

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 28.08.2023 16:58:01

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eab0f754943d14a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра космического приборостроения и систем связи

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Локтионова
« 8 » 08 2023 г.



СЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Методические указания
по выполнению лабораторной работы
для студентов, обучающихся по направлению подготовки
11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»
по дисциплине «Электромагнитные поля и волны»

Курск 2023

УДК 621.391

Составители: Д.С. Коптев

Рецензент:

Доктор технических наук, старший научный сотрудник,
заведующий кафедрой космического приборостроения и систем связи
В. Г. Андронов

Сложение колебаний и волн: методические указания по выполнению лабораторной работы / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Д.С. Коптев. Курск, 2023. – 12 с.

Методические указания по выполнению лабораторной работы содержат краткие теоретические сведения, задания для выполнения работы, примеры их выполнения в математическом приложении MathCAD и перечень вопросов для самопроверки изучаемого материала.

Методические указания соответствуют учебному плану по направлению подготовки 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», а также рабочей программе дисциплины «Электромагнитные поля и волны».

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению подготовки 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 08.08.2023. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 0,7. Уч.-изд. л. 0,63. Тираж 100 экз. Заказ 752. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1 Цель работы

- изучить принципы наложения гармонических колебаний.

2 Краткие теоретические сведения

Рассмотрим вопрос о наложении синусоидальных волн, возбуждаемых в однородной и изотропной среде точечными источниками S_1 и S_2 (рисунок 1), циклические частоты гармонических колебаний которых равны ω_1 и ω_2 , а начальные фазы – соответственно α_1 и α_2 . Пусть вызываемые ими колебания в произвольной точке M одинаково направлены и удовлетворяют уравнению:

$$s_1 = (a_1 / r_1) \sin(\omega_1 t - k_1 r_1 + \alpha_1) = A_1 \sin \Phi_1$$

или в комплексной форме: $s_1 = A_1 e^{i\Phi_1}$

$$s_2 (a_2 / r_2) \sin(\omega_2 t - k_2 r_2 + \alpha_2) = A_2 \sin \Phi_2$$

$$(s_2 = A_2 e^{i\Phi_2})$$

По принципу суперпозиции, результирующее колебание в точке M определяется

$$(s = A e^{i\Phi})$$

Для нахождения A и Φ воспользуемся методом временных диаграмм (рисунок 2).

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1) \quad (1)$$

Возможны два случая

$$\operatorname{tg} \Phi = (A_1 \sin \Phi_1 + A_2 \sin \Phi_2) / (A_1 \cos \Phi_1 + A_2 \cos \Phi_2) \quad (2)$$

а) разность фаз волн $\Phi_2 - \Phi_1$ в точке M изменяется с течением времени; такие волны и возбуждающие их источники $S1$ и $S2$ называются некогерентными;

б) разность фаз волн $\Phi_2 - \Phi_1$ не зависит от времени; такие волны и возбуждающие их источники называются когерентными.

Используя соотношение $k = \omega/v$, где v – фазовая скорость волны, получим $\Phi_1 = \omega_1 t - \omega_1 (r_1 / v_1) + \alpha_1$

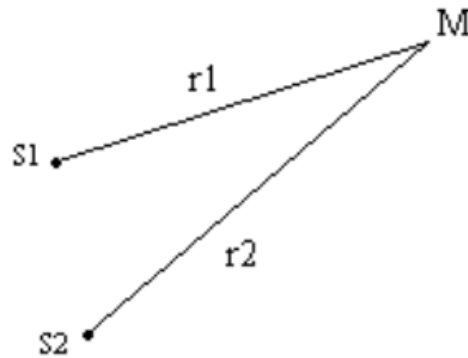


Рисунок 1 – Синусоидальных волн, возбуждаемых в однородной и изотропной среде точечными источниками S_1 и S_2

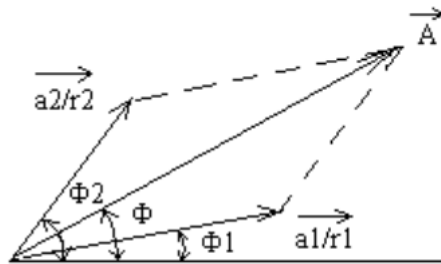


Рисунок 2 – Сложение двух одинаково направленных гармонических колебаний

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \omega_2 t - \omega_2 (r_2 / v_2) + \alpha_2 \\ \Phi_2 - \Phi_1 &= (\omega_2 - \omega_1) t - (\omega_2 (r_2 / v_2) - \omega_1 (r_1 / v_1)) + (\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned} \quad (3)$$

Второй и третий члены правой части равенства не зависят от времени. Поэтому две синусоидальные волны когерентны, если их частоты одинаковы, и некогерентны, если их частоты различны.

Из формулы (1) следует, что при наложении некогерентных синусоидальных волн амплитуда результирующих колебаний в точке M среды зависит от времени, то есть результирующие колебания негармонические. Амплитуда A изменяется в пределах от $|A_1 - A_2|$ до $A_1 + A_2$, причем циклическая частота колебаний амплитуды A совпадает с циклической частотой изменения $\Phi_2 - \Phi_1$, то есть равна $|\omega_2 - \omega_1|$. Если эта частота достаточно велика, то любой регистрирующий прибор не будет успевать реагировать на изменения величины A , то есть будет показывать лишь некоторое ее среднее значение.

Найдем среднее значение $\langle A^2 \rangle$ квадрата амплитуды за время, равное периоду τ ее изменения:

$$\begin{aligned}\langle A^2 \rangle &= (1/\tau) \int_0^\tau A^2 dt = (1/\tau) \int_0^\tau [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1)] dt \\ \langle A^2 \rangle &= A_1^2 + A_2^2 + (2A_1A_2/\tau) \int_0^\tau \cos(\Phi_2 - \Phi_1) dt\end{aligned}\quad (4)$$

Так как за время τ разность $\Phi_2 - \Phi_1$ изменяется на 2π , то

$$r_2 - r_1 = \pm m\lambda \quad \int_0^\tau \cos(\Phi_2 - \Phi_1) dt = 0 \quad \int_0^\tau e^{i(\Phi_2 - \Phi_1)} dt = 0$$

и

$$\langle A^2 \rangle = A_1^2 + A_2^2$$

Таким образом, при наложении некогерентных волн среднее значение квадрата амплитуды результирующей волны равно сумме квадратов амплитуд исходных волн. В согласии с законом сохранения энергии при наложении некогерентных волн происходит суммирование их энергий.

Иначе обстоит дело при наложении когерентных волн. Полагая в формуле (6.3) $w_1 = w_2 = w$ и учитывая, что при этом в однородной и изотропной среде $v_1 = v_2 = v$, получаем

$$\Phi_2 - \Phi_1 = -w/v(r_2 - r_1) + (\alpha_2 - \alpha_1) = -k(r_2 - r_1) + (\alpha_2 - \alpha_1)$$

Поэтому формулу (1) можно переписать в таком виде:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[k(r_2 - r_1) - (\alpha_2 - \alpha_1)]\quad (5)$$

Так как $\alpha_1 - \alpha_2 = \text{const}$ и $k = \text{const}$, то амплитуда A не зависит от времени. Косинус в правой части формулы (5) равен единице и амплитуда результирующего колебания максимальна ($A = A_1 + A_2$) во всех точках M , для которых аргумент косинуса равен четному числу π :

$$k(r_2 - r_1) + \alpha_1 - \alpha_2 = \pm 2m\pi\quad (6)$$

где $m=0, 1, 2, \dots$, или, заменив k на $2\pi/\lambda$, получим

$$r_2 - r_1 = \pm m\lambda + ((\alpha_2 - \alpha_1)/2\pi)\lambda\quad (7)$$

Если $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$, то это условие принимает вид:

$$r_2 - r_1 = \pm m\lambda \quad (m=1, 2, \dots)\quad (8)$$

Очевидно, что амплитуда результирующего колебания минимальна ($A = |A_1 - A_2|$) во всех точках M , для которых

$$k(r_2 - r_1) + \alpha_1 - \alpha_2 = \pm(2m-1)\pi$$

или

$$r_2 - r_1 = \pm(2m-1)\lambda/2 + ((\alpha_2 - \alpha_1)/2\pi)\lambda\quad (9)$$

Если $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$, то условие минимума амплитуды имеет такой вид:

$$r_2 - r_1 = \pm(2m-1)\lambda / 2$$

Величина $r_2 - r_1$ называется геометрической разностью хода волн от их источников S1 и S2 до рассматриваемой точки.

При наложении когерентных волн квадрат амплитуды и энергия результирующей волны, вообще говоря, отличны от суммы, соответственно, квадратов амплитуд и энергий исходных волн. В самом деле, в точках M , удовлетворяющих условию (7),

$$A^2 = (A_1 + A_2)^2$$

больше

$$(A_1^2 + A_2^2),$$

а в точках M , удовлетворяющих условию (8),

$$A^2 = (A_1 - A_2)^2$$

меньше

$$(A_1^2 + A_2^2).$$

Интерференцией волн называют явление, осуществляющееся при наложении двух или нескольких волн и состоящее в устойчивом во времени их взаимном усилении в одних точках пространства и ослаблении - в других в зависимости от соотношения между фазами этих волн. Из предыдущего ясно, что интерферировать могут только когерентные волны, если им соответствуют колебания, совершающиеся вдоль одного и того же или близких направлений.

При интерференции волн отсутствует простое суммирование их энергий. Иными словами, интерференция волны приводит к перераспределению энергии колебаний между соседними областями среды. Однако, в среднем, для достаточно большой области пространства энергия результирующей волны равна сумме энергий интерферирующих волн. Поэтому явление интерференции ни в какой мере не противоречит закону сохранения и превращения энергии [1].

Пример № 1. Рассмотрим с помощью программы MathCAD сложение двух электромагнитных волн.

Решение:

а) Пусть векторы напряженности электромагнитного поля колеблются перпендикулярно друг другу,

$$t := 0, 0.1..100 \quad w_2 := 5 \cdot 314 \quad \phi_2 := \frac{\pi}{2} \quad B := 12$$

$$y(t) := B \cdot \cos(w_2 \cdot t + \phi_2)$$

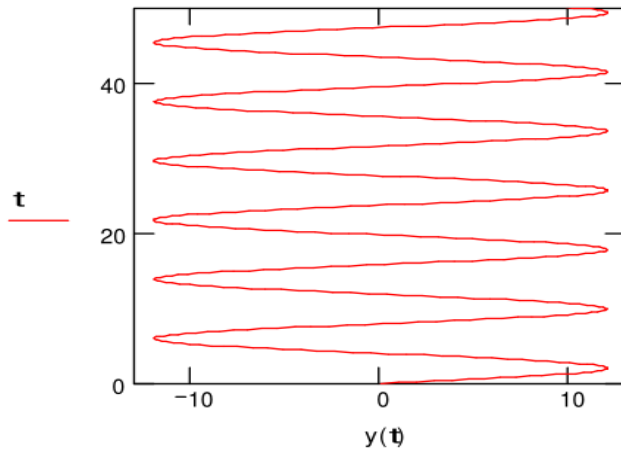


Рисунок 3 – Результат реализации функции $y(t) := B \cdot \cos(w_2 \cdot t + \phi_2)$ в программе MathCAD

$$w_1 := 314 \cdot 3 \quad \phi_1 := \frac{\pi}{6} \quad A := 10 \quad x(t) := A \cdot \cos(w_1 \cdot t + \phi_1)$$

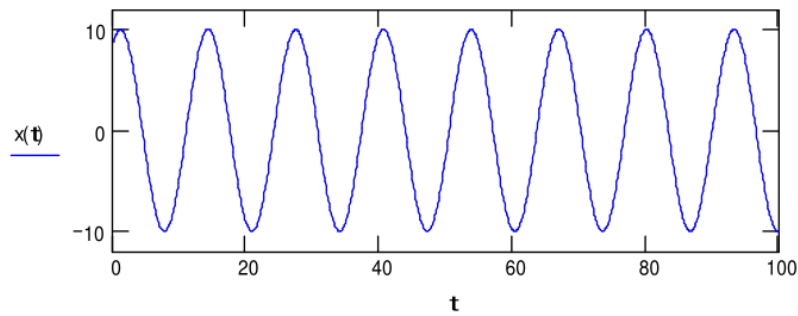


Рисунок 4 – Результат реализации функции $x(t) := A \cdot \cos(w_1 \cdot t + \phi_1)$ в программе MathCAD

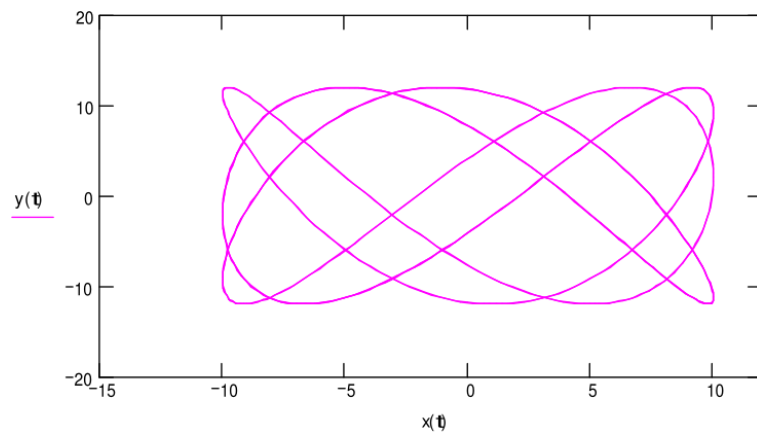


Рисунок 5 – Результат совместной реализации функций $x(t) := A \cdot \cos(w_1 \cdot t + \phi_1)$ и $y(t) := B \cdot \cos(w_2 \cdot t + \phi_2)$ в программе MathCAD

б) Пусть векторы напряженности электромагнитного поля колеблются параллельно друг другу:

$$\phi := \phi_2 - \phi_1 \quad w := w_2 - w_1 \quad z(t) := \sqrt{A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos(w \cdot t + \phi)}$$

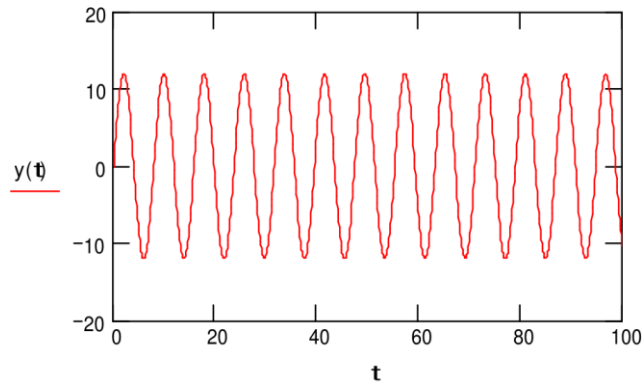


Рисунок 6 – Результат реализации функции $y(t) := B \cdot \cos(w_2 \cdot t + \phi_2)$ в программе MathCAD

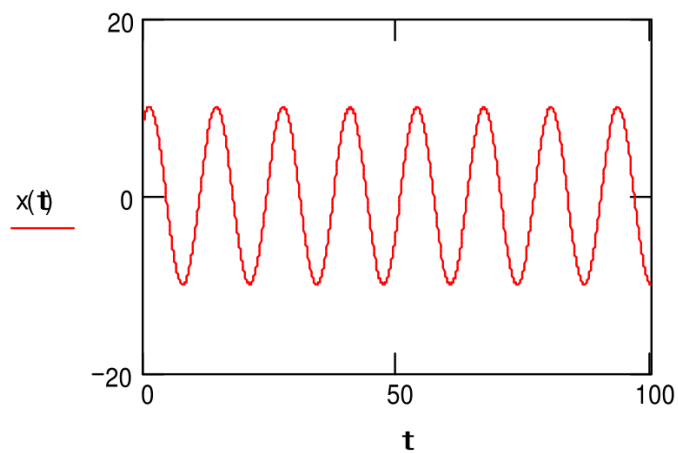


Рисунок 7 – Результат реализации функции $x(t) := A \cdot \cos(w_1 \cdot t + \phi_1)$ в программе MathCAD

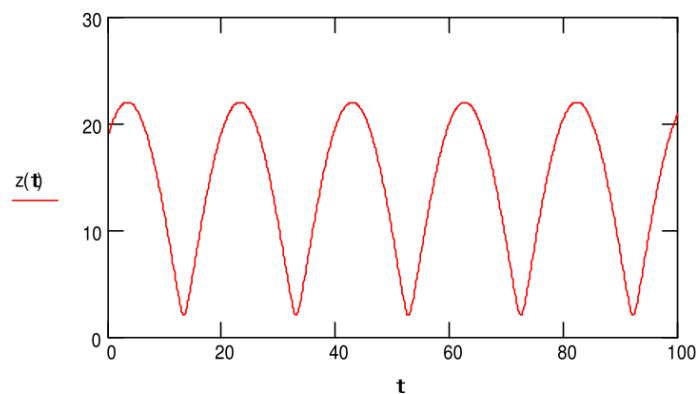


Рисунок 8 – Результат реализации функции $z(t) := \sqrt{A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos(w \cdot t + \phi)}$ в программе MathCAD

Частным случаем интерференции волн являются так называемые стоячие волны. Стоячие волны возникают при наложении двух распространяющихся навстречу бегущих монохроматических волн одинаковой частоты, амплитуды и поляризации. Такая картина получается, в частности, при полном отражении волны от границы. Падающая на границу волна и бегущая ей навстречу отраженная волна, налагаясь друг на друга, дают стоячую волну.

Напишем уравнения двух плоских волн, распространяющихся вдоль одной оси в противоположных направлениях.

$$\zeta_1 = a \cos(\omega t - kx + \alpha_1)$$

$$\zeta_2 = a \cos(\omega t + kx + \alpha_2)$$

Сложив вместе эти уравнения, получим:

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 = 2a \cos\left(kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)$$

Полученное уравнение - это уравнение стоячей волны.

Рассмотрим структуру электромагнитного поля стоячей волны, созданной наложением встречных линейно поляризованных плоских волн. Выберем ось Z в направлении распространения одной из волн, а ось X - в направлении поляризации. Начало отсчета расстояний на оси Z выберем в точке, где колебания напряженности электрического поля обеих волн происходят в одинаковой фазе, а начало отсчета времени - в тот момент, когда эти напряженности в начале координат достигают максимума. Результирующее электромагнитное поле:

$$\vec{E} = \{2E_0 e^{-i\omega t} \cos kz; 0; 0\}$$

$$\vec{B} = \{0; 2; B_0 e^{i\omega t} \sin kz; 0\}$$

Из этих формул видно, что вектор напряженности электрического поля результирующей волны в каждой точке совершает гармоническое колебание в направлении оси X с частотой ω , причем амплитуда колебаний изменяется от максимального значения $2E_0$ в плоскостях $z = (\pi/k)n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), называемых пучностями электрического поля, до нуля в плоскостях $z = (t/k)(n + 1/2) = (\pi/2)(n + 1/2)$, называемых узлами. Фаза колебаний во всех точках между соседними узлами одинакова, а колебания по разные стороны узла происходят в противофазе.

В отличие от бегущей волны в стоячей волне отсутствует перенос энергии – полная энергия колебаний каждого элемента объема среды, ограниченного соседним узлом и пучностью, не зависит от времени. Она лишь периодически переходит из кинетической энергии, локализованной в основном вблизи пучности, в потенциальную энергию упруго деформированной среды, локализованную в основном вблизи узла, а затем обратно из потенциальной в кинетическую [1].

Пример № 2. В вакууме в направлении оси Z установилась стоячая электромагнитная волна. Рассмотреть распространение электромагнитной волны а) в положительном направлении оси Z , б) в отрицательном направлении оси Z . Изобразить примерную картину распределения электрической и магнитной составляющих волны в моменты $t=0$ и $t=T/4$, где T – период колебаний.

Решение: Учтем, что векторы $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$ в каждой из волн, образующих стоячую волну, образуют правую тройку векторов.

а) Волна распространяется в положительном направлении оси Z

$$B = B_m \cos(kz) \cos(\omega t), \quad E = E_m \cos(kz) \cos(\omega t)$$

$$T := 10 \quad \omega := 60 \quad \lambda := 30 \quad \kappa := 2 \cdot \frac{\pi}{\lambda}$$

$$E_m := 100 \quad B_m := 150 \quad t_1 := 0 \quad t_2 := \frac{T}{4}$$

$$E_1(z) := E_m \cdot \cos(\kappa \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t_1) \quad B_1(z) := B_m \cdot \cos(\kappa \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t_1)$$

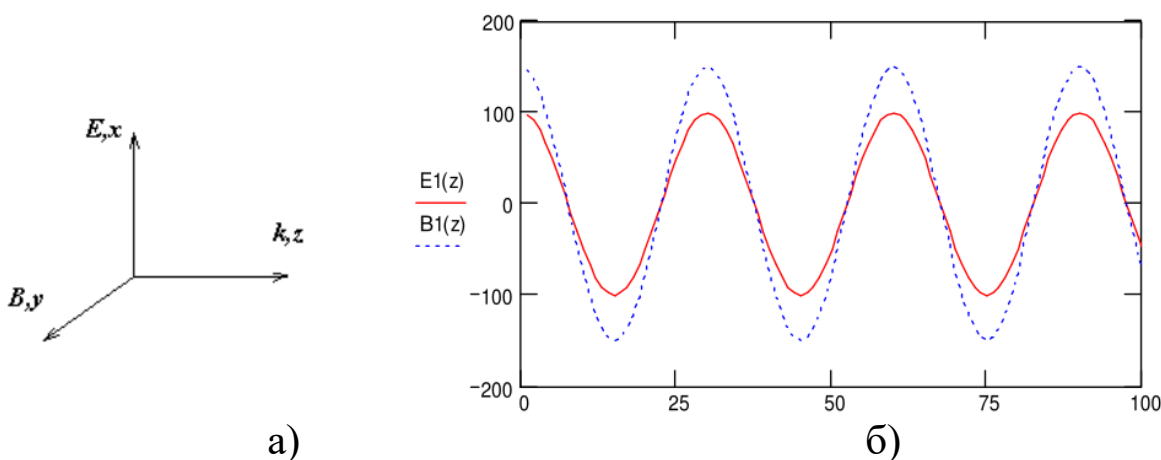


Рисунок 9 – Взаимная ориентация векторов (а), диаграмма гармонических колебаний $E_1(z)$ и $B_1(z)$

$$E_2(z) := E_m \cdot \cos(\kappa \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t_2) \quad B_2(z) := B_m \cdot \cos(\kappa \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t_2)$$

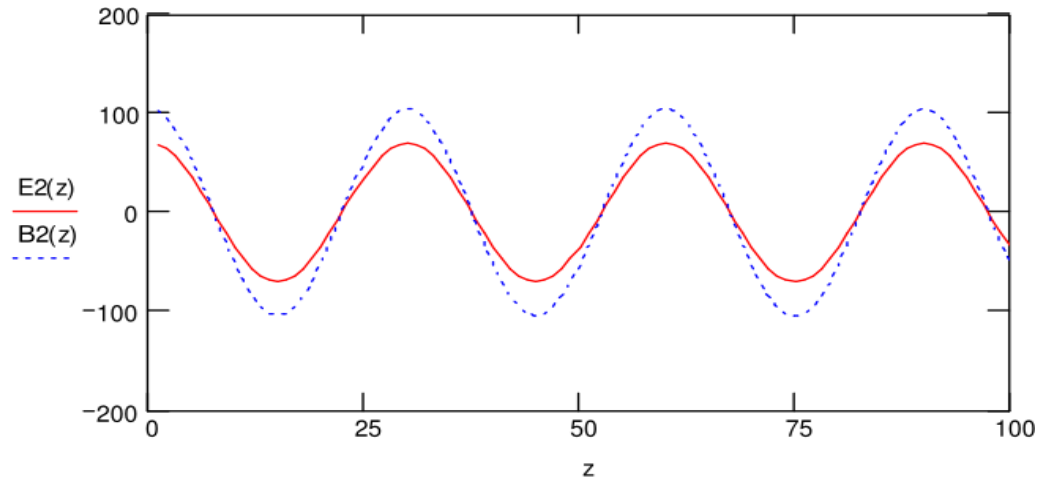


Рисунок 10 – Диаграмма гармонических колебаний $E_2(z)$ и $B_2(z)$

б) Волна распространяется в отрицательном направлении оси Z .

$$E = E_m \cos(-kz) \cos(\omega t) \quad B = -B_m \cos(-kz) \cos \omega t$$

$$z := 1..100 \quad E_3(z) := E_m \cdot \cos(-\kappa \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t_1) \quad B_3(z) := -B_m \cdot \cos(-\kappa \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t_1)$$

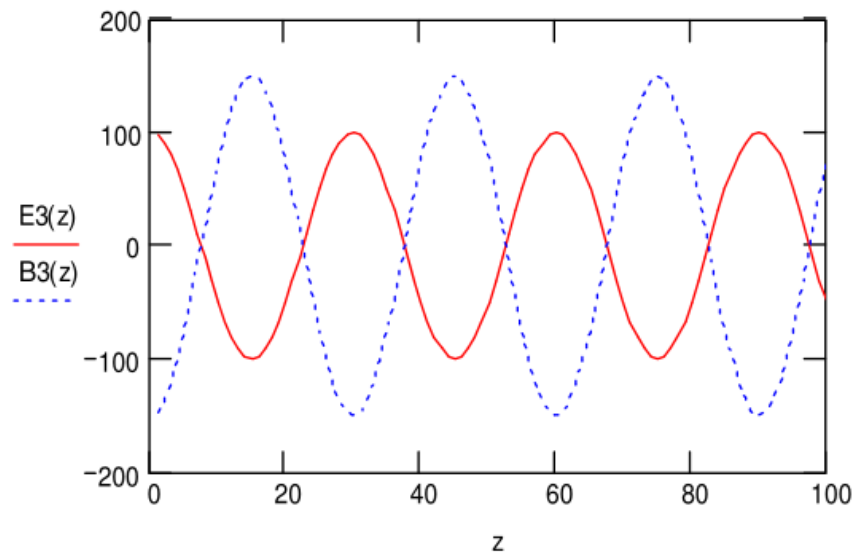


Рисунок 11 – Диаграмма гармонических колебаний $E_3(z)$ и $B_3(z)$

$$E_4(z) := E_m \cdot \cos(-\kappa \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t_2) \quad B_4(z) := -B_m \cdot \cos(-\kappa \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t_2)$$

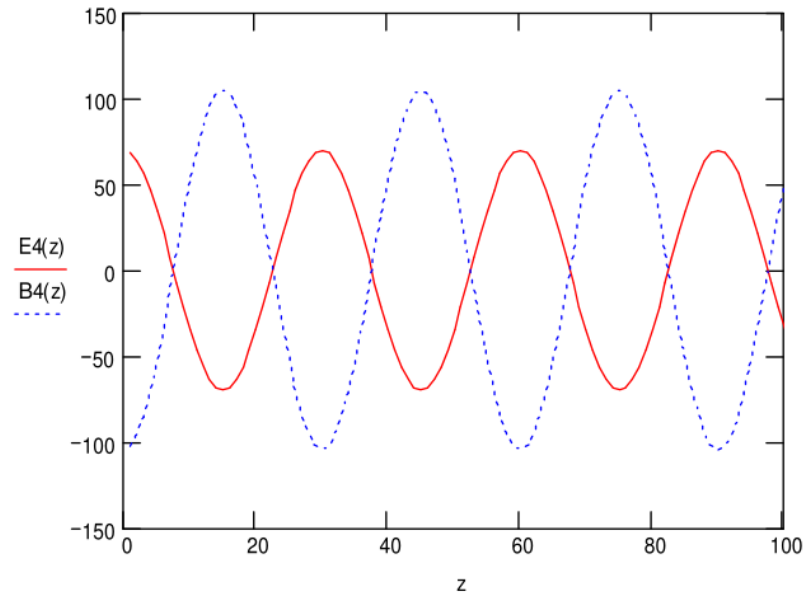


Рисунок 12 – Диаграмма гармонических колебаний $E_4(z)$ и $B_4(z)$

3 Задание на лабораторную работу

1) В направлении оси OZ установилась стоячая электромагнитная волна с электрической составляющей $E = E_m \cos(kz) \cos(\omega t)$. Найти магнитную составляющую волны $B(z, t)$. Изобразить картину распределения магнитной составляющей волны в разные моменты времени.

2) В вакууме вдоль оси OZ установилась стоячая электромагнитная волна с электрической составляющей $E = E_m \cos(kz) \cos(\omega t)$. Найти Z - проекцию вектора Пойнтинга $S_2(z, t)$ и ее среднее за период значение.

4 Контрольные вопросы

1. Дайте определение некогерентных волн.
2. Дайте определение интерференции волн.
3. Запишите выражение для среднего значения квадрата амплитуды за время, равное периоду τ ее изменения.
4. Дайте определение дифракции волн.
5. Дайте определение стоячей волны.