МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)
Кафедра информационных систем и технологий

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____ О.Г. Локтионова
«__» _____ 2017 г.

Нелинейное программирование. Графический метод решения:
методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Исследование операций»

Курск 2017

УДК 519.8
Составитель Ю.А. Халин

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, доцент В.В. Свиридов

Нелинейное программирование. Графический метод решения: методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Исследование операций» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Ю.А. Халин. Курск, 2017. 9 с. Библиогр.: с. 9.

Приводится описание графического метода решения задачи нелинейного программирования. Приведены теоретические положения, основные расчетные формулы, практические примеры и задания.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлениям, укрупнённой группы специальностей 09.00.00.

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 10.11.17 . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 0,52. Уч.-изд. л. 0,47. Тираж 100 экз. Заказ. 1458
Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. Краткие теоретические сведения

В общем виде задача нелинейного программирования состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min) \qquad (1)$$

при условии, что ее переменные удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i (i = \overline{1,k}), \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i (i = \overline{k+1, m}), \end{cases} \qquad (2)$$

где f и g_i - некоторые известные функции n переменных, а b_i - заданные числа.

Здесь имеется в виду, что в результате решения задачи будет определена точка $X^* = (x^*_1; x^*_2; ...; x^*_n)$, координаты которой удовлетворяют соотношениям (2) и такая, что для всякой другой $X = (x_1; x_2; ...; x_n)$, удовлетворяющей условиям (2), выполняется неравенство $f(x^*_1; x^*_2; ...; x^*_n) \ge f(x_1; x_2; ...; x_n) [f(x^*_1; x^*_2; ...; x^*_n) \le f(x_1; x_2; ...; x_n)]$.

Если f и g_i - линейные функции, то задача (1), (2) является задачей линейного программирования.

Соотношения (2) образуют систему ограничений и включают в себя условия неотрицательности переменных, если такие условия имеются. Условия неотрицательности переменных могут быть заданы и непосредственно.

В евклидовом пространстве E_n система ограничений (2) определяет область допустимых решений задачи. В отличие от задачи линейного программирования она не всегда является выпуклой.

Если определена область допустимых решений, то нахождение решения задачи (l), (2) сводится к определению такой точки этой области, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня: $f(x_1; x_2; ...; x_n) = h$. Указанная точка может находиться как на границе области допустимых решений, так и внутри нее.

Процесс нахождения решения задачи нелинейного программирования (l), (2) с использованием ее геометрической интерпретации включает следующие этапы:

l. Находят область допустимых решений задачи, определяемую соотношениями (2) (если она пуста, то задача не имеет решения).

2. Строят гиперповерхность $f(x_1; x_2; ...; x_n) = h$.

3. Определяют гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня или устанавливают неразрешимость задачи из-за неограниченности функции (1) сверху (снизу) на множестве допустимых решений.

4. Находят точку области допустимых решений, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня, и определяют в ней значение функции (l).

2 Примеры решения задач нелинейного программирования

2.1. Найти максимальное значение функции

$$F = x_2 - x^2_1 + 6x_1 \tag{3}$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \end{cases} \tag{4}$$

$$x_2 \le 4,$$

$$x_1, x_2 \ge 0. \tag{5}$$

Р е ш е н и е. Так как целевая функция (3) нелинейная, то задача (3)-(5) является задачей нелинейного программирования. Областью допустимых решений данной задачи является многоугольник *OABC* (рис. 3.1). Следовательно, для нахождения ее решения нужно определить такую точку многоугольника *OABC*, в которой функция (3) принимает максимальное значение. Построим линию уровня $F = x_2 - x^2_1 + 6x_1 = h$, где h - некоторая постоянная, и исследуем ее поведение при различных значениях h. При каждом значении h получаем параболу, которая тем выше отдалена от оси Ox_1, чем больше значение h (рис. 1). Значит, функция F принимает максимальное значение в точке касания одной из парабол с границей многоугольника *OABC*. В данном случае это точка *D* (рис. 3.1), в которой линия уровня $F = x_2 - x^2_1 + 6x_1 = 13$ касается стороны *AB*

