

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 28.08.2023 16:58:01

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eab0f754943d14a4851fda56d089

## МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра космического приборостроения и систем связи

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебной работе  
О.Г. Локтионова  
« 8 » 08 2023 г.

## СЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Методические указания  
по выполнению лабораторной работы  
для студентов, обучающихся по направлению подготовки  
11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»  
по дисциплине «Электромагнитные поля и волны»

Курск 2023

УДК 621.391

Составители: Д.С. Коптев

Рецензент:

Доктор технических наук, старший научный сотрудник,  
заведующий кафедрой космического приборостроения и систем связи  
*В. Г. Андронов*

**Сложение колебаний и волн:** методические указания по выполнению лабораторной работы / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Д.С. Коптев. Курск, 2023. – 12 с.

Методические указания по выполнению лабораторной работы содержат краткие теоретические сведения, задания для выполнения работы, примеры их выполнения в математическом приложении MathCAD и перечень вопросов для самопроверки изучаемого материала.

Методические указания соответствуют учебному плану по направлению подготовки 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», а также рабочей программе дисциплины «Электромагнитные поля и волны».

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению подготовки 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 08.08.2023. Формат 60x84/16.  
Усл. печ. л. 0,7. Уч.-изд. л. 0,63. Тираж 100 экз. Заказ 752. Бесплатно.  
Юго-Западный государственный университет.  
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

## 1 Цель работы

- изучить принципы наложения гармонических колебаний.

## 2 Краткие теоретические сведения

Рассмотрим вопрос о наложении синусоидальных волн, возбуждаемых в однородной и изотропной среде точечными источниками  $S_1$  и  $S_2$  (рисунок 1), циклические частоты гармонических колебаний которых равны  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а начальные фазы – соответственно  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Пусть вызываемые ими колебания в произвольной точке  $M$  одинаково направлены и удовлетворяют уравнению:

$$s_1 = (a_1 / r_1) \sin(\omega_1 t - k_1 r_1 + \alpha_1) = A_1 \sin \Phi_1$$

или в комплексной форме:  $s_1 = A_1 e^{i\Phi_1}$

$$s_2 (a_2 / r_2) \sin(\omega_2 t - k_2 r_2 + \alpha_2) = A_2 \sin \Phi_2$$

$$(s_2 = A_2 e^{i\Phi_2})$$

По принципу суперпозиции, результирующее колебание в точке  $M$  определяется

$$(s = A e^{i\Phi})$$

Для нахождения  $A$  и  $\Phi$  воспользуемся методом временных диаграмм (рисунок 2).

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1) \quad (1)$$

Возможны два случая

$$\operatorname{tg} \Phi = (A_1 \sin \Phi_1 + A_2 \sin \Phi_2) / (A_1 \cos \Phi_1 + A_2 \cos \Phi_2) \quad (2)$$

а) разность фаз волн  $\Phi_2 - \Phi_1$  в точке  $M$  изменяется с течением времени; такие волны и возбуждающие их источники  $S1$  и  $S2$  называются некогерентными;

б) разность фаз волн  $\Phi_2 - \Phi_1$  не зависит от времени; такие волны и возбуждающие их источники называются когерентными.

Используя соотношение  $k = \omega/v$ , где  $v$  – фазовая скорость волны, получим  $\Phi_1 = \omega_1 t - \omega_1 (r_1 / v_1) + \alpha_1$

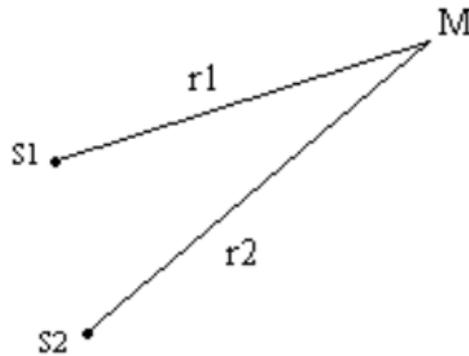


Рисунок 1 – Синусоидальных волн, возбуждаемых в однородной и изотропной среде точечными источниками  $S_1$  и  $S_2$

