МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра информационной безопасности

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
____________ О.Г. Локтионова
«01» ноября 2017 г.

Численные методы решения дифференциальных уравнений:
методические указания к практическим занятиям по дисциплинам
«Вычислительные методы», «Численные методы»

Курск 2017

УДК 510.6
Составители: В.П. Добрица, В.А. Милых, Ю.А. Халин

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, с.н.с. В.И. Дмитриев

Численные методы решения дифференциальных уравнений: методические указания к практическим занятиям по дисциплинам «Вычислительные методы», «Численные методы» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. В.П. Добрица, В.А. Милых, Ю.А. Халин. Курск, 2017. – 16 с. Библиогр.: с. 16.

Приводится описание основных методов решения нелинейных уравнений.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлениям, укрупнённых групп специальностей 02.00.00, 09.00.00, 10.00.00

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 17.11.17. Формат 60х84 1/16.
Усл.печ. л. 1,56 п.л . Уч.-изд. л. 1,22 . Тираж 100 экз. Заказ. 1932
Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

1.1. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Постановка задачи. Инженеру-исследователю постоянно приходится в своей деятельности сталкиваться с дифференциальными уравнениями. Многие задачи построения моделей динамики, моделей систем управления сводятся к дифференциальным уравнениям. В вычислительной математике изучаются численные методы решения дифференциальных уравнений, которые особенно эффективны с использованием современных программных продуктов. Методы приближенного решения дифференциальных уравнений можно разделить на две группы:

1) аналитические методы, дающие приближенное решение в виде зависимостей путем аналитических преобразований;
2) Численные методы, дающие приближенное решение в виде таблицы.

В данной главе для первой группы рассмотрим метод интегрирования дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов; для второй группы - разностные методы: метод Эйлера, метод Рунге - Кутты.

Метод последовательного интегрирования. Пусть дано дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (1)$$

с начальными условиями $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Представим решение $y = y(x)$ уравнения (1) в окрестности точки x_0 в виде ряда Тейлора:

$$(y - y_0) + y'_0(x - x_0) + \frac{y''_0}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{y_0^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n + ..., \qquad (2)$$

где $|x - x_0| < \varepsilon$, ε – сколь-угодно малое положительное число.

Для нахождения коэффициентов ряда (2) уравнение (1) дифференцируют необходимое число раз, используя начальные условия. На практике величину $|x - x_0|$ выбирают из условия достижения необходимой погрешности решения. При $x_0 = 0$ получаем степенной ряд по степеням аргумента

$$y = y_0 + y_0' x + y_0'' \frac{x^2}{2!} + \ldots + y_0^{(n)} \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (3)$$

Пример 1.1. Найти решение дифференциального уравнения $y'' = x^2 y$ с начальными условиями $x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ y_0' = 0.$

Решение. При $x_0 = 0$ будем искать решение дифференциального уравнения в виде ряда (3) .Последовательно дифференцируя исходное уравнение, получим:

$y''' = 2xy + x^2 y'$;

$y^{(4)} = 2y + 2xy' + 2xy' + x^2 y'' = 2y + 4xy' + x^2 y''$;

$y^{(5)} = 2y' + 4y' + 4xy'' + 2xy'' + x^2 y''' = 6y' + 6xy'' + x^2 y'''$;

$y^{(6)} = 6y'' + 6y'' + 6xy''' + 2xy''' + x^2 y^{(4)} = 12y'' + 8xy''' + x^2 y^{(4)}$;

$y^{(7)} = 12y''' + 8y''' + 8xy^{(4)} + 2xy^{(4)} + x^2 y^{(5)} = 20y''' + 10xy^{(4)} + x^2 y^{(5)}$;

$y^{(8)} = 20y^{(4)} + 10y^{(4)} + 10xy^{(5)} + 2xy^{(5)} + x^2 y^{(6)} = 30y^{(4)} + 12xy^{(5)} + x^2 y^{(6)}$

.

В каждое из полученных равенств и в исходное уравнение подставим начальные условия $x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ y_0' = 0.$ Получим:

$y_0'' = 0;\ y_0''' = 0;\ y_0^{(4)} = 2;\ y_0^{(5)} = 0;\ y_6^{(6)} = 0;\ y_0^{(7)} = 0;\ y_0^{(8)} = 0.$

Полученные значения подставим в уравнение (3):

$$y = 1 + 2 \cdot \frac{x^4}{4!} + 60 \cdot \frac{x^8}{8!} = 1 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^8}{672} + \ldots$$

Метод неопределенных коэффициентов заключается в том, что решение дифференциального уравнения отыскивают в виде ряда с неизвестными коэффициентами:

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \qquad (4)$$

Коэффициенты a_i находят подстановкой ряда (4) в исходное дифференциальное уравнение, затем приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях аргумента с использованием начальных условий. Найденные значения коэффициентов подставляют в ряд (4).

Пример 1.2. Найти решение дифференциального уравнения $y'' = x^2 y$, удовлетворяющее начальным условиям $x_0 = 0,\ y(x_0) = 1,\ y'(x_0) = 0.$

Решение. При $x_0 = 0$, решение будем искать в виде ряда

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (5)$$

Дважды продифференцируем ряд (5):

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... + na_n x^{n-1} + ... \qquad (6)$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + ... + n(n-1)a_n x^{n-2} + ... \qquad (7)$$

Используя начальные условия из (5) и (6), находим $a_0 = 1; a_1 = 0,$ тогда решение уравнения будет

$$y = 1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + ... + a_n x^n. \qquad (7)$$

Чтобы определить остальные коэффициенты, подставим в исходное дифференциальное уравнение выражения (6) и (7)

$$2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + 30a_6 x^4 + ... =$$

$$= x^2 + a_2 x^4 + a_3 x^5 + ...$$

А теперь приравняем коэффициенты при x с одинаковыми степенями:

$2a_2 = 0 \quad \to \quad a_2 = 0;$ $\qquad 6a_3 = 0 \quad \to \quad a_3 = 0;$

$12a_4 = 1 \quad \to \quad a_4 = \frac{1}{12};$ $\qquad 20a_5 = 0 \quad \to \quad a_5 = 0;$

$30a_6 = a_2,$ но $a_2 = 0,$ следовательно, $a_6 = 0;$

$42a_7 = a_3,$ но $a_3 = 0,$ следовательно, $a_7 = 0;$

$56a_8 = a_4,$ но $a_4 = \frac{1}{12},$ следовательно, $a_8 = \frac{1}{12 \cdot 56}$ и т. д.

Окончательно получили решение дифференциального уравнения

$$y = 1 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{672}x^8 + ...$$

полностью совпадающее с решением по методу последовательного интегрирования.

1.2. Разностные методы численного решения дифференциальных уравнений

Наиболее распространенными и универсальными численными методами решения дифференциальных уравнений являются разностные методы. Сущность этих методов заключается в замене области непрерывного изменения аргумента дискретным множеством точек, называемых *узлами.* Эти узлы составляют разностную сетку. Искомая функция непрерывного аргумента приближенно заменяется функцией дискретного аргумента (сеточной функцией). В результате этого дифференциальное уравнение заменяется разностным уравнением. Таким образом, решить дифференциальное уравнение численным методом – значит для заданной последовательности аргументов $x_0, x_1, ..., x_n$ и $y_0 = f(x_0)$, не определяя функцию $y = F(x)$, найти такие значения $y_1, y_2, ..., y_n$, что $y_i = F(x_i)$, $i = 1,2,..., n$ и $F(x_0) = y_0$, то есть решение дифференциального уравнения сводится к отысканию сеточной функции. Рассмотрим подробнее данные методы.

Метод Эйлера является самым простым, однако идеи, положенные в основе этого метода, являются исходными для более сложных и точных методов.

Рассмотрим существо метода на обыкновенном дифференциальном уравнении первого порядка, позволяющее дать геометрическую интерпретацию метода.

Пусть дано уравнение $y' = F(x, y)$ с начальными условиями $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$. Требуется найти решение уравнения на отрезке $[a,b]$.

Разбивая отрезок $[a,b]$ на n равных частей $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, получим последовательность значений x_0, $x_1 = x_0 + \Delta x, ..., x_n$.

Выберем произвольный i-й участок $[x_i;\ x_{i+1}]$ и проинтегрируем уравнение $y' = F(x, y)$:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x, y)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'dx = y(x)\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} = y(x_{i+1}) - y(x_i) = y_{i+1} - y_i\,,$$

иначе

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x, y)\,dx\ . \qquad (7)$$

При малых значениях Δx подынтегральную функцию на участке $[x_i;\ x_{i+1}]$ можно принять постоянной и равной значению в точке x_i. Учитывая это допущение получим

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x, y)\,dx = F(x, y)\,x\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} = F(x_i y_i)(x_{i+1} - x_i) = y_i'\Delta x\,.$$

С учетом этого формула (7) примет вид

$$y_{i+1} = y_i + y_i' \Delta x. \qquad (8)$$

Обозначив $y_{i+1} - y_i = \Delta y_i$, то есть $y_i' \Delta x = \Delta y$, получим

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = y_i + \Delta x \cdot F(x_i, y_i). \qquad (9)$$

На рисунке 1.1 дана геометрическая интерпретация метода Эйлера на первых двух шагах расчета. На участке $[x_0, x_1]$ интегральную кривую L_0 заменяют отрезком касательной к ней, проходящей через точку M_0 с координатами (x_0, y_0).

Как видно из рисунка 1.1 угловой коэффициент этой касательной равен

$$\mathrm{tg}\alpha_0 = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0) = F(x_0, y_0) = y'(x_0).$$

Получив новую точку $M_1(x_1, y_1)$, из нее проводят новый отрезок касательной уже к той интегральной кривой L_1, которая проходит через эту точку. Угловой коэффициент этой касательной

$$\mathrm{tg}\alpha_1 = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) = F(x_1, y_1) = y'(x_1).$$

Продолжая построение таких отрезков, получают ломаную Эйлера, которая проходит через заданную точку M_0 и аппроксимирует искомую интегральную кривую.

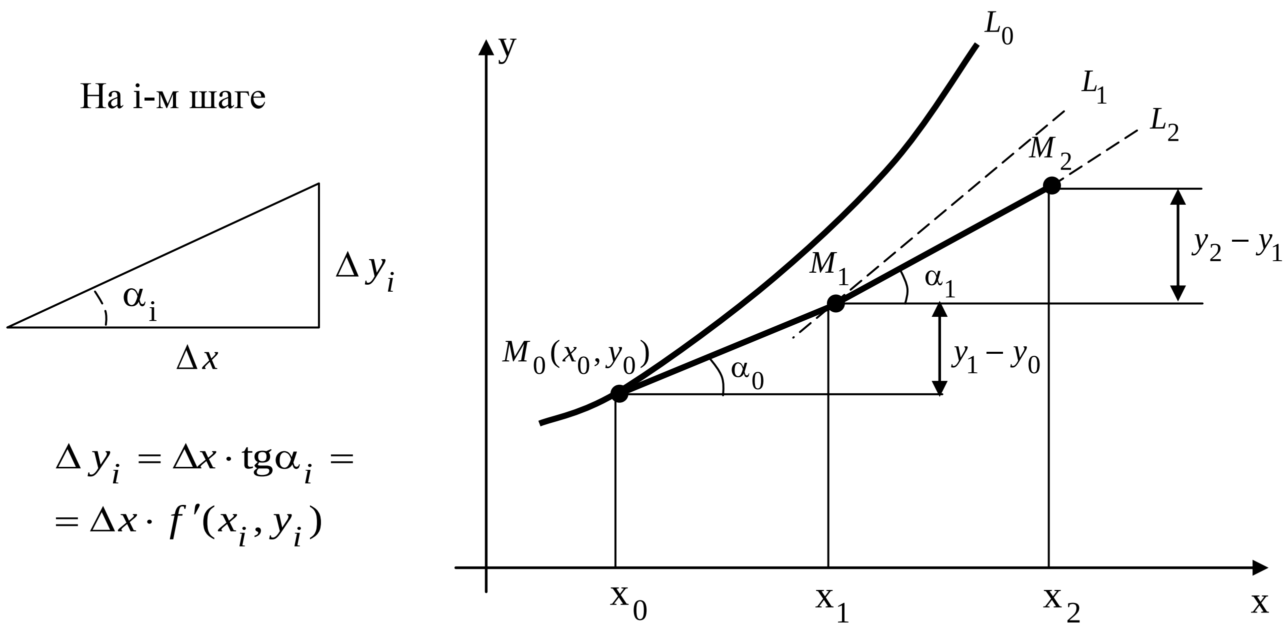

Рис.1.1. Иллюстрация метода Эйлера

Интегральные кривые L_0, L_1, L_2 описывают точные решения дифференциального уравнения $y' = F(x, y)$, при этом кривая L_0 соответствует точному решению задачи Коши, так как она проходит через начальную точку $M_0(x_0, y_0)$. Точки M_1, M_2, полученные в результате численного решения, образуют ломаную Эйлера. Их отклонения от кривой L_0 характеризуют погрешность метода. Для иллюстрации метода рассмотрим пример.

Пример 1.3. Методом Эйлера найти решение уравнения $y' = 2x^2 + 2y$ при начальных условиях $x_0 = 0, y(x_0) = 1$ на интервале [0;1] с шагом $\Delta x = 0{,}1$. Вычисления вести с четырьмя знаками после запятой.

Первый шаг:

$$y_1 = y_0 + \Delta x \cdot F(x_0, y_0) = 1{,}0 + 0{,}1 \cdot (2 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = 1{,}2;$$

Второй шаг:

$$y_2 = y_1 + \Delta x \cdot F(x_1, y_1) = 1{,}2 + 0{,}1 \cdot (2 \cdot 0{,}1^2 + 2 \cdot 1{,}2) = 1{,}442.$$

Результаты вычислений приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1

i	x_i	y_i	$\Delta x(2x_i^2 + 2y_i)$	y_{i+1}	$F(x)$
0	0	1,0	0,2	1,2	1,2010
1	0,1	1,2	0,242	1,4420	1,2210
2	0,2	1,4420	0,2964	1,7384	1,4977
3	0,3	1,7384	0,3657	2,1041	1,8432
4	0,4	2,1041	0,4528	2,5569	2,2783
5	0,5	2,5569	0,5631	3,1483	2,8274
6	0,6	3,1404	0,6956	3,8139	3,5202
7	0,7	3,8139	0,8608	4,6747	4,3928
8	0,8	4,6747	1,0629	5,7377	5,4895
9	0,9	5,7377	1,3095	7,0472	6,8645
10	1,0	7,0472	1,6094	8,6566	8,5836

В последнем столбце таблицы 3.6 приведено точное решение дифференциального уравнения $F(x) = 1{,}5e^{2x} - x^2 - x - 0{,}5$. Анализ результатов показывает, что погрешность увеличивается с ростом x_i. С уменьшением шага локальная (шаговая) погрешность уменьшается, однако при этом увеличивается число узлов, что неблагоприятно влияет на точность результатов. Для повышения точности на практике используется модифицированный метод Эйлера второго порядка. Он имеет следующий вычислительный алгоритм:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta x}{2}(y_i + \tilde{y}_{i+1}). \qquad (10)$$

В формуле (10) используется значение $\tilde{y}_{i+1}$, пока еще не известное. Это значение может быть найдено предварительно, например, по формуле (1.26) метода Эйлера. Сущность алгоритма можно показать на рассмотренном выше примере для первых трех шагов.

Первый шаг (по методу Эйлера):

$$y_1 = y_0 + \Delta x \cdot F(x_0, y_0) = 1{,}0 + 0{,}1 \cdot (2 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = 1{,}2 = \tilde{y}_1.$$

Первый шаг по модифицированному методу (формула 11):

$$y_1 = y_0 + \frac{\Delta x}{2}(F(x_0, y_0 + F(x_1, \tilde{y}_1)) =$$

$$= 1 + \frac{0{,}1}{2} \cdot ((2 \cdot 0 + 2 \cdot 1) + (2 \cdot 0{,}1^2 + 2 \cdot 1{,}2)) = 1{,}2210.$$

Второй шаг (по методу Эйлера):

$$y_2 = y_1 + \Delta x \cdot F(x_1, y_1) = 1{,}221 + 0{,}1 \cdot (2 \cdot 0{,}1^2 + 2 \cdot 1{,}221) = 1{,}4730 = \tilde{y}_2.$$

Второй шаг по модифицированному методу:

$$y_2 = y_1 + \frac{\Delta x}{2}(F(x_1, y_1 + F(x_2, \tilde{y}_2)) =$$

$$= 1{,}221 + \frac{0{,}1}{2} \cdot ((2 \cdot 0{,}1^2 + 2 \cdot 1{,}221) + (2 \cdot 0{,}2^2 + 2 \cdot 1{,}473)) = 1{,}4923.$$

Третий шаг (по методу Эйлера):

$$y_3 = y_2 + \Delta x \cdot F(x_2, y_2) = 1{,}4923 + 0{,}1 \cdot (2 \cdot 0{,}2^2 + 2 \cdot 1{,}4923) = 1{,}7987 = \tilde{y}_3.$$

Третий шаг по модифицированному методу:

$$y_3 = y_2 + \frac{\Delta x}{2}(F(x_2, y_2 + F(x_3, \tilde{y}_3)) =$$

$$= 1{,}4923 + \frac{0{,}1}{2} \cdot ((2 \cdot 0{,}2^2 + 2 \cdot 1{,}4923) + (2 \cdot 0{,}3^2 + 2 \cdot 1{,}7987)) = 1{,}8344.$$

Сравнение результатов расчета с точным значением (см. табл. 1) показывает на меньшую локальную погрешность по сравнению с методом Эйлера.

Метод Рунге-Кутты. Рассмотренные выше разностные методы решения дифференциальных уравнений относятся к семейству методов Рунге - Кутты, среди которых наибольшее распространение получил метод Рунге - Кутты четвертого порядка. В этом методе для расчета одного значения функции необходимо четыре раза вычислять правую часть дифференциального уравнения, а не два, как в модифицированном методе Эйлера второго порядка. Вычислительный алгоритм этого метода записывается в следующем виде:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \qquad (11)$$

где

$$\begin{aligned}
k_1 &= \Delta x \cdot F(x_i, y_i);\\
k_2 &= \Delta x \cdot F(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_1}{2});\\
k_3 &= \Delta x \cdot F(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_2}{2});\\
k_4 &= \Delta x \cdot F(x_i + \Delta x, y_i + k_3).
\end{aligned} \qquad (12)$$

Метод Рунге - Кутты требует большего объема вычислений, однако это окупается повышенной точностью, что дает возможность проводить расчеты с большим шагом.

Все вычисления удобно проводить по схеме, указанной в таблице 