многоугольника *OABC*. Координаты точки *D* можно найти на системы уравнений

$$\begin{cases} x_2 - x^2{}_1 + 6x_1 = 13, \\ x_2 = 4. \end{cases} \qquad (6)$$

Решая эту систему, получим $x_1^* = 3; x_2^* = 4.$ Итак, $F_{\max} = 13$ при $X^* = (3;4).$

Как видим, в задаче (3)-(5) точка максимального значения целевой функции не является вершиной многоугольника решений. Поэтому процедура перебора вершин, которая использовалась при решении задач линейного программирования, неприменима для решения данной задачи.

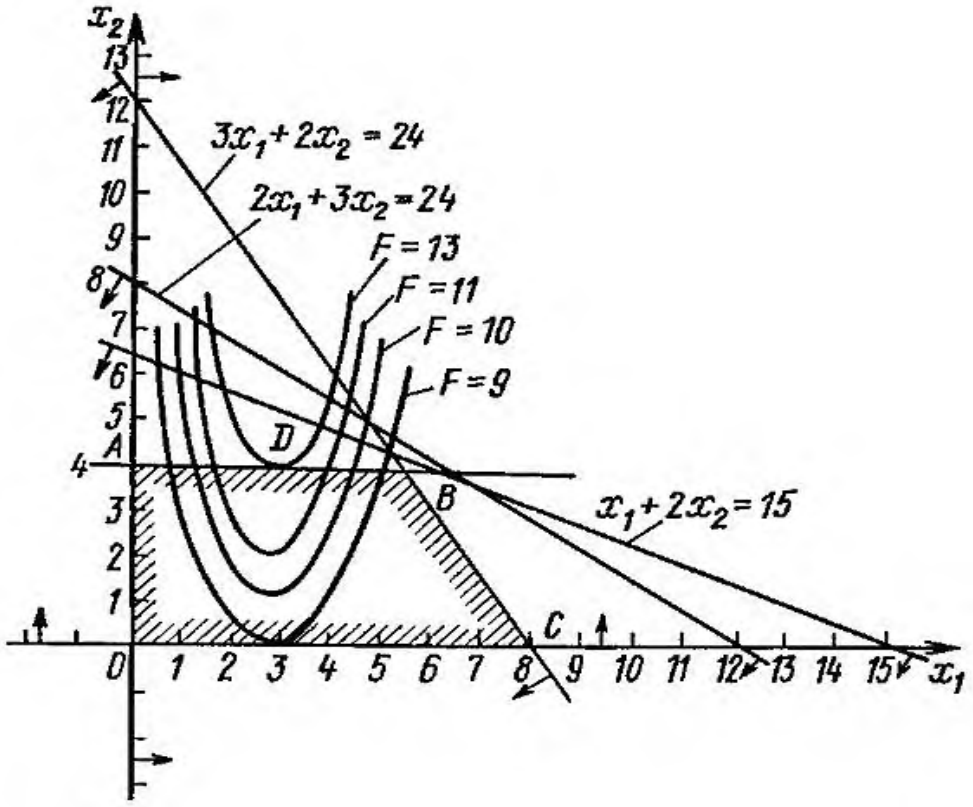

Рис.1 - Графическая интерпретация к решению примеру 2.1

2.2. Найти максимальное и минимальное значения функции

$$F = (x_1 - 3)^2 + (x^2 - 4)^2 \qquad (7)$$

при условиях

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ 10x_1 - x_2 \leq 8, \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12, \end{cases} \qquad (8)$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \qquad (9)$$

Р е ш е н и е. Областью допустимых решений задачи (7)-(9)является треугольник *ABC* (рис. 2). Полагая значение целевой функции (7) равным некоторому числу *h*, получаем линии уровня, а именно окружности $(x_1 - 3)^2 + (x^2 - 4)^2 = h$ с центром *E* (3; 4) и радиусом $\sqrt{h}$. С увеличением (уменьшением) числа h значения функции F соответственно увеличиваются (уменьшаются).

Проводя из точки E окружности разных радиусов, видим, что минимальное значение целевая функция принимает в точке D, в которой окружность касается области решений. Для определения координат этой точки воспользуемся равенством угловых коэффициентов прямой $10x_1 - x_2 = 8$ и касательной к окружности в точке *D*.

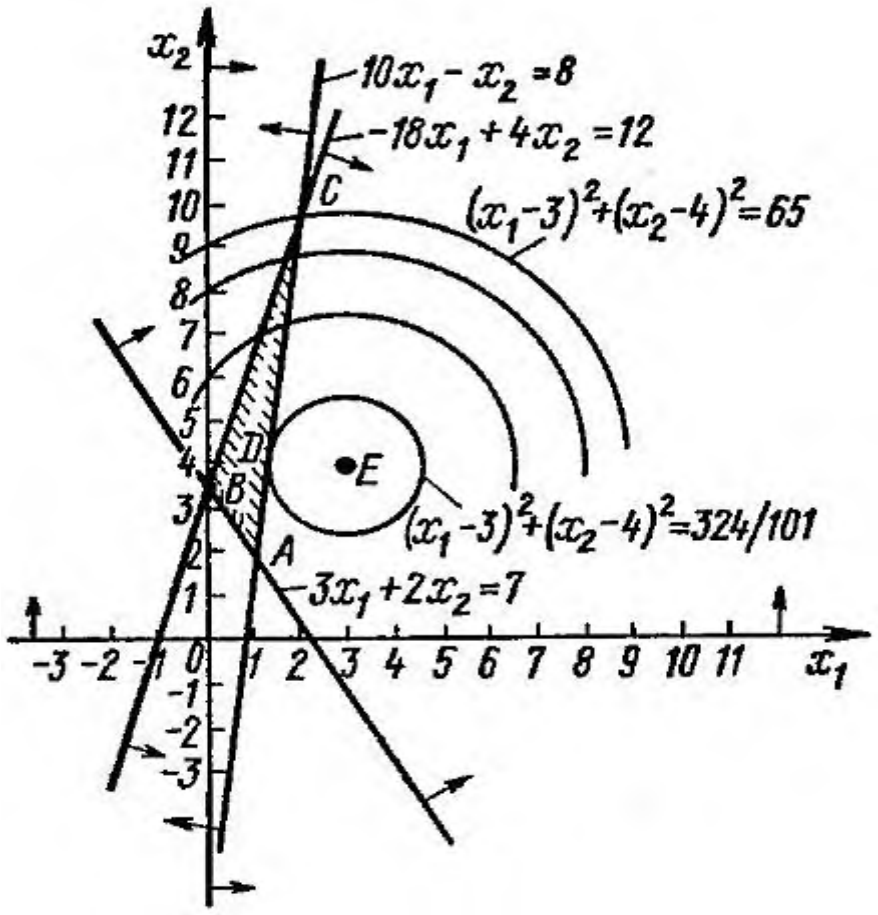

Рис.2 - Графическая интерпретация к решению примеру 2.2

Из уравнения прямой $x_2 = 10x_1 - 8$ видим, что ее угловой коэффициент в точке *D* равен l0. Угловой же коэффициент касательной к окружности в точке *D* определим как значение производной функции x_2 от переменной x_1 в этой точке. Рассматривая x_2 как неявную функцию переменной x_1 и дифференцируя уравнение окружности, получим

$$2(x_1 - 3) + 2(x_2 - 4)x_2' = 0,$$

откуда

$$x_2' = -(x_1 - 2)/(x_2 - 4).$$

Приравнивая найденное выражение числу 10, получаем одно из уравнений для определения координат точки *E*. Присоединяя к нему уравнение прямой, на которой лежит точка *E*, имеем систему

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 43, \\ 10x_1 - x_2 = 8, \end{cases}$$

откуда $x^*_1 = 123/101; x^*_2 = 422/101$.

Таким образом, $F_{mim} = (123/101 - 3)^2 + (422/101 - 4)^2 = 324/101$.

Как видно на рис. 3.2, целевая функция принимает максимальное значение в точке *C* (2; 12). Ее координаты определены путем решения системы уравнений прямых, на пересечении которых находится точка *C*. Таким образом, максимальное значение функции $F_{\max} = 65$.

3. Индивидуальное задание студента

Используя графический метод, найдите экстремальное значение f при указанных ограничениях:

$f = x_1 + x_2 \to \max$ 1. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 9 \\ x_1 + 2x_2 \ge 2 \end{cases}$	$f = x_1 + x_2 \to \min$ 2. $\begin{cases} (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \le 9 \\ x_1 + 4x_2 \le 16 \end{cases}$
$f = 3x_1 + x_2 \to \max$ 3. $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \ge 2 \\ x_1^2 + x_2^2 \le 16 \end{cases}$	$f = 2x_1 + x_2 \to \min$ 4. $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \le 4 \\ 3x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
$f = 2x_1 - x_2 \to \max$ 5. $\begin{cases} x_1^2 \le x_2 - 2 \\ 4x_1 + x_2 \le 12 \end{cases}$	$f = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min$ 6. $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + 3x_2 \le 9 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

7. $f = x_1^2 + x_2^2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \ge 5 \\ 0 \le x_2 \le 6 \\ 0 \le x_1 \le 7 \end{cases}$	8. $f = x_1^2 + x_2^2 \to \min$ $\begin{cases} x_2 - x_1^2 \le 2 \\ x_1 \ge 1 \\ x_2 \le 5 \end{cases}$
9. $f = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1^2 + x_2^2 \le 9 \\ x_1 \le 2 \end{cases}$	10. $f = x_1^2 + x_2^2 \to \min$ $\begin{cases} (x_1 - 12)^2 + (x_2 - 12) \le 144 \\ x_1 + x_2 \le 15 \\ x_2 \ge 5 \end{cases}$
11. $f = x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \le 9 \\ x_1 + 4x_2 \le 16 \end{cases}$	12. $f = x_1 + x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 9 \\ x_1 + 2x_2 \ge 2 \end{cases}$
13. $f = 2x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \le 4 \\ 3x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	14. $f = 3x_1 + x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \ge 2 \\ x_1^2 + x_2^2 \le 16 \end{cases}$
15. $f = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + 3x_2 \le 9 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	16. $f = 2x_1 - x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1^2 \le x_2 - 2 \\ 4x_1 + x_2 \le 12 \end{cases}$
17. $f = x_1^2 + x_2^2 \to \max$ $\begin{cases} x_2 - x_1^2 \le 2 \\ x_1 \ge 1 \\ x_2 \le 5 \end{cases}$	18. $f = x_1^2 + x_2^2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \ge 5 \\ 0 \le x_2 \le 6 \\ 0 \le x_1 \le 7 \end{cases}$
19. $f = x_1^2 + x_2^2 \to \max$ $\begin{cases} (x_1 - 12)^2 + (x_2 - 12) \le 144 \\ x_1 + x_2 \le 15 \\ x_2 \ge 5 \end{cases}$	20. $f = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1^2 + x_2^2 \le 9 \\ x_1 \le 2 \end{cases}$

Проверить полученный результат, используя встроенную надстройку Ms Excel «Поиск решения».

Контрольные вопросы

1. Сущность нелинейного программирования.
2. Дать объяснение формальной постановки задачи нелинейного программирования.
3. Коэффициенты целевой функции, их экономический смысл.
4. Как определить поверхность уровня?

Библиографический список

1. Акулич, И.Л. Математическое программирование в упражнениях и задачах [Текст] : учебное пособие - М.: Высшая школа, 1986. – 319 с.

2. Аттеков, А.В. Методы оптимизации [Текст] : учебное пособие/ Под ред. В.С. Зарубина - М.: ПрСМ, 2003. – 440 с.

3. Вентцель, Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология [Текст]: учебное пособие для студ. втузов. - М.: Высш. шк., 2001. – 208 с.

4. Ржевский, С. В. Исследование операций [Текст] : учебное пособие / С. В. Ржевский. - Санкт-Петербург : Лань, 2013. - 480 с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература).