МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
____________ О.Г. Локтионова
«3» 05 __________ 2018 г.

Кратные интегралы

Индивидуальные задания и методические указания
по выполнению модуля

Курск 2018

УДК 517.37

Составитель В.И. Дмитриев

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент
кафедры высшей математики *Д.Н.Тютюнов*

Кратные интегралы: Методические указания и индивидуальные задания по выполнению модуля / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.И.Дмитриев. − Курск, 2018. − 30 с. табл.1 . Библиогр.: 30 с.

Методичка содержит общие указания к использованию ее материала, образцы выполнения заданий, рекомендации по использованию пакета MATHCAD при вычислении кратных интегралов, индивидуальные задания − по 100 вариантов каждого из 6 заданий.

Работа предназначена для студентов технических и экономических специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 3.05.18. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 1,7. Уч.-изд. л. 1,6. Тираж 100 экз. Заказ 1980. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Содержание

1. Общие указания

Настоящее пособие предназначено для студентов, изучающих раздел "Кратные интегралы" курса математики. Оно может использоваться как тематический многовариантный сборник задач тренингового характера для студентов дистанционной формы образования – в особенности тьюторами при контактном обучении, - а также как сборник заданий по соответствующему модулю системы РИТМО.

Студент, изучающий курс математики по модульной системе, должен выполнить индивидуальное задание, определяемое номером n студента в журнале группы и указаниями преподавателя. Рекомендуется трехуровневая система комплектации индивидуальных заданий. Уровни 1-й, 2-й, 3-й предлагают студенту набор задач, решение которых требует соответственно, по меньшей мере, удовлетворительного, хорошего, отличного знания темы "Кратные интегралы". Каждый студент – в зависимости от степени своей математической подготовки – должен: 1) выбрать определенный уровень; 2) выполнить задания этого уровня. Возможный комплект заданий: для первого уровня – 1, 2, 3; для второго – 1, 2, 3, 4; для третьего 1-5.

Задача 6 предлагается тем студентам, которым необходимо освоить технику интегрирования в размерностях, больших 3.

Задачи 2 – 6 могут быть решены на ЭВМ с помощью, например программного пакета MATHCAD. Порядок действий при этом таков: n-кратный интеграл, подлежащий вычислению, следует предварительно преобразовать в повторный, т.е. представить его как результат n последовательных однократных интегрирований. Повторный интеграл непосредственно вычисляется соответствующей программой MATHCADA.

2. Образцы выполнения заданий

2.1 Задача 1

Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x,y)\,dx .$$

Решение: Область интегрирования ограничена прямыми y = 1, y = 3, x = 0, x = 2y. На рис.2.1. она представляет трапецию ABCD.

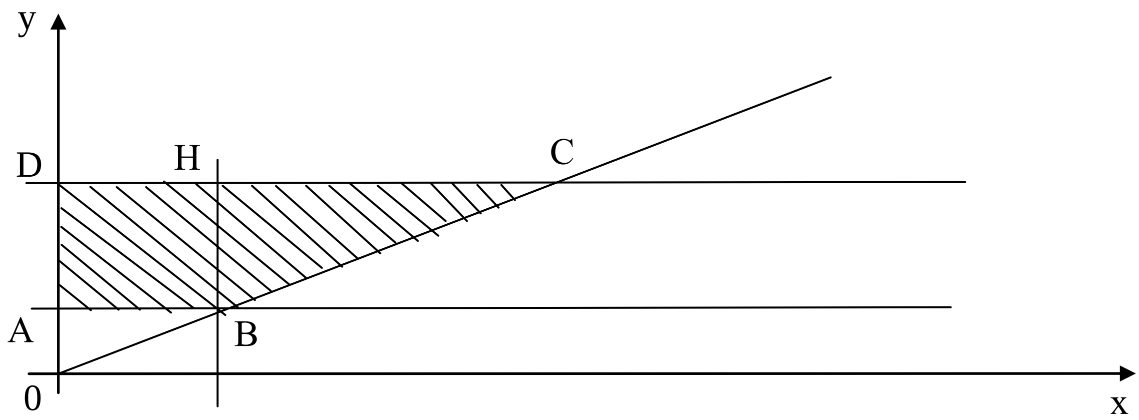

Рисунок 2.1 − Область интегрирования

При интегрировании в другом порядке, вначале по y, необходимо разбить область ABCD прямой BH, параллельной Oy на две части, так как нижняя линия границы этой области состоит из двух частей AB и BC, которые имеют уравнения y = 1 и y = x/2.

Поэтому интеграл при изменении порядка интегрирования окажется равным сумме двух интегралов

$$\int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x,y)\,dx = \int_0^2 dx \int_1^3 f(x,y)\,dy + \int_2^6 dx \int_{x/2}^3 f(x,y)\,dy.$$

2.2. Задача 2

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

где D – круговое кольцо, заключенное между окружностями $x^2+y^2=1,\quad x^2+y^2=4$ (рис.2.2)

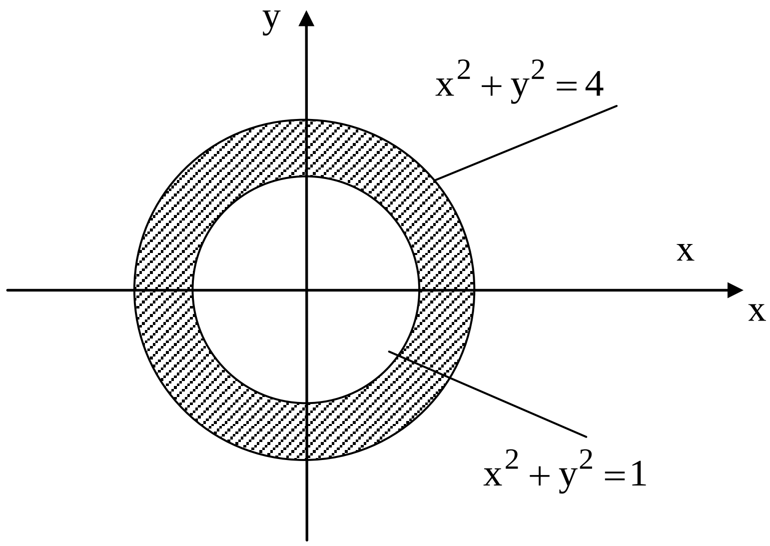

Рисунок 2.2 − Область интегрирования D

Решение: Преобразуем двойной интеграл, отнесенный к декартовым координатам (x,y), в двойной интеграл в полярных координатах (ρ,φ). Имеем $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$. Якобиан соответствующего преобразования равен ρ.

Очевидно, что точкам $(x,y)\in D$ взаимно однозначно соответствуют точки (ρ,φ) области $G=\{(\rho,\varphi):0\le\varphi<2\pi,\quad 1\le\rho\le 2\}$. Поэтому данный интеграл равен

$$\iint_G \frac{1}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}}\rho d\rho d\varphi=\iint_G d\rho d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^2 d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\rho\Big|_1^2 d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi.$$

2.3. Задача 3

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями
$y^2=x^3,\ y^2=8(6-x)^3.$

Решение: Построив данные полукубические параболы $y^2=x^3,\ y^2=8(6-x)^3$, получим криволинейный четырехугольник OABC на рис.2.3, O(0;0), B(6;0), C(4;8)

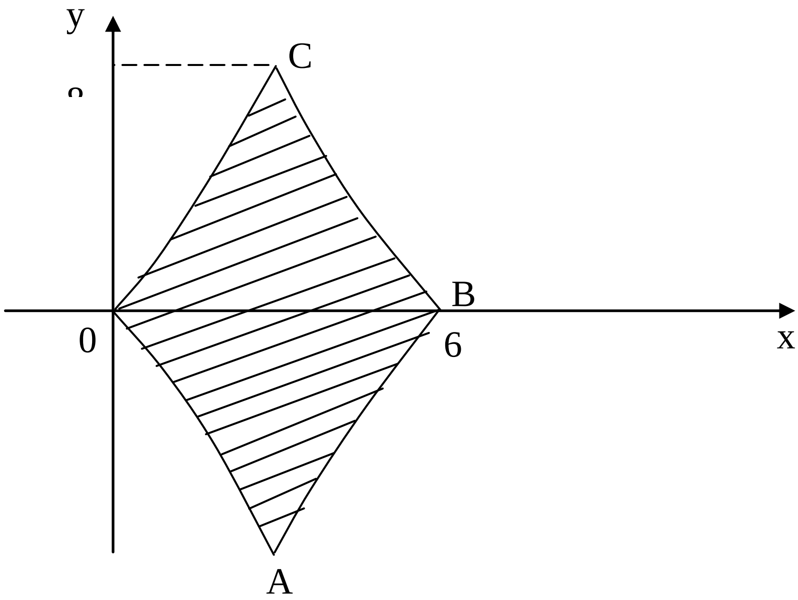

Рисунок 2.3 − Графики функций $y^2 = x^3$, $y^2 = 8(6-x)^3$

Вследствие симметричности фигуры относительно оси Ox, ее площадь S равна удвоенной площади фигуры D - криволинейного треугольника OBC:

$$S = 2\iint\limits_D dxdy = 2\int_0^8 dy \int_{y^{2/3}}^{6-\frac{1}{2}y^{2/3}} dx = 2\int_0^8 x\Big|_{y^{2/3}}^{6-\frac{1}{2}y^{2/3}} dy = 2\int_0^8 (6-\frac{3}{2}y^{2/3})dy =$$

$$= 2(6y - \frac{9}{10}y^{5/3})\Big|_0^8 = 2(48 - \frac{9}{10}\cdot 32) = 38\frac{2}{5}.$$

2.4. Задачи 4-5

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $hz = x^2 + y^2$, $z = h$ $(h > 0)$.Найти координаты центра масс тела, предполагая, что оно однородно.

Решение: Данное тело ограничено снизу параболоидом $z = \dfrac{x^2 + y^2}{h}$, сверху плоскостью z=h и проектируется в круг $x^2 + y^2 \le h$ плоскости XOY.

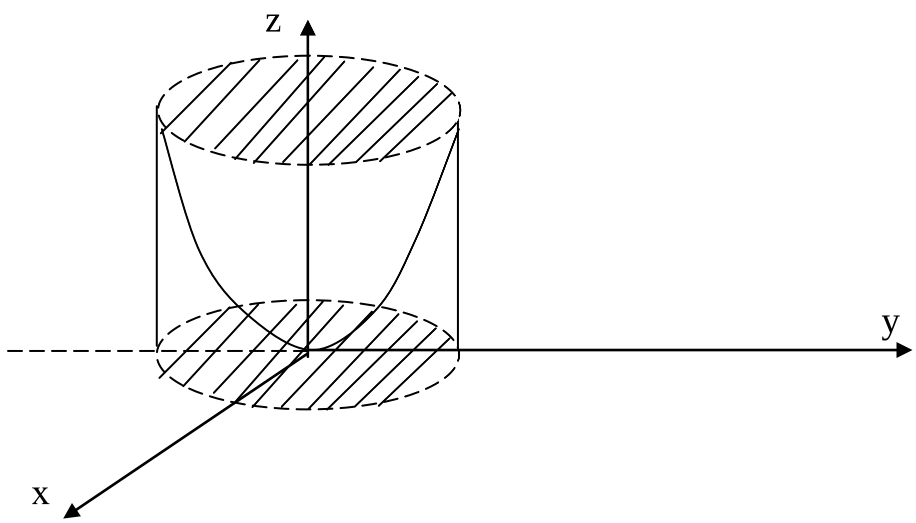

Рисунок 2.4 − Область интегрирования

Используем цилиндрические координаты:

$$x = \rho\cos\varphi,$$

$$y = \rho\sin\varphi,$$

$$z = z,$$

в которых уравнение параболоида будет

$$z = \frac{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}{h}, \qquad \text{т.е.} \qquad z = \frac{\rho^2}{h}.$$

Объем тела равен

$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz = \iiint\limits_{(V^*)} \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \rho d\rho \int_{\rho^2/h}^{h} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \left(h - \frac{\rho^2}{h} \right) \rho d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{h\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4h} \right) \Bigg|_0^h d\varphi = \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{4} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi h^3}{3}.$$

Координаты центра масс тела вычисляются по формулам

$$X_c = \frac{M_{yz}}{M}, \quad Y_c = \frac{M_{zx}}{M}, \quad Z_c = \frac{M_{xy}}{M}, \text{ где}$$

$$M = \iiint\limits_{(V)} \xi(x, y, z) dxdydz,$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x\xi(x, y, z) dxdydz,$$

$$M_{zx} = \iiint\limits_{(V)} y\xi(x, y, z) dxdydz,$$

$$M_{xy}=\iiint\limits_{(V)} z\xi(x,y,z)dxdydz,$$

где $\xi(x,y,z)$ - плотность тела в точке (x,y,z). Для однородного тела можно положить $\xi(x,y,z)=1$.

Находим:

$$M=\iiint\limits_{(V^*)}\rho d\rho d\varphi dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h\rho d\rho\int_{\rho^2/h}^h dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h\left(h-\frac{\rho^2}{h}\right)\rho d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{h\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4h}\right)\Bigg|_0^h d\varphi=\left(\frac{h^3}{2}-\frac{h^3}{4}\right)\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{\pi h^3}{3}.$$

$$M_{yz}=\iiint\limits_{(V^*)}\rho^2\cos\varphi d\varphi d\rho dz=\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\int_0^h\rho^2 d\rho\int_{\rho^2/h}^h dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\int_0^h\rho^2\left(h-\frac{\rho^2}{h}\right)d\rho=\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\int_0^h\left(\rho^2 h-\frac{\rho^4}{h}\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos\varphi\left(\frac{\rho^3}{3}h-\frac{\rho^5}{5h}\right)\Bigg|_0^h d\varphi=\int_0^{2\pi}\cos\varphi\left(\frac{h^4}{3}-\frac{h^4}{5}\right)d\varphi=\frac{2h^4}{15}\sin\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=0.$$

$$M_{zx}=\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^h\rho^2 d\rho\int_{\rho^2/h}^h dz=\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^h\left(\rho^2 h-\frac{\rho^4}{h}\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{2h^4}{15}\cdot\sin\varphi d\varphi=\frac{2h^4}{15}\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi=-\frac{2h^4}{15}\cdot\cos\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=0.$$

$$M_{xy}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h\rho d\rho\int_{\rho^2/h}^h zdz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h\rho\frac{z^2}{2}\Bigg|_{\rho^2/h}^h d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h\rho\left(\frac{h^2}{2}-\frac{\rho^4}{2h^2}\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h\left(\frac{\rho h^2}{2}-\frac{\rho^5}{2h^2}\right)d\rho=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^2h^2}{4}-\frac{\rho^6}{12h^2}\right)\Bigg|_0^h=\int_0^{2\pi}\left(\frac{h^4}{4}-\frac{h^2}{12}\right)d\varphi=$$

$$=2\pi\cdot\left(\frac{h^4}{4}-\frac{h^2}{12}\right).$$

Таким образом

$$X_c = 0, \quad Y_c = 0, \quad Z_c = h - \frac{1}{3h}.$$

2.5. Использование пакета MATHCAD при вычислении кратных интегралов

Задача. Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint\limits_T (x + y + z)\,dxdydz,$$

где $T = \{(x, y, z): \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \quad x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} \leq 1\}$ (т.о. T – часть области, ограниченной эллипсоидом $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1$, лежащая в неотрицательном октанте пространства).

Решение: Выполняя переход от кратного интеграла к повторным интегралам, получаем

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{2(1-x^2)}} \left(\int_0^{\sqrt{3(1-x^2-\frac{y^2}{2})}} (x + y + z)\,dz \right) dy \right) dx \qquad (*)$$

Обратимся к Mathcad. Вызовем на экран математическую палитру. Из окна математической палитры вызовем Arithmetic Palette и Calculus Palette. Наберем на экране правую часть равенства (*). Для набора знака определенного интеграла используем Calculus Palette, действуя мышью. Все остальное набираем или клавиатурой или – математические знаки –с помощью Arithme- tic Palette, действуя мышью. По окончании набора нажмем клавишу ПРОБЕЛ и затем знак "=" (равно). Справа от знака "=" появляется результат: 1.994.

Задача решена.

3.ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

3.1. Задача 1

Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле, сделав чертеж области интегрирования.

Таблица 3.1

№	Задание	№	Задание
1	$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$	10	$\int_0^3 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{3-y} f(x,y)dx$
2	$\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$	11	$\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$
3	$\int_0^a dx \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$	12	$\int_{R/2}^{2R} dy \int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x,y)dx$
4	$\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$	13	$\int_2^6 dx \int_{2x-4}^{x+2} f(x,y)dy$
5	$\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy$	14	$\int_0^3 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{6-2y} f(x,y)dx$
6	$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$	15	$\int_0^4 dx \int_{\frac{16-x^2}{8}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)dy$
7	$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy$	16	$\int_2^4 dx \int_0^{\sqrt{8x-x^2}} f(x,y)dy$
8	$\int_0^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy + \int_{-2}^0 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$	17	$\int_0^6 dx \int_{\sqrt{6x-x^2}}^{\sqrt{12x}} f(x,y)dy$
9	$\int_0^2 dy \int_{y-2}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$	18	$\int_0^5 dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{5-y} f(x,y)dx$

Продолжение табл.3.1

№	Задание	№	Задание
19	$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\frac{x^2}{2}}^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dy$	29	$\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{3}{4}y}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx$
20	$\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{6-y} f(x,y)dy$	30	$\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x^2}{8}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$
21	$\int\limits_0^R dx \int\limits_{x-R}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$	31	$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2+1}^{y+1} f(x,y)dx$
22	$\int\limits_0^a dy \int\limits_{y}^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x,y)dx$	32	$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2+1}^{2x+1} f(x,y)dy$
23	$\int\limits_0^3 dx \int\limits_{x-3}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy$	33	$\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$
24	$\int\limits_0^a dy \int\limits_{y-a}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx$	34	$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$
25	$\int\limits_1^5 dx \int\limits_{x-5}^{x} f(x,y)dy$	35	$\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y^2-4}^{2y-4} f(x,y)dx$
26	$\int\limits_0^{\frac{R}{2}} dx \int\limits_{x-R}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$	36	$\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{2}{x}}^{3-x} f(x,y)dy$
27	$\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{x-R}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$	37	$\int\limits_1^4 dx \int\limits_{4/x}^{5-x} f(x,y)dy$
28	$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx$	38	$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{4-2x}^{4-x^2} f(x,y)dy$

Продолжение табл.3.1

№	Задание	№	Задание
39	$\int_{0}^{2} dx \int_{x^2}^{\sqrt{8x}} f(x,y)dy$	50	$\int_{0}^{4} dy \int_{1,25y}^{\sqrt{9+y^2}} f(x,y)dx$
40	$\int_{0}^{-1} dx \int_{x}^{2-x} f(x,y)dy$	51	$\int_{-4}^{0} dy \int_{-\sqrt{9+y^2}}^{\frac{5}{4}y} f(x,y)dx$
41	$\int_{0}^{1} dx \int_{-x^2}^{x^2} f(x,y)dy$	52	$\int_{0}^{1} dx \int_{-1}^{x^2+1} f(x,y)dy$
42	$\int_{0}^{3} dx \int_{0}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$	53	$\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{4-x^2} f(x,y)dy$
43	$\int_{0}^{3} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x}} f(x,y)dy$	54	$\int_{0}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x,y)dy$
44	$\int_{0}^{1} dx \int_{2x^2}^{3-x} f(x,y)dy$	55	$\int_{1}^{2} dy \int_{0}^{2y} f(x,y)dx$
45	$\int_{0}^{1.5} dy \int_{2y^2}^{y+3} f(x,y)dx$	56	$\int_{0}^{3} dx \int_{0}^{\sqrt{3-x}} f(x,y)dy$
46	$\int_{-1}^{0} dx \int_{2x^2}^{x+3} f(x,y)dy$	57	$\int_{0}^{2} dx \int_{0}^{2x^2+1} f(x,y)dy$
47	$\int_{0}^{1} dy \int_{2y^2}^{3-y} f(x,y)dx$	58	$\int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} f(x,y)dy$
48	$\int_{-1,5}^{0} dx \int_{2x^2}^{3-x} f(x,y)dy$	59	$\int_{1}^{4} dx \int_{0}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$
49	$\int_{0}^{2} dx \int_{0}^{5-x} f(x,y)dy$	60	$\int_{0}^{3} dx \int_{x^2-9}^{9-x^2} f(x,y)dy$

Продолжение табл.3.1

№	Задание	№	Задание
61	$\int_0^1 dy \int_0^{4-y} f(x,y)dx$	72	$\int_{-4}^0 dx \int_{x^2-16}^{16-x^2} f(x,y)dy$
62	$\int_0^1 dx \int_0^{x^2+1} f(x,y)dy$	73	$\int_{-2}^2 dy \int_{y^2-4}^{4-y^2} f(x,y)dx$
63	$\int_0^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$	74	$\int_{-1}^2 dx \int_{x^2+2}^{2x+5} f(x,y)dy$
64	$\int_0^1 dx \int_{2x+1}^{4-x^2} f(x,y)dy$	75	$\int_{-1}^1 dy \int_{y^2+2}^{2y+5} f(x,y)dx$
65	$\int_0^4 dx \int_{0{,}5x+1}^{7-x} f(x,y)dy$	76	$\int_0^3 dy \int_{y^2-9}^{9-y^2} f(x,y)dx$
66	$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{2x^2+1}}^{4-x^2} f(x,y)dy$	77	$\int_{-2}^2 dy \int_{x^2}^{8-x^2} f(x,y)dx$
67	$\int_0^4 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy$	78	$\int_{-1}^1 dy \int_{y^2}^{2-y^2} f(x,y)dx$
68	$\int_{-2}^2 dx \int_0^{x^2-4} f(x,y)dy$	79	$\int_{-2}^2 dy \int_0^{y^2-4} f(x,y)dx$
69	$\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x} f(x,y)dy$	80	$\int_0^2 dy \int_y^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx$
70	$\int_{-2}^2 dx \int_{x^2-4}^{4-x^2} f(x,y)dy$	81	$\int_0^a dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{2a-y} f(x,y)dx$
71	$\int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$	82	$\int_0^8 dx \int_{\sqrt[3]{y}}^{6-\frac{y}{2}} f(x,y)dy$

Продолжение табл.3.1

№	Задание	№	Задание
83	$\int_0^{2a} dy \int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x,y)dx$	92	$\int_0^1 dy \int_{y^3}^{y} f(x,y)dx$
84	$\int_0^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{a-x} f(x,y)dy$	93	$\int_0^4 dy \int_0^{y^2} f(x,y)dx$
85	$\int_0^5 dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{5-y} f(x,y)dx$	94	$\int_0^4 dy \int_{0,5y+1}^{7-y} f(x,y)dx$
86	$\int_{-a}^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy$	95	$\int_{-3}^1 dy \int_{2y-1}^{2-y^2} f(x,y)dx$
87	$\int_1^4 dx \int_0^{\frac{4}{x}} f(x,y)dy$	96	$\int_0^3 dy \int_0^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx$
88	$\int_{-1}^1 dx \int_{x^2-1}^{x+1} f(x,y)dy$	97	$\int_0^4 dx \int_{1,25x}^{\sqrt{9+x^2}} f(x,y)dy$
89	$\int_{-1}^1 dx \int_{-1-x}^{1-x^2} f(x,y)dy$	98	$\int_0^1 dy \int_0^{4-y^2} f(x,y)dx$
90	$\int_{-2}^2 dx \int_{x^2/2}^{4-\frac{x^2}{2}} f(x,y)dy$	99	$\int_0^2 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x,y)dx$
91	$\int_0^1 dx \int_{x^3}^{4-3x} f(x,y)\,dy$	100	$\int_{-4}^0 dx \int_{-\sqrt{9+y^2}}^{\frac{5}{4}x} f(x,y)dy$

3.2 Задача 2

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Предварительно сделать чертеж области интегрирования.

Таблица 3.2

№№	f(x,y)	Уравнения линий, ограничивающих область D
1	$\frac{y^2}{x}$	$y = x, y = 2x, x = 2, x = 4$
2	x^3y^2	$x^2 + y^2 = R^2$
3	$x^2 + y$	$y = x^2, y^2 = x$
4	$\frac{x^2}{y^2}$	$x = 2, y = x, yx = 1$
5	$\cos(x + y)$	$x = 0, y = \pi, y = x$
6	$\sqrt{1 - x^2 - y^2}$	$x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0$
7	$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, a > 1$	$y = x, y = -x, x^2 + y^2 = 1.$
8	$\sqrt{x^2 - y^2}$	$y = x, y = -x, x = 1$
9	$\ell^{\frac{x}{y}}$	$y^2 = x, x = 0, y = 1.$
10	$\frac{x}{x^2 + y^2}$	$y = \frac{x^2}{2}, y = x$
11	x	$x + y = 2, x^2 + (y - 1)^2 = 1$

Продолжение табл.3.2

1	2	3
12	y	$y=0,(x-1)^2+y^2=1,(y\geq 0)$
13	$x+2y$	$y=x-x^2, y=1-x^2, x=0$
14	x^2	$y=\frac{1}{x}, x=1, x=2$
15	$\frac{x}{x^2+y^2}$	$y^2=2px, x=p$
16	xy^2	$y^2=2px, x=p$
17	xy	$x^2+y^2=R^2, x\geq 0, y\geq 0$
18	y	$x^2+(y-a)^2=a^2$
19	x^2+y^2	$x^2+y^2=2ax$
20	$\sqrt{a^2-x^2-y^2}$	$x^2+y^2=a^2(x\geq 0)$
21	$\frac{1}{4}y^2$	$2x-y=0, x+y=9$
22	$4-x^2$	$x^2+y^2=4$
23	x^2	$y=0, x=0, x+y=2$
24	$4-x-y$	$x^2+y^2=4$
25	$2-x$	$y=2\sqrt{x}, y=\frac{1}{4}x^2$
26	y	$x=0, x=4, y=\sqrt{25-x^2}$
27	$4-y$	$x^2+y^2=4y$

Продолжение табл.3.2

1	2	3
28	x^2ye^{xy}	$0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$
29	$x^2 + y$	$x = 0, y = 0, x + y = 5$
30	$\frac{x^2}{y^2}$	$y = x, xy = 4, x = 6$
31	$y \ln x$	$y = 1, y = \sqrt{x}, x = 2$
32	$\frac{x^2 - y^2}{x^2}$	$x^2 + y^2 = \pi^2$
33	$4 - x^2$	$x = 0, y = 0, y = 6 - x, x = 2$
34	$x + y^2$	$2x - y = 0, x + y = 9, y = 0$
35	$x^2 + y^2$	$x = 0, y = x, y = \sqrt{4 - x^2}$
36	$x^2 + y^2 + 1$	$y = 0, y = 2x, x^2 + y^2 = 9$
37	$2x$	$y = 0, x = \sqrt{16 - y^2}, y = 2$
38	$x^2 + 1$	$y = x, y = 3 - x, x = 0$
39	x^2	$x = 0, y = 2x, x + y = 6$
40	$4 - x - y$	$x^2 + y^2 = 4^2$
41	$4 - y$	$y = x^2, x = 3, y = 0$
42	$9 - x$	$y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, x = 9$
43	$y^2 + 2$	$2x + 3y = 6, x = 0, y = 0$

Продолжение табл.3.2

1	2	3
44	$6-2x$	$x=0, y=0, x=3, y=\sqrt{25-x^2}$
45	$2x$	$x=\sqrt{y}, x=0, y=4$
46	$1-y$	$x=\sqrt{y}, y=\sqrt{x}$
47	$3x$	$y=0, y=4, x=0, x+y=6$
48	$\sqrt{x^2+y^2}$	$x^2+y^2=16$
49	x^2+y^2	$y=2x, y=1, y=6-x$
50	$\frac{1}{2}y^2$	$x=2y^2, x+2y=4$
51	x^2+2y^2	$x=0, x+2y=10, y=x^2$
52	$4-y^2$	$y=x^2, y=4+3x$
53	x^2	$x=0, y=2x, x+y=9$
54	x^2+y^2	$x=0, y=0, y=4{,}5x+2y=10$
55	x^2+y^2+2	$y=x, y=2-x^2$
56	$x+2y$	$y=x^2, x+y=6$
57	y^2	$x=0, y=0, y=3, x+y=6$
58	$4+x^2$	$x=0, y=0, y=3, x+y=6$
59	$16-x^2$	$y=0, x+y=8, x=0$
60	x^2+y^2	$y=x, x^2+y^2=4, x=0$

Продолжение табл.3.2

1	2	3
61	$5-x^2$	$x=0, y=0, x+3y=6$
62	x^2+y^2+2	$x=0, y=x, y=2-x^2 (x\geq 0)$
63	$6-2y$	$x=0, y=0, x^2+y^2=25$
64	x^2+y^2+3	$5x+2y=10, y=4, x=0, y=0$
65	y	$x=0, x=3, y=\sqrt{36-x^2}$
66	y^2+2	$2x+y=6, x=0, y=0$
67	$16-x^2$	$x=4; y=0; 2x+3y=6$
68	$25-x^2$	$x=5; y=0; x+y=0$
69	xy	$y=x, y=2x, x=2, x=4$
70	x^2y^3	$x^2+y^2=25$
71	xy^4	$x=2, y=x, yx=1$
72	$\sqrt{x^2+y^2}$	$y=x, y=-x, x=1$
73	x^3y	$y=\frac{1}{x}, x=1, x=2$
74	$\frac{5x}{x^2+y^2}$	$y^2=4x, x=2$
75	xy^2	$y^2=8x, x=4$
76	$\frac{1}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$	$x^2+y^2\leq 16$

Продолжение табл.3.2

1	2	3
77	y^2	$y = 0; (x-1)^2 + y^2 = 1; (y \geq 0)$
78	$x^3 y^2$	$x = 0; y = 0; 3x + 2y = 6$
79	xy	$x = 8, y = x, y = 2x$
80	$x^2 y$	$y = x, x + y = 4, y = 0$
81	$x^2 + y^2$	$x^2 + y^2 = 2x$
82	$\sqrt{16 - x^2 - y^2}$	$x^2 + y^2 = 16 (y \geq 0)$
83	$\sqrt{1 - x^2 - y^2}$	$x^2 + y^2 = 1$
84	$x\sqrt{x^2 + y^2}$	$y = 0, y = 2x, x = 4$
85	$x^2 - y^2$	$y = x, y = -x, x = 1$
86	xy	$x^2 + y^2 = 25, y \geq 0, x \geq 0$
87	$y\sqrt{x^2 + y^2}$	$x = 0, x = 2y, y = 5$
88	$\frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$	$x^2 + y^2 \leq 9$

3.3. Задача 3

Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной данными линиями.

Таблица 3.3

№№	Уравнения линий	№№	Уравнения линий
1	$x = y^2 - 2y; x + y = 0$	15	$3x^2 = 25y; 5y^2 = 9x$
2	$y = 2 - x; y^2 = 4x + 4$	16	$xy = 4; x + y = 5$
3	$y^2 = 4x - x^2; y^2 = 2x$ (вне параболы)	17	$x + y = 1; x + 3y = 1;$ $x = y; x = 2y$
4	$3y^2 = 25x; 5x^2 = 9y$	18	$\rho = 4\sin\varphi; \rho = 2\sin\varphi$
5	$y = 4x - x^2; y = 2x^2 - 5x$	19	$\rho = a\cos 2\varphi$
6	$x = 4 - y^2; x + 2y - 4 = 0$	20	$\rho = a\sin 3\varphi$
7	$\rho = 2(1 - \cos\varphi); \rho = 2$ (вне кардиоиды)	21	$(x^2 + y^2)^2 = 2y^3$
8	$\rho = 2(1 + \cos\varphi); \rho = 2\cos\varphi$	22	$(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$
9	$(x^2 + y^2)^5 = a^4x^4y^2$	23	$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$
10	$(x^2 + y^2)^3 = a^2x^3y$	24	$(x^2 + y^2)^2 = a^2xy$
11	$(x^2 + y^2)^3 = a^4x^2$	25	$y = \sqrt{x}; y = 2\sqrt{x}; x = 4$
12	$(x^2 + y^2)^5 = a^6xy^3$	26	$(x^2 + y^2) = 2a^2(x^2 - y^2)$
13	$(x^2 + y^2)^3 = a^4y^2$	27	$y = \cos x; y = \cos 2x;$ $y = 0; (x \ge 0)$
14	$x = y; x = 2y;$ $x + y = 6; x + 3y = 6$	28	$y = x; y = 5x; x = 1$

Продолжение табл.3.3

1	2	3	4
29	$\rho = 2(1+\cos\varphi);$ $\rho = 2\cos\varphi$	42	$y^2 = 4(1-x); x^2+y^2=4$ (вне параболы)
30	$(x^2+y^2)^5 = a^6x^3y$	43	$xy = a^2; x+y=\frac{5}{2}a$
31	$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2+2y^2)$	44	$y = 4-x^2;$ $y+2x-4=0$
32	$(x^2+y^2)^3 = a^2y^4$	45	$y = \ell^x; y=\ell^{2x}; x=1$
33	$xy = 6; x+y=7$	46	$(x^2+y^2)^2 = 4x^3$
34	$x = y^2-4y; x-y=0$	47	$(x^2+y^2)^3 = x^4+y^4$
35	$y = x^2+4x; x+y=0$	48	$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$
36	$x = 4y-y^2; x=2y^2-5y$	49	$x=\sqrt{y}; x=2\sqrt{y}; y=4$
37	$\rho = 5; \rho = 1-\cos\varphi$ (вне кардиоиды)	50	$(x^2+y^2)^3 = a^2x^2y^2$
38	$xy = 8;$ $x+y=9$	51	$(x^2+y^2)^2 = a^2(4x^2+y^2)$
39	$x^2+y^2=2x; y=x;$ $x^2+y^2=4x; y=0$	52	$(x^2+y^2)^3 = a^2x^2(4x^2+3y^2)$
40	$\rho = a(1+\cos\varphi);$ $\rho = a\cos\varphi; a>0$	53	$(x^2+y^2)^2 = a^2(3x^2+2y^2)$
41	$y^2 = 10x+25$ $y^2 = -6x+9$	54	$x^4 = a^2(3x^2-y^2)$

3.4. Задачи 4-5

Вычислить объем тела, ограниченного данными поверхностями. Найти координаты центра масс этого тела в предположении, что оно однородно.

Таблица 3.4

№№	Уравнения поверхностей	№№	Уравнения поверхностей
1	$z=0; z=y; x=0$ $x=4; y=\sqrt{25-x^2}$	10	$z=0; z=x^2; y=0;$ $x+y=4$
2	$z=0; z=16-x^2;$ $y=0; x+y=8; x=0$	11	$z=0; z=4\sqrt{y}; x=0;$ $2x+y=6$
3	$z=0; z=y^2;$ $x+2y=8; x=0;$	12	$z=0; z=9-x^2; x=0;$ $x+2y=8; y=0;$
4	$z=0; z=9-x^2;$ $x=0; y=0;$ $2y+x=6$	13	$z=0; z=2y; x=0;$ $x=6; x+y=9$
5	$z=0; z=1-x^2;$ $y=0; y=5-x$	14	$z=0; z=y^2;$ $x^2+y^2=9$
6	$z=0; z=4-x^2;$ $x=0; y=0; x+y=6$	15	$z=0; z=9-x^2;$ $y=0; x+y=3$
7	$z=0; z=4-y^2;$ $x=0; x+y=6$	16	$z=0; z=4-x-y;$ $x^2+y^2=4$
8	$z=0; z=\frac{1}{4}y^2;$ $2x-y=0; x+y=9$	17	$z=0; z=2x; y=0;$ $y=2; x=\sqrt{16-y^2}$
9	$z=0; z=x^2+y^2;$ $x=0; x^2+y^2=4; y=x$	18	$z=0; y+z=4; y=x^2$

Продолжение табл.3.4

1	2	3	4
19	$z = 0; z = x^2 + y^2;$ $x^2 + y^2 = 9$	28	$z = 0; x + z = 9;$ $x = y^2$
20	$z = 0; z = x^2;$ $y = 2x;$ $x + y = 6$	29	$z = 0; y = \sqrt{x};$ $y = 2\sqrt{x};$ $x + z = 9$
21	$z = 0; z = x^2 + 1;$ $y = x; x + y = 3; x = 0$	30	$z = 0; z = 25 - y^2;$ $y = 0; x = 0; x + y = 10$
22	$z = 0; z = x^2 + y^2 + 1;$ $y = 0; y = 2x;$ $x^2 + y^2 = 9$	31	$z = 0; z = y^2 + 1;$ $x + 2y = 10; x = 0; y = 0;$
23	$z = 0; z = 9 - x^2;$ $x = 0; y = x;$ $x + y = 6$	32	$z = 0; z = 1 - x^2;$ $y = 0; x + 3y = 6$
24	$z = 0; z = y^2 + 2;$ $x = 0; y = 0;$ $2x + 3y = 6$	33	$z = 0; y = \sqrt{27};$ $x^2 + y^2 = 4$
25	$z = 0; x = 0; y = 0;$ $2x + z = 6;$ $x^2 + y^2 = 25$	34	$z = 0;$ $2y^2 = x;$ $x + 2y + z - 4 = 0$
26	$z = 0; y = 4; z = 2x;$ $x = \sqrt{2}y$	35	$z = 0; x = 0; y = 0;$ $y + z = 1; x = y^2 + 1$
27	$z = 0; z = 3x; y = 4;$ $y = 0; x + y = 6$	36	$z = 0; x = 0; y = 0;$ $z = 9 - y^2; 3x + 4y = 12$

Продолжение табл.3.4

1	2	3	4
37	$z=0; x=\sqrt{y}; x=2\sqrt{y};$ $y+z=9$	46	$z=0; x=0; y=0;$ $y+z=2; y=x^2+1$
38	$z=0; x=\sqrt{y}; y=\sqrt{x};$ $y+z=1$	47	$z=0; y=0;$ $z+2x=4; y=x^2$
39	$z=0; x=0; y=0;$ $z=\sqrt{x^2+y^2}; x^2+y^2=16$ $(x\geq 0; y\geq 0)$	48	$z=0; z=x^2+y^2;$ $y=1; y=x^2$
40	$z=0; y=1; y=2x;$ $x=0;$ $z=x^2+y^2$	49	$z=0; z=x^2+2y^2;$ $x=0; y=x^2;$ $x+2y=10$
41	$z=0; z=4-y^2;$ $y=x^2$	50	$z=0; y=2x^2;$ $2z+3y=6$
42	$z=0; y=2x;$ $x+y=9; z=x^2$	51	$z=0; z=y; x=0;$ $x=3; y=\sqrt{36-x^2}$
43	$z=0; z=x^2+y^2+2;$ $x=0; y=x; y=2-x^2$	52	$z=0; x=0;$ $2x+y=6; z=x^2$
44	$z=0; x=0; y=0;$ $x+z=2; y=6-x^2$	53	$z=0; y=0;$ $z=25-x^2;$ $x+y=8$
45	$z=0; x=0; y=0;$ $2y+z=2;$ $x=2-y^2$	54	$z=0; y=0;$ $z=16-x^2;$ $2x+3y=6$

Продолжение табл.3.4

1	2	3	4
55	$z=0; x=0; y=0;$ $2y+z=6;$ $x^2+y^2=25;$	64	$z=0; z=2\sqrt{y}; x=0;$ $3x+5y=15$
56	$z=0; y=0; x=0;$ $5x+2y=10; y=4;$ $z=x^2+y^2$	65	$z=0; y=0;$ $z=16-x^2;$ $2x+y=8$
57	$z=0;$ $x=y^2;$ $4x+z=8$	66	$z=0; z=y^2;$ $x^2+y^2=25$
58	$z=0; z=4-y^2;$ $x=0;$ $2x+y-8=0$	67	$z=0; z=y^2+3;$ $x+4y=8; x=0; y=0$
59	$z=0; y=3x; z=x^2;$ $x+y=8$	68	$z=0; z=2x^2+y^2;$ $y=3x; y=6; x=0$
60	$z=0; z=x^2+y^2;$ $x^2+y^2=36$	69	$z=0; y=2x^2;$ $z+4y-8=0;$
61	$z=0; y=0; z=3x;$ $y=3; x=\sqrt{25-y^2}$	70	$z=0; z=x^2+y^2+5;$ $y=2x; y=8; x=0$
62	$z=0; x+z=6;$ $y^2=x$	71	$z=0; y=0; x=0;$ $z=y^2;$ $2x+5y-10=0$
63	$z=0; z=4-2y;$ $y=2x^2$	72	$z=0; z=x^2+y^2;$ $x^2+y^2=100$

Продолжение табл. 3.4

1	2	3	4
73	$z=0; x=0; y=0;$ $z=16-y^2;$ $x+2y=6;$	81	$z=0; y=0;$ $z=8-x^2;$ $x+2y=8$
74	$z=0; x=0; y=0;$ $x+2y=8;$ $z=y^2+4$	82	$z=0; x=0;$ $z=16-y^2;$ $x+5y=10$
75	$z=0; y=0;$ $z=5-x^2;$ $2x+5y=10$	83	$z=0; x=0; y=0; z=x^2;$ $2x+3y=12$
76	$z=0; z=2x^2+3y^2; x=0$ $y=\frac{1}{2}x^2; x+5y=10$	84	$z=0; z+3y=6; x=0;$ $y=0; x=4-y^2$
77	$z=0; z=8+x^2+y^2;$ $y=x; y=2; x=0$	85	$z=0; z=x; y=0;$ $y=3; x=\sqrt{18-y^2}$
78	$z=0; y=0; x=0;$ $x+z=6;$ $y=4-x^2$	86	$z=0; y=0; x=0;$ $z=9-y^2; 3x+4y=12$ $(y\geq 0)$
79	$z=0; x=0;$ $2x+3y=6;$ $z=6+x^2+5y^2$	87	$z=0; y=0; x=0;$ $z=4-x^2;$ $2x+y=4; (y\geq 0)$
80	$z=0; y=0;$ $4x+y=8;$ $z=1-x^2$	88	$z=0;$ $z=4-y^2; y=\frac{x^2}{2}$

Продолжение табл. 3.4

1	2	3	4
89	$z=0; z=2y^2;$ $3x+4y=12; x=0$	94	$z=x^2-y^2;$ $x=3; z=0$
90	$z=0; y=0;$ $z=25-x^2;$ $x+y=10$	95	$z=0; y=0; z=xy;$ $x+y=2; y=\sqrt{x}$
91	$z=x^2+y^2; y=x^2;$ $y=1; z=0$	96	$x^2+y^2=2x; z=x+2y;$ $x^2+y^2=2y; z=0;$
92	$z=0; \frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ $y=\frac{3}{4}x; y=0; (z\geq 0, x\geq 0)$	97	$z=0; x=0; y=0;$ $x+2y=6; z^2=x^2+y^2 (z\geq 0)$
93	$y=\ln x; y=\ln^2 x;$ $z=0; y+z=1;$	98	$z=0; z=\sqrt{16-x^2-y^2;}$ $x^2+y^2=4x$

3.5. Задача 6

Q – тело в четырехмерном пространстве R^4, представляющее собой прямое произведение круга $K=\{x=(x_1,x_2)\in R^2 : x_1^2+x_2^2\leq 1\}$ и прямоугольника $\Pi=\{y=(y_1,y_2)\in R^2 : 0\leq y_1\leq 1, 0\leq y_2\leq n\}$, т.е.

$$Q=\{z=(x,y)=(x_1,x_2 y_1,y_2)\in R^4 : x\in K, y\in \Pi\}.$$

Вычислить четырехкратный интеграл

$$\int_Q (x_1^2+x_2^2+y_1 y_2)\, dz.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Краснов, М.П. Вся высшая математика. Кратные и криволинейные интегралы. Векторный анализ. Функции комплексного переменного. Дифференциальные уравнения с частыми производными. Том 4 [Текст]: учебник / М.П.Краснов, А.Киселев, Г.Макаренко и др. − М.: URSS, 2017. − 352с.
2. Бугров, Я. С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Краткие интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного [Текст] : учебник / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. − 3-е изд., испр. - М. : Наука, 1989. - 464 с.
3. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа. Т.3 [Текст]: учебник / Л.Д.Кудрявцев. – М.: Дрофа, 2006. − 351 с.
4. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст] : учебное пособие / Н. С. Пискунов. М.: Физматлит. − 1985. − 560 с.