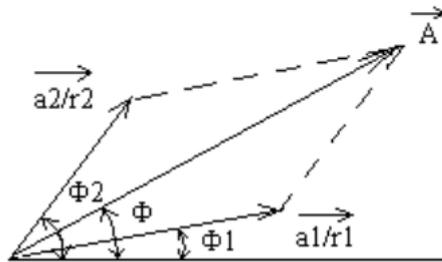


Рисунок 2 – Сложение двух одинаково направленных гармонических колебаний

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \omega_2 t - \omega_2 (r_2 / v_2) + \alpha_2 \\ \Phi_2 - \Phi_1 &= (\omega_2 - \omega_1) t - (\omega_2 (r_2 / v_2) - \omega_1 (r_1 / v_1)) + (\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned} \quad (3)$$

Второй и третий члены правой части равенства не зависят от времени. Поэтому две синусоидальные волны когерентны, если их частоты одинаковы, и некогерентны, если их частоты различны.

Из формулы (1) следует, что при наложении некогерентных синусоидальных волн амплитуда результирующих колебаний в точке  $M$  среды зависит от времени, то есть результирующие колебания негармонические. Амплитуда  $A$  изменяется в пределах от  $|A_1 - A_2|$  до  $A_1 + A_2$ , причем циклическая частота колебаний амплитуды  $A$  совпадает с циклической частотой изменения  $\Phi_2 - \Phi_1$ , то есть равна  $|\omega_2 - \omega_1|$ . Если эта частота достаточно велика, то любой регистрирующий прибор не будет успевать реагировать на изменения величины  $A$ , то есть будет показывать лишь некоторое ее среднее значение.

Найдем среднее значение  $\langle A^2 \rangle$  квадрата амплитуды за время, равное периоду  $\tau$  ее изменения:

$$\begin{aligned}\langle A^2 \rangle &= (1/\tau) \int_0^\tau A^2 dt = (1/\tau) \int_0^\tau [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1)] dt \\ \langle A^2 \rangle &= A_1^2 + A_2^2 + (2A_1A_2/\tau) \int_0^\tau \cos(\Phi_2 - \Phi_1) dt\end{aligned}\quad (4)$$

Так как за время  $\tau$  разность  $\Phi_2 - \Phi_1$  изменяется на  $2\pi$ , то

$$r_2 - r_1 = \pm m\lambda \quad \int_0^\tau \cos(\Phi_2 - \Phi_1) dt = 0 \quad \int_0^\tau e^{i(\Phi_2 - \Phi_1)} dt = 0$$

и

$$\langle A^2 \rangle = A_1^2 + A_2^2$$

Таким образом, при наложении некогерентных волн среднее значение квадрата амплитуды результирующей волны равно сумме квадратов амплитуд исходных волн. В согласии с законом сохранения энергии при наложении некогерентных волн происходит суммирование их энергий.

Иначе обстоит дело при наложении когерентных волн. Полагая в формуле (6.3)  $w_1 = w_2 = w$  и учитывая, что при этом в однородной и изотропной среде  $v_1 = v_2 = v$ , получаем

$$\Phi_2 - \Phi_1 = -w/v(r_2 - r_1) + (\alpha_2 - \alpha_1) = -k(r_2 - r_1) + (\alpha_2 - \alpha_1)$$

Поэтому формулу (1) можно переписать в таком виде:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[k(r_2 - r_1) - (\alpha_2 - \alpha_1)]\quad (5)$$

Так как  $\alpha_1 - \alpha_2 = \text{const}$  и  $k = \text{const}$ , то амплитуда  $A$  не зависит от времени. Косинус в правой части формулы (5) равен единице и амплитуда результирующего колебания максимальна ( $A = A_1 + A_2$ ) во всех точках  $M$ , для которых аргумент косинуса равен четному числу  $\pi$ :

$$k(r_2 - r_1) + \alpha_1 - \alpha_2 = \pm 2m\pi\quad (6)$$

где  $m=0, 1, 2, \dots$ , или, заменив  $k$  на  $2\pi/\lambda$ , получим

$$r_2 - r_1 = \pm m\lambda + ((\alpha_2 - \alpha_1)/2\pi)\lambda\quad (7)$$

Если  $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$ , то это условие принимает вид:

$$r_2 - r_1 = \pm m\lambda \quad (m=1, 2, \dots)\quad (8)$$

Очевидно, что амплитуда результирующего колебания минимальна ( $A = |A_1 - A_2|$ ) во всех точках  $M$ , для которых

$$k(r_2 - r_1) + \alpha_1 - \alpha_2 = \pm(2m-1)\pi$$

или

$$r_2 - r_1 = \pm(2m-1)\lambda/2 + ((\alpha_2 - \alpha_1)/2\pi)\lambda\quad (9)$$

Если  $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$ , то условие минимума амплитуды имеет такой вид:

$$r_2 - r_1 = \pm(2m-1)\lambda / 2$$

Величина  $r_2 - r_1$  называется геометрической разностью хода волн от их источников S1 и S2 до рассматриваемой точки.

При наложении когерентных волн квадрат амплитуды и энергия результирующей волны, вообще говоря, отличны от суммы, соответственно, квадратов амплитуд и энергий исходных волн. В самом деле, в точках  $M$ , удовлетворяющих условию (7),

$$A^2 = (A_1 + A_2)^2$$

больше

$$(A_1^2 + A_2^2),$$

а в точках  $M$ , удовлетворяющих условию (8),

$$A^2 = (A_1 - A_2)^2$$

меньше

$$(A_1^2 + A_2^2).$$

Интерференцией волн называют явление, осуществляющееся при наложении двух или нескольких волн и состоящее в устойчивом во времени их взаимном усилении в одних точках пространства и ослаблении - в других в зависимости от соотношения между фазами этих волн. Из предыдущего ясно, что интерферировать могут только когерентные волны, если им соответствуют колебания, совершающиеся вдоль одного и того же или близких направлений.

При интерференции волн отсутствует простое суммирование их энергий. Иными словами, интерференция волны приводит к перераспределению энергии колебаний между соседними областями среды. Однако, в среднем, для достаточно большой области пространства энергия результирующей волны равна сумме энергий интерферирующих волн. Поэтому явление интерференции ни в какой мере не противоречит закону сохранения и превращения энергии [1].

Пример № 1. Рассмотрим с помощью программы MathCAD сложение двух электромагнитных волн.

Решение:

а) Пусть векторы напряженности электромагнитного поля колеблются перпендикулярно друг другу,

$$t := 0, 0.1..100 \quad w_2 := 5 \cdot 314 \quad \phi_2 := \frac{\pi}{2} \quad B := 12$$

$$y(t) := B \cdot \cos(w_2 \cdot t + \phi_2)$$

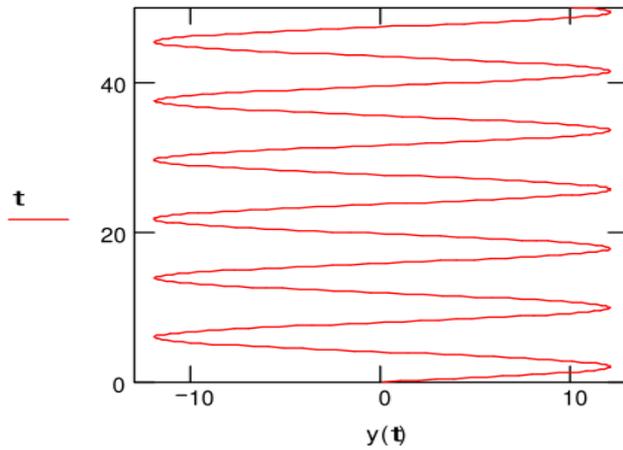


Рисунок 3 – Результат реализации функции  $y(t) := B \cdot \cos(w_2 \cdot t + \phi_2)$  в программе MathCAD

$$w_1 := 314 \cdot 3 \quad \phi_1 := \frac{\pi}{6} \quad A := 10 \quad x(t) := A \cdot \cos(w_1 \cdot t + \phi_1)$$

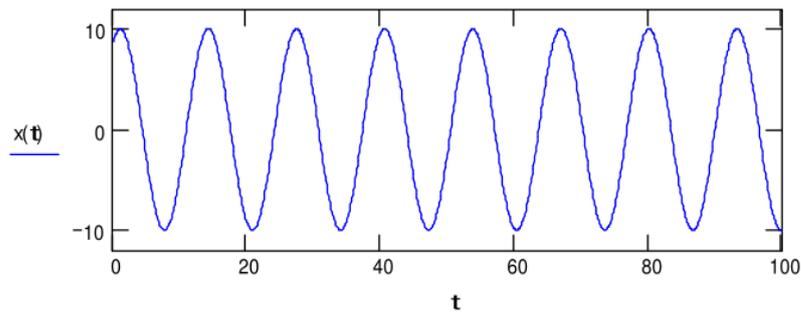


Рисунок 4 – Результат реализации функции  $x(t) := A \cdot \cos(w_1 \cdot t + \phi_1)$  в программе MathCAD

