МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)
Кафедра информационных систем и технологий

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
____________ О.Г. Локтионова
«__10__» ______________ 2018 г.

Линейное программирование. Графический метод решения:
методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Исследование операций и методы оптимизации»

Курск 2018

УДК 519.8
Составитель Ю.А. Халин

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, доцент В.В. Свиридов

Линейное программирование. Графический метод решения: методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Исследование операций и методы оптимизации» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Ю.А. Халин. Курск, 2018. 14 с. Библиогр.: с. 14.

Приводится описание графического метода решения задачи линейного программирования. Приведены теоретические положения, основные расчетные формулы, практические примеры и задания.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлениям, укрупнённой группы специальностей 09.00.00.

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Усл.печ. л. 0,81 п.л . Уч.-изд. л. 0,73 . Тираж 100 экз. Заказ.
Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. Краткие теоретические сведения

Графический метод решения задач линейного программирования основан на ряде сведений из аналитической геометрии и математического анализа.

Множество называется *выпуклым,* если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и их произвольную выпуклую линейную комбинацию.

Точка X выпуклого множества называется *угловой,* если она не может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации каких-нибудь двух других различных точек данного множества.

Теорема 1.

Множество допустимых решений задачи линейного программирования является выпуклым (если оно не пусто).

Непустое множество допустимых решений задачи линейного программирования называется *многогранником решений,* а всякая угловая точка многогранника решений – *вершиной.*

Теорема 2.

Если задача линейного программирования имеет оптимальный план, то максимальное значение целевая функция задачи принимает в одной из вершин многогранника решений. Если максимальное значение целевая функция задачи принимает более чем в одной вершине, то она принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.

Из перечисленного выше можно сделать следующие выводы.

Непустое множество допустимых решений задачи линейного программирования образует выпуклый многогранник. В одной из вершин многогранника решений значение целевой функции является максимальным (при условии, что функция ограничена сверху на множестве планов). Если максимальное значение функция принимает более чем в одной вершине, то это же значение она принимает в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией данных вершин, т.е. на границе области допустимых решений.

Вершину многогранника решений, в которой целевая функция принимает максимальное значение, найти сравнительно просто, если задача, записанная в неканонической форме, содержит не более двух переменных.

Алгоритм графического метода:

1.Строим область допустимых решений.

2.Строим вектор-градиент, координатами которого являются коэффициенты целевой функции.

3.Строим линию уровня целевой функции, перпендикулярную вектору-градиенту.

4.Перемещаем линию уровня в направлении вектора-градиента при отыскании максимума и в противоположном направлении при отыскании минимума.

Перемещение линии уровня производится до тех пор, пока у нее не останется одна общая точка с областью допустимых решений. Эта точка и является точкой экстремума.

Если окажется, что линия уровня параллельна одной из сторон области допустимых решений, то в этом случае экстремум достигается в каждой точке этой границы, и говорят, что задача имеет альтернативный оптимум.

Задача линейного программирования может быть неразрешима, когда система ограничений несовместна, т.е. множество допустимых решений пусто.

5.Находим координаты точки экстремума и значение целевой функции в ней. В случае альтернативного оптимума решение задачи находят по формуле:

$$X^* = (1 - t)X_1 + tX_2,$$

где t – параметр ($0 \le t \le 1$),

X_1, X_2 – оптимальные решения в угловых точках, определяющих границу.

2 Примеры решения задач линейного программирования

Фабрика производит два вида красок: первый – для наружных, а второй – для внутренних работ. Для производства красок используются два ингредиента: А и В. Максимально возможные суточные запасы этих ингредиентов составляют 6 и 8 т соответственно. Известны расходы А и В на 1 т соответствующих красок (табл. 1.1). Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску 2-го вида никогда не превышает спроса на краску 1-го вида более, чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску 2-го вида никогда не превышает 2 т в сутки. Оптовые цены одной тонны красок равны: 3 тыс. руб. для краски 1-го вида; 2 тыс. руб. для краски 2-го вида.

Необходимо построить математическую модель, позволяющую установить, какое количество краски каждого вида надо производить, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Таблица 1.1

Параметры задачи о производстве красок

Ингредиенты	Расход ингредиентов, т ингр./т краски		Запас, т ингр./сутки
	Краска 1-го вида	Краска 2-го вида	
A	1	2	6
B	2	1	8

Решение

Прежде чем построить математическую модель задачи, т.е. записать ее с помощью математических символов, необходимо четко разобраться с экономической ситуацией, описанной в условии. Для этого необходимо с точки зрения ***экономики***, а не математики, ответить на следующие вопросы:

1) Что является ***искомыми величинами*** задачи?

2) Какова ***цель*** решения? Какой ***параметр*** задачи служит критерием эффективности (оптимальности) решения, например, прибыль, себестоимость, время и т.д. В каком ***направлении*** должно изменяться значение этого параметра (к max или к min) для достижения наилучших результатов?

3) Какие ***условия*** в отношении искомых величин и ресурсов задачи должны быть выполнены? Эти условия устанавливают, как должны соотноситься друг с другом различные параметры задачи, например, количество ресурса, затраченного при производстве, и его запас на складе; количество выпускаемой продукции и емкость склада, где она будет храниться; количество выпускаемой продукции и рыночный спрос на эту продукцию и т.д.

Только после экономического ответа на все эти вопросы можно приступать к записи этих ответов в ***математическом*** виде, т.е. к записи математической модели.

1) Искомые величины являются ***переменными*** задачи, которые как правило обозначаются малыми латинскими буквами с индексами, например, однотипные переменные удобно представлять в виде $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

2) Цель решения записывается в виде ***целевой функции***, обозначаемой, например, $L(X)$. Математическая формула ЦФ $L(X)$ отражает способ расчета значений параметра – критерия эффективности задачи.

3) Условия, налагаемые на переменные и ресурсы задачи, записываются в виде системы равенств или неравенств, т.е. ***ограничений***. Левые и правые части ограничений отражают способ получения (расчет или численные значения из условия задачи) значений тех параметров задачи, на которые были наложены соответствующие условия.

В процессе записи математической модели необходимо указывать единицы измерения переменных задачи, целевой функции и всех ограничений.

Построим модель задачи №1.01, используя описанную методику.

Переменные задачи

В задаче №1.01 требуется установить, сколько краски каждого вида надо производить. Поэтому искомыми величинами, а значит, и переменными задачи являются *суточные объемы производства* каждого вида красок:

x_1 – суточный объем производства краски 1-го вида, [т краски/сутки];

x_2 – суточный объем производства краски 2-го вида, [т краски/сутки].

Целевая функция

В условии задачи №1.01 сформулирована цель – добиться максимального дохода от реализации продукции. Т.е. критерием эффективности служит параметр *суточного дохода*, который должен стремится к *максимуму*. Чтобы рассчитать величину суточного дохода от продажи красок обоих видов, необходимо знать объемы производства красок, т.е. x_1 и x_2 т краски в сутки, а также оптовые цены на краски 1-го и 2-го видов – согласно условию, соответственно 3 и 2 тыс.руб. за 1 т краски. Таким образом, доход от продажи суточного объема производства краски 1-го вида равен $3x_1$ тыс.руб. в сутки, а от продажи краски 2-го вида – $2x_2$ тыс.руб. в сутки. Поэтому запишем ЦФ в виде суммы дохода от продажи красок 1-го и 2-го видов (при допущении независимости объемов сбыта каждой из красок)

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max \text{ [тыс.руб./сутки]},$$

$$\left[\frac{\text{тыс.руб.}}{\text{т краски}} \cdot \frac{\text{т краски}}{\text{сутки}} = \frac{\text{тыс.руб.}}{\text{сутки}}\right].$$

Ограничения

Возможные объемы производства красок x_1 и x_2 ограничиваются следующими условиями:

- количество ингредиентов А и В, израсходованное в течение суток на производство красок обоих видов, не может превышать суточного запаса этих ингредиентов на складе;
- согласно результатам изучения рыночного спроса суточный объем производства краски 2-го вида может превышать объем производства краски 1-го вида, но не более, чем на 1 т краски;
- объем производства краски 2-го вида не должен превышать 2 т в сутки, что также следует из результатов изучения рынков сбыта;
- объемы производства красок не могут быть отрицательными.

Таким образом, все ограничения задачи №1.01 делятся на 3 группы, обусловленные:

1) расходом ингредиентов;
2) рыночным спросом на краску;
3) неотрицательностью объемов производства.

Ограничения **по расходу** любого из ингредиентов имеют следующую ***содержательную*** форму записи

$$\begin{pmatrix}\text{Расход конкретного ингредиента}\\ \text{на производство обоих видов краски}\end{pmatrix} \le \begin{pmatrix}\text{Максимально возможный}\\ \text{запас данного ингредиента}\end{pmatrix}.$$

Запишем эти ограничения в ***математической*** форме.

Левая часть ограничения – это формула расчета суточного расхода конкретного ингредиента на производство красок. Так из условия известен расход ингредиента А на производство 1 т краски 1-го вида (1 т ингр. А) и 1 т краски 2-го вида (2 т ингр. А) (см. табл.1.1). Тогда на производство x_1 т краски 1-го вида и x_2 т краски 2-го вида потребуется $1x_1 + 2x_2$ т ингр. А.

Правая часть ограничения – это величина суточного запаса ингредиента на складе, например, 6 т ингредиента А в сутки (см. табл.1.1). Таким образом, ограничение по расходу А имеет вид

$$1x_1 + 2x_2 \le 6 \quad \left[\frac{\text{т ингр.А}}{\text{т краски}} \cdot \frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right] \le \left[\frac{\text{т ингр.А}}{\text{сутки}}\right].$$

Аналогична математическая запись ограничения по расходу В

$$2x_1 + 1x_2 \le 8 \quad \left[\frac{\text{т ингр.В}}{\text{т краски}} \cdot \frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right] \le \left[\frac{\text{т ингр.В}}{\text{сутки}}\right].$$

Примечание 1.1. Следует всегда проверять размерность левой и правой части каждого из ограничений, поскольку их несовпадение свидетельствует о принципиальной ошибке при составлении ограничений.

Ограничение по суточному **объему производства** краски 1-го вида по сравнению с объемом производства краски 2-го вида имеет

содержательную форму

$$\begin{pmatrix} \text{Превышение объема производства краски 2-го вида} \\ \text{над объемом производства краски 1-го вида} \end{pmatrix} \le \left(1\ \frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right)$$

и ***математическую*** форму

$$x_2 - x_1 \le 1 \quad \left[\frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right] \le \left[\frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right].$$

Ограничение по суточному **объему производства** краски 1-го вида имеет

содержательную форму

$$(\text{Спрос на краску 1-го вида}) \le \left(2\ \frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right)$$

и ***математическую*** форму

$$x_1 \le 2 \quad \left[\frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right] \le \left[\frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right].$$

Неотрицательность объемов производства задается как

$$x_1 \ge 0,$$
$$x_2 \ge 0.$$

Таким образом, ***математическая модель*** этой задачи имеет вид

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max \ [\text{руб./сутки}]$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \ [\text{т ингр. A/сутки}], \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \ [\text{т ингр. B/сутки}], \\ -x_1 + x_2 \le 1 \ [\text{т краски/сутки}], \\ \qquad x_2 \le 2 \ [\text{т краски/сутки}], \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \ [\text{т краски/сутки}]. \end{cases}$$

2.2. Найдем оптимальное решение задачи 2.1 о красках, математическая модель которой имеет вид

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 \le 8, & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 1, & (3) \\ \qquad x_2 \le 2, & (4) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Построим прямые ограничений, для чего вычислим координаты точек пересечения этих прямых с осями координат (рис.2.2).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 8, & (2) \\ -x_1 + x_2 = 1, & (3) \\ \qquad x_2 = 2. & (4) \end{cases}$$

(1) – $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 3, \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 6, \\ x_2 = 0, \end{cases}$ (2) – $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 8, \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 0, \end{cases}$ (3) – $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 0. \end{cases}$

Прямая (4) проходит через точку $x_2 = 2$ параллельно оси x_1.

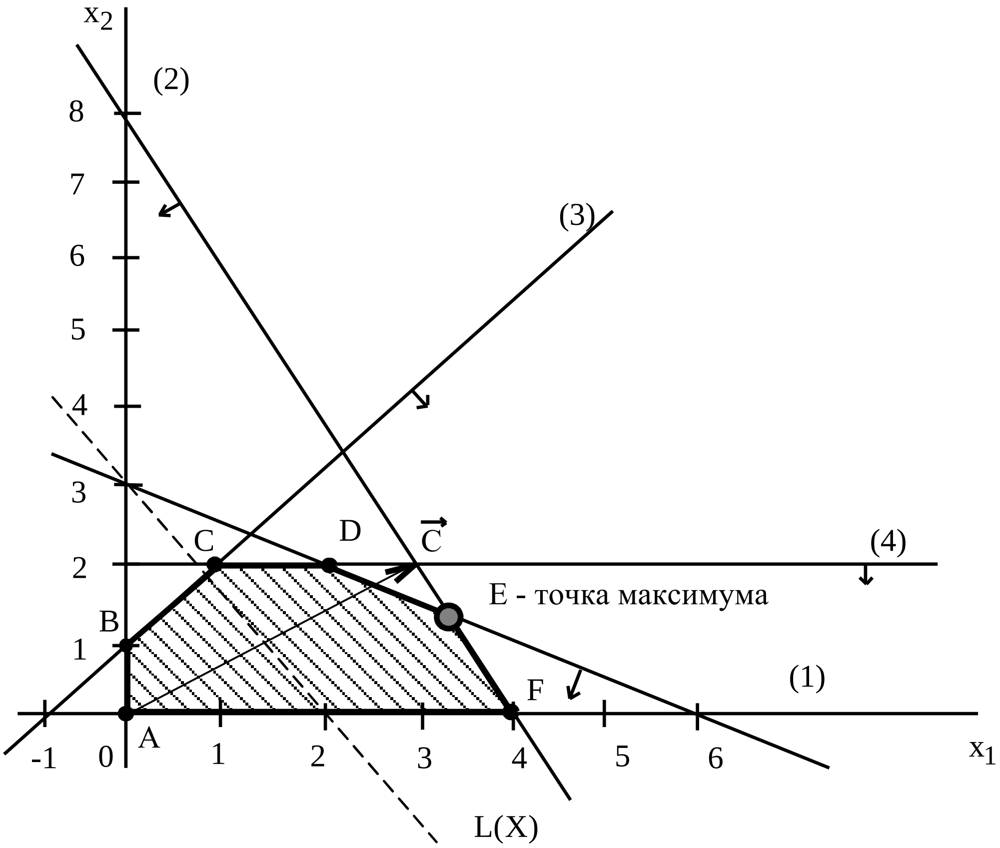

Рис. 1 - Графическое решение задачи о красках

Определим ОДР. Например, подставим точку (0;0) в исходное ограничение (3), получим $0 \le 1$, что является истинным неравенством, поэтому стрелкой (или штрихованием) обозначим полуплоскость, ***содержащую*** точку (0;0), т.е. расположенную правее и ниже прямой (3). Аналогично определим допустимые полуплоскости для остальных ограничений и укажем их стрелками у соответствующих прямых ограничений (см. рис.2.2). Общей областью, разрешенной всеми ограничениями, т.е. ОДР является многоугольник ABCDEF.

Целевую прямую можно построить по уравнению

$$3x_1 + 2x_2 = 6,$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 3, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Строим вектор $\vec{C}$ из точки (0;0) в точку (3;2). Точка E – это последняя вершина многоугольника допустимых решений ABCDEF, через которую проходит целевая прямая, двигаясь ***по направлению*** вектора $\vec{C}$. Поэтому E – это точка максимума ЦФ.

Определим координаты точки E из системы уравнений прямых ограничений (1) и (2)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 8, & (2) \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3},$$

$$E\left(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3}\right) \text{ [т/сутки].}$$

Максимальное значение ЦФ равно $L(E) = 3 \cdot \frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = 12\frac{2}{3}$ [тыс. руб./сутки]. Таким образом, наилучшим режимом работы фирмы является ежесуточное производство краски 1-го вида в объеме $3\frac{1}{3}$ т и краски 2-го вида в объеме $1\frac{1}{3}$ т. Доход от продажи красок составит $12\frac{2}{3}$ тыс. руб. в сутки.

3. Индивидуальное задание студента

Используя графический метод, найдите экстремальное значение f при указанных ограничениях:

1.	$F(X) = 4x_1 - 3x_2 \to \max\ (\min)$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 20, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ -7x_1 + 10x_2 \le 80, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$	2.	$F(X) = 2x_1 + 5x_2 \to \max\ (\min)$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 5, \\ 4x_1 + x_2 \ge 8, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
3.	$F(X) = x_1 + 2x_2 \to \max\ (\min)$ $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \ge 10, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 4x_2 \ge 3, \\ -x_1 + 4x_2 \le 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$	4.	$F(X) = -2x_1 + 5x_2 \to \max\ (\min)$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + 2x_2 = 8, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

5.	$F(X)=x_1+6x_2 \to \max\ (\min)$ $\begin{cases} x_1+2x_2\le 10, \\ 3x_1-3x_2\ge 6, \\ 2x_1+3x_2\le 6, \\ 3x_1+x_2\ge 4, \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$	6.	$F(X)=-3x_1-2x_2 \to \max\ (\min)$ $\begin{cases} x_1-x_2\ge 3, \\ 2x_1+2x_2\ge 2, \\ x_1+x_2\ge 6, \\ -2x_1+6x_2\le 20, \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$
7.	$F(X)=x_1+6x_2 \to \max\ (\min)$ $\begin{cases} -2x_1+12x_2\ge 8, \\ 4x_1+2x_2\le 10, \\ 3x_1-4x_2\ge 2, \\ 4x_1+5x_2\ge 8, \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$	8.	$F(X)=4x_1+2x_2 \to \max\ (\min)$ $\begin{cases} x_1+2x_2\ge 7, \\ 2x_1+x_2\ge 8, \\ -x_1+2x_2\le 6, \\ -2x_1+8x_2\ge 4, \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$
9.	$F(X)=3x_1+4x_2 \to \max\ (\min)$ $\begin{cases} x_1+2x_2\ge 8, \\ 4x_1+4x_2\ge 18, \\ -x_1+x_2\le 1, \\ \qquad x_2=2, \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$	10.	$F(X)=-2x_1-x_2 \to \min(\max)$ $\begin{cases} 2x_1+4x_2\le 16, & (1) \\ -4x_1+2x_2\le 8, & (2) \\ x_1+3x_2\ge 9, & (3) \\ 6x_1+5x_2=30, & (4) \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$
11.	$F(X)=x_1-3x_2 \to \min(\max)$ $\begin{cases} x_1+3x_2\ge 3, & (1) \\ x_1+x_2\ge 5, & (2) \\ x_1\le 4, & (3) \\ -2x_1+x_2\ge 2, & (4) \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$	12.	$F(X)=x_1+3x_2 \to \min(\max)$ $\begin{cases} x_1+3x_2\ge 5, & (1) \\ x_1+x_2\ge 3, & (2) \\ x_1\le 4, & (3) \\ -2x_1+x_2\ge 4, & (4) \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$
13.	$F(X)=3x_1+4x_2 \to \max\ (\min)$ $\begin{cases} x_1+2x_2\ge 7, \\ 2x_1+x_2\ge 8, \\ -x_1+2x_2\le 6, \\ -2x_1+8x_2\ge 4, \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$	14.	$F(X)=4x_1+2x_2 \to \max\ (\min)$ $\begin{cases} -2x_1+12x_2\ge 8, \\ 4x_1+2x_2\le 10, \\ 3x_1-4x_2\ge 2, \\ 4x_1+5x_2\ge 8, \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$

15.	$F(X) = -3x_1 - 2x_2 \to \max\ (\min)$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 3, \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \ge 6, \\ -2x_1 + 6x_2 \le 20, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$	16.	$F(X) = x_1 + 6x_2 \to \max\ (\min)$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 3x_1 - 3x_2 \ge 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 3x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
17.	$F(X) = x_1 + 6x_2 \to \max\ (\min)$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 7, \\ 2x_1 + x_2 \ge 8, \\ -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -2x_1 + 8x_2 \ge 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$	18.	$F(X) = 4x_1 + 2x_2 \to \max\ (\min)$ $\begin{cases} -2x_1 + 12x_2 \ge 8, \\ 4x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 3x_1 - 4x_2 \ge 2, \\ 4x_1 + 5x_2 \ge 8, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
19.	$F(X) = 3x_1 + 4x_2 \to \max\ (\min)$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, & (1) \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, & (2) \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, & (3) \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, & (4) \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$	20.	$F(X) = -2x_1 - x_2 \to \min(\max)$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ 4x_1 + 4x_2 \ge 18, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_2 = 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Проверить полученный результат, используя встроенную надстройку Ms Excel «Поиск решения».

Контрольные вопросы

1. Сущность нелинейного программирования.
2. Дать объяснение формальной постановки задачи линейного программирования.
3. Коэффициенты целевой функции, их геометрический смысл.
4. Как определить линию уровня?

Библиографический список

1. Акулич, И.Л. Математическое программирование в упражнениях и задачах [Текст] : учебное пособие - М.: Высшая школа, 1986. – 319 с.
2. Аттеков, А.В. Методы оптимизации [Текст] : учебное пособие/ Под ред. В.С. Зарубина - М.: ПрСМ, 2003. – 440 с.
3. Вентцель, Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология [Текст]: учебное пособие для студ. втузов. - М.: Высш. шк., 2001. – 208 с.
4. Ржевский, С. В. Исследование операций [Текст] : учебное пособие / С. В. Ржевский. - Санкт-Петербург : Лань, 2013. - 480 с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература).