженных (свободных, небазисных) клеток. Клетки, в которых условие оптимальности не выполняется, называется ***потенциальными***. Для них вычисляем величину превышения стоимости: $\Delta_{ij}=v_j–u_i–c_{ij}>0$.

Для клетки (1,3) условие оптимальности не выполняется, так как $v_3–u_1>c_{13}$. Клетка (1,3) является единственной потенциальной. Величина превышения стоимости в ней равна

$$\Delta_{1,3}=v_3–u_1–c_{13}=120–25–35=60>0.$$

3) Из потенциальных клеток выбирается клетка с максимальны превышением (таблица 5.3). Строится замкнутый контур, начиная перемещаться в горизонтальном направлении и делая повороты в загруженных клетках (1,1), (3,1), (3,3) с таким расчетом, чтобы вернуться в исходную клетку. Пронумеруем клетки, начиная с клетки (1,3). В вершинах контура с четными номерами выбираем минимальную корреспонденцию, равную 35 в клетке (1,1). На 35 увеличиваем корреспонденции в нечетных вершинах и уменьшаем в четных.

Новый улучшенный план представлен в таблице 5.4.

Затраты при данном плане перевозок уменьшились и составляют:

$$z_1=35·35+60·50+90·190+65·75+120·35+55·110 = 36400 \text{ ваг.·км.}$$

Таблица 5.4

Оптимальное решение задачи

	1	2	3	4
1	65 0	40 0	35 35	30 0
2	60 50	35 0	90 0	25 0
3	90 190	65 75	120 35	55 110

Для плана, приведенного в таблице 3.6, определяем потенциалы и проверяем условие оптимальности для незагруженных клеток. Проверка показала, что потенциальных клеток план больше не содержит и, следовательно, является оптимальным.

Вывод. Для того, чтобы затраты на перевозки порожних вагонов между станциями были минимальными, рекомендуется придерживаться полученного оптимального плана:

$$X = \left\| x_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 35 & 0 \\ 50 & 0 & 0 & 0 \\ 190 & 75 & 35 & 110 \end{pmatrix}.$$

В этом случае транспортные издержки составят 36400 ваг.·км.

5.3 Пример решения задачи минимизации издержек производства с применением графического способа и метода множителей Лагранжа

Задача. По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 180 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При производстве x_1 изделий первым способом затраты равны $4x_1+x_1^2$ ден.ед., а при изготовлении x_2 изделий вторым способом они составляют $8x_2+x_2^2$ ден.ед. Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, чтобы общие затраты на производство продукции были минимальными.

Математическая постановка задачи состоит в определении минимального значения функции

$$f=4x_1+x_1^2+8x_2+x_2^2 \rightarrow \min$$

при условиях

$$x_1+x_2 = 180,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Для решения задачи графическим способом преобразуем минимизируемую функцию:

$$f = (x_1+2)^2+(x_2+4)^2 - 20 = f_1 - 20.$$

Функция f_1 достигает своего минимума при тех же x_1 и x_2, что и функция f.

Областью допустимых решений исходной задачи является отрезок AB (рис. 5.1), а линиями уровня – окружности с центром в точке E(-2; -4).

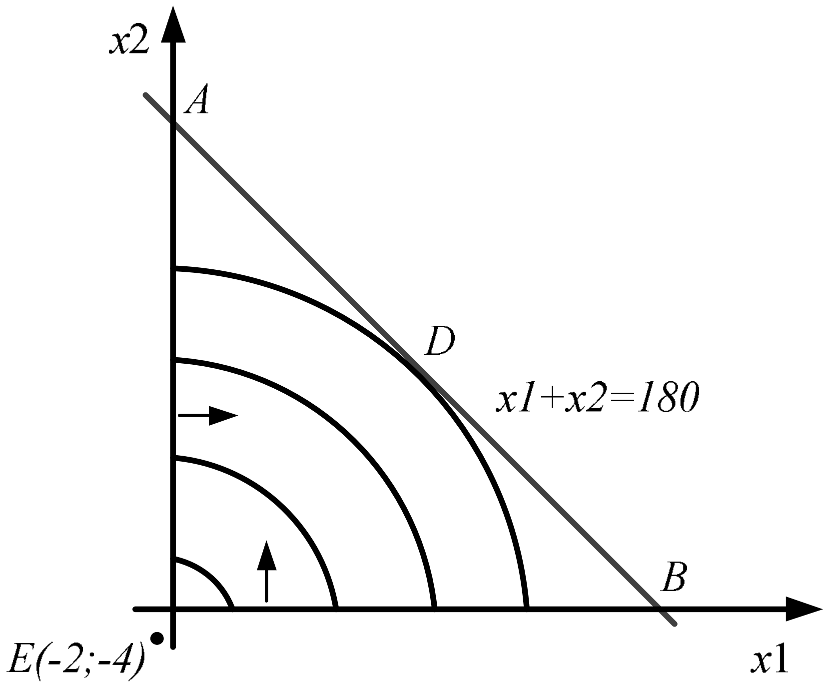

Рис. 5.1 — Графическое решение задачи НП

Проводя окружности разных радиусов с центром в точке E (линии уровня целевой функции), видим, что минимальное значение на допустимом множестве целевая функция принимает в точке D. Чтобы найти координаты этой точки, воспользуемся тем, что угловой коэффициент касательной к окружности $4x_1+x_1^2+8x_2+x_2^2=c$ в точке D совпадает с угловым коэффициентом прямой $x_1+x_2 = 180$, и, следовательно, равен -1. Рассматривая x_2 как неявную функцию от x_1 и дифференцируя уравнение окружности, имеем $f'=4+2x_1+8x_2'+2x_2x_2'=0$, или $x_2'= -(2+x_1)/(4+x_2)$.

Приравнивая полученное выражение числу -1, получаем одно из уравнений для определения координат точки D. Присоединяя к нему уравнение прямой, на которой лежит точка D, получаем систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 180 \end{cases},$$

откуда $x_1^* = 91$ и $x_2^* = 89$.

Для решения задачи методом множителей Лагранжа будем предполагать, что условия неотрицательности не налагаются.

Составим функцию Лагранжа:

$$F(x_1,x_2,\lambda)=4x_1+x_1^2+8x_2+x_2^2+\lambda(180 - x_1 - x_2),$$

вычислим её частные производные по x_1, x_2, λ, приравняем их нулю и решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Перенося в правые части первых двух уравнений λ и приравнивая их левые части, получим $4+2x_1=8+2x_2$, или $x_1-x_2=2$. Решая последнее уравнение совместно с уравнением $x_1+x_2 = 180$, находим $x_1^* = 91$, $x_2^* = 89$, $\lambda=196$, т. е. получили координаты точки D, удовлетворяющие условиям $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Эта точка является подозрительной на экстремум. Используя вторые частные производные, можно показать, что в точке D функция имеет условный минимум. Этот результат и был получен ранее.

Вывод. Если предприятие изготовит 91 изделие первым технологическим способом и 89 изделий вторым способом, то общие затраты будут минимальными и составят $f(91;89)=4\cdot 91+91^2+8\ 89+89^2 = 17278$ ден.ед.

6 Требования к отчету

Отчет по лабораторной работе должен включать в себя:

– наименование лабораторной работы;
– цель лабораторной работы;
– задание к лабораторной работе;
– решение задачи планирования работы предприятия:
  - математическую модель задачи;
  - решение задачи графическим способом и на ЭВМ;
  - анализ решения, выводы;

– решение транспортной задачи:
  - матричную модель задачи;
  - математическую модель задачи;
  - начальный план перевозок;
  - общую стоимость начального плана перевозок;
  - оптимальный план распределения;
  - общую стоимость оптимального плана;
  - анализ решения, выводы;

– решение задачи нелинейного программирования:
  - математическую модель задачи;
  - решение задачи графическим способом;
  - решение задачи методом множителей Лагранжа на ЭВМ;
  - анализ решения, выводы.

7 Библиографический список

1. Жогаль С.И. Применение методов математического программирования и моделирования при решении производственных задач: Пособие для самостоятельной работы студентов технических специальностей безотрывной формы обучения. – Гомель: БелГУТ, 2001. – 83 с.

2. Кузнецов А.В. и др. Высшая математика: Математическое программирование: Учеб. – Мн.: Выш. шк., 1994. – 286 с.

3. Максимей И.В., Серегина В.С. Задачи и модели исследования операций. Ч.2. Методы нелинейного и стохастического программирования: Учеб. пособие. – Гомель: БелГУТ, 1999. – 103 с.