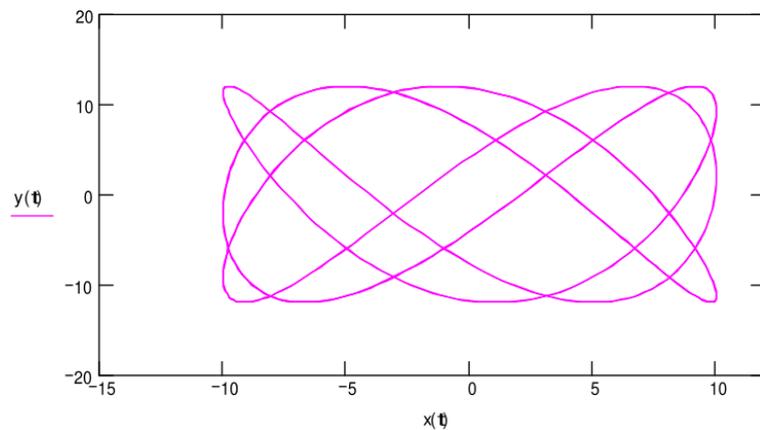


Рисунок 5 – Результат совместной реализации функций  $x(t) := A \cdot \cos(w_1 \cdot t + \phi_1)$  и  $y(t) := B \cdot \cos(w_2 \cdot t + \phi_2)$  в программе MathCAD

б) Пусть векторы напряженности электромагнитного поля колеблются параллельно друг другу:

$$\phi := \phi_2 - \phi_1 \quad w := w_2 - w_1 \quad z(t) := \sqrt{A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos(w \cdot t + \phi)}$$

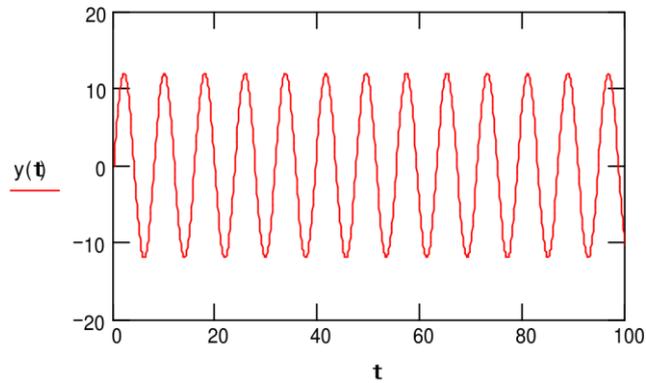


Рисунок 6 – Результат реализации функции  $y(t) := B \cdot \cos(w_2 \cdot t + \phi_2)$  в программе MathCAD

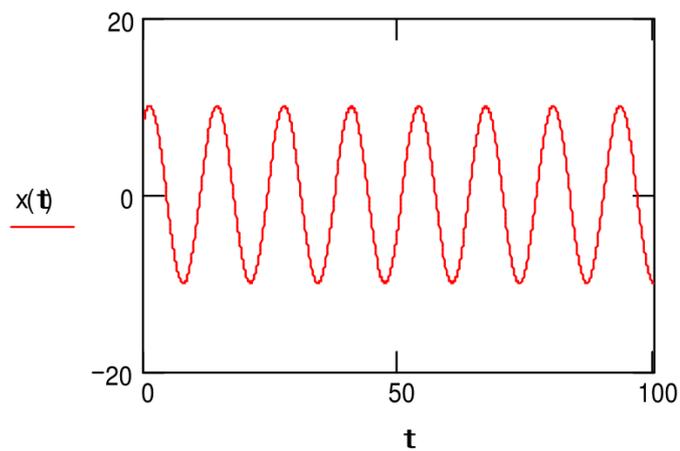


Рисунок 7 – Результат реализации функции  $x(t) := A \cdot \cos(w_1 \cdot t + \phi_1)$  в программе MathCAD

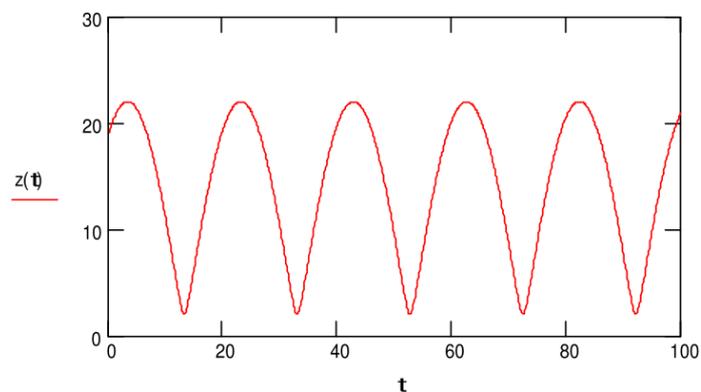


Рисунок 8 – Результат реализации функции  $z(t) := \sqrt{A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos(w \cdot t + \phi)}$  в программе MathCAD

Частным случаем интерференции волн являются так называемые стоячие волны. Стоячие волны возникают при наложении двух распространяющихся навстречу бегущих монохроматических волн одинаковой частоты, амплитуды и поляризации. Такая картина получается, в частности, при полном отражении волны от границы. Падающая на границу волна и бегущая ей навстречу отраженная волна, налагаясь друг на друга, дают стоячую волну.

Напишем уравнения двух плоских волн, распространяющихся вдоль одной оси в противоположных направлениях.

$$\zeta_1 = a \cos(\omega t - kx + \alpha_1)$$

$$\zeta_2 = a \cos(\omega t + kx + \alpha_2)$$

Сложив вместе эти уравнения, получим:

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 = 2a \cos\left(kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)$$

Полученное уравнение - это уравнение стоячей волны.

Рассмотрим структуру электромагнитного поля стоячей волны, созданной наложением встречных линейно поляризованных плоских волн. Выберем ось  $Z$  в направлении распространения одной из волн, а ось  $X$  - в направлении поляризации. Начало отсчета расстояний на оси  $Z$  выберем в точке, где колебания напряженности электрического поля обеих волн происходят в одинаковой фазе, а начало отсчета времени - в тот момент, когда эти напряженности в начале координат достигают максимума. Результирующее электромагнитное поле:

$$\vec{E} = \{2E_0 e^{-i\omega t} \cos kz; 0; 0\}$$

$$\vec{B} = \{0; 2; B_0 e^{i\omega t} \sin kz; 0\}$$

Из этих формул видно, что вектор напряженности электрического поля результирующей волны в каждой точке совершает гармоническое колебание в направлении оси  $X$  с частотой  $\omega$ , причем амплитуда колебаний изменяется от максимального значения  $2E_0$  в плоскостях  $z = (\pi/k)n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), называемых пучностями электрического поля, до нуля в плоскостях  $z = (t/k)(n + 1/2) = (\pi/2)(n + 1/2)$ , называемых узлами. Фаза колебаний во всех точках между соседними узлами одинакова, а колебания по разные стороны узла происходят в противофазе.

В отличие от бегущей волны в стоячей волне отсутствует перенос энергии – полная энергия колебаний каждого элемента объема среды, ограниченного соседним узлом и пучностью, не зависит от времени. Она лишь периодически переходит из кинетической энергии, локализованной в основном вблизи пучности, в потенциальную энергию упруго деформированной среды, локализованную в основном вблизи узла, а затем обратно из потенциальной в кинетическую [1].

Пример № 2. В вакууме в направлении оси  $Z$  установилась стоячая электромагнитная волна. Рассмотреть распространение электромагнитной волны а) в положительном направлении оси  $Z$ , б) в отрицательном направлении оси  $Z$ . Изобразить примерную картину распределения электрической и магнитной составляющих волны в моменты  $t=0$  и  $t=T/4$ , где  $T$  – период колебаний.

Решение: Учтем, что векторы  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$  в каждой из волн, образующих стоячую волну, образуют правую тройку векторов.

а) Волна распространяется в положительном направлении оси  $Z$

$$B = B_m \cos(kz) \cos(\omega t), \quad E = E_m \cos(kz) \cos(\omega t)$$

$$T := 10 \quad \omega := 60 \quad \lambda := 30 \quad \kappa := 2 \cdot \frac{\pi}{\lambda}$$

$$E_m := 100 \quad B_m := 150 \quad t_1 := 0 \quad t_2 := \frac{T}{4}$$

$$E_1(z) := E_m \cdot \cos(\kappa \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t_1) \quad B_1(z) := B_m \cdot \cos(\kappa \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t_1)$$

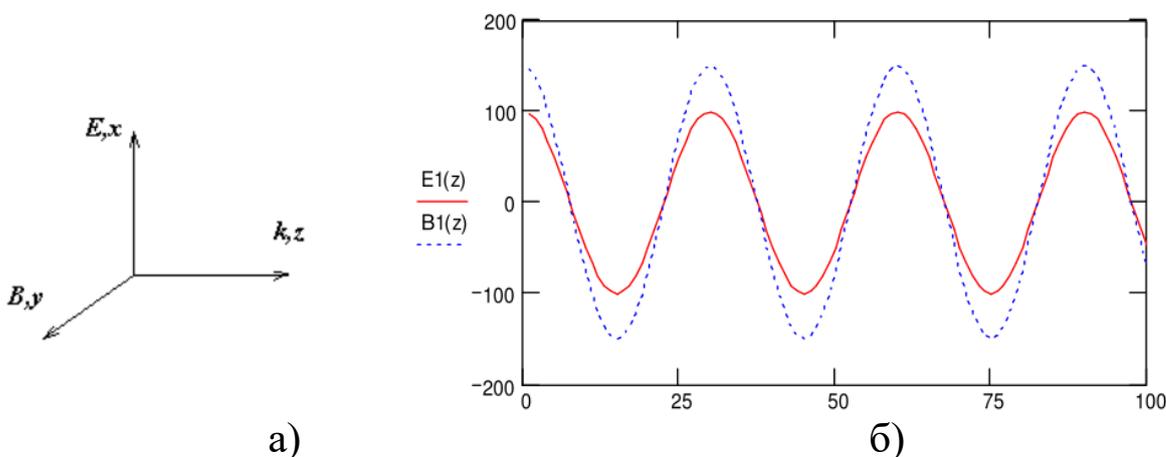


Рисунок 9 – Взаимная ориентация векторов (а), диаграмма гармонических колебаний  $E_1(z)$  и  $B_1(z)$

$$E_2(z) := E_m \cdot \cos(\kappa \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t_2) \quad B_2(z) := B_m \cdot \cos(\kappa \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t_2)$$

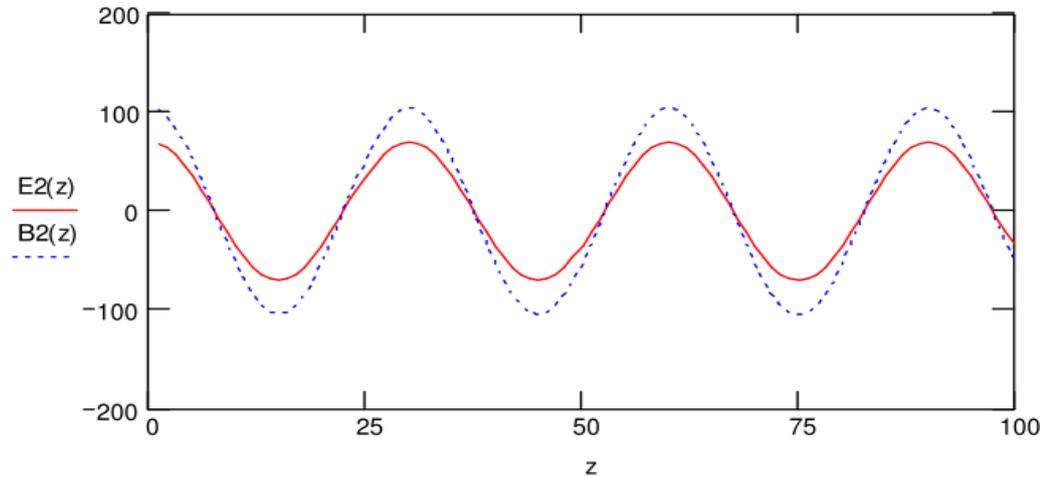


Рисунок 10 – Диаграмма гармонических колебаний  $E_2(z)$  и  $B_2(z)$

б) Волна распространяется в отрицательном направлении оси  $Z$ .

$$E = E_m \cos(-kz) \cos(\omega t) \quad B = -B_m \cos(-kz) \cos \omega t$$

$$z := 1..100 \quad E_3(z) := E_m \cdot \cos(-\kappa \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t_1) \quad B_3(z) := -B_m \cdot \cos(-\kappa \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t_1)$$

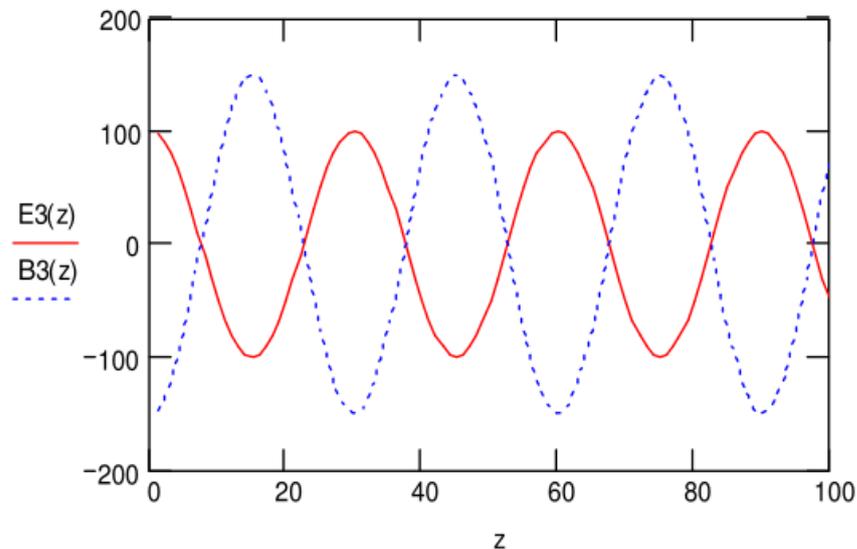


Рисунок 11 – Диаграмма гармонических колебаний  $E_3(z)$  и  $B_3(z)$

$$E_4(z) := E_m \cdot \cos(-\kappa \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t_2) \quad B_4(z) := -B_m \cdot \cos(-\kappa \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t_2)$$

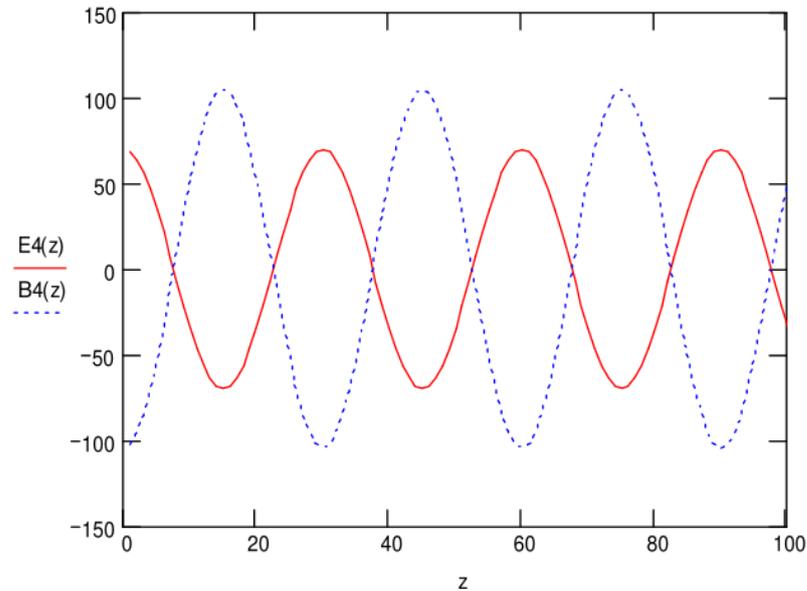


Рисунок 12 – Диаграмма гармонических колебаний  $E_4(z)$  и  $B_4(z)$

### 3 Задание на лабораторную работу

1) В направлении оси  $OZ$  установилась стоячая электромагнитная волна с электрической составляющей  $E = E_m \cos(kz) \cos(\omega t)$ . Найти магнитную составляющую волны  $B(z, t)$ . Изобразить картину распределения магнитной составляющей волны в разные моменты времени.

2) В вакууме вдоль оси  $OZ$  установилась стоячая электромагнитная волна с электрической составляющей  $E = E_m \cos(kz) \cos(\omega t)$ . Найти  $Z$ - проекцию вектора Пойнтинга  $S_2(z, t)$  и ее среднее за период значение.

### 4 Контрольные вопросы

1. Дайте определение некогерентных волн.
2. Дайте определение интерференции волн.
3. Запишите выражение для среднего значения квадрата амплитуды за время, равное периоду  $\tau$  ее изменения.
4. Дайте определение дифракции волн.
5. Дайте определение стоячей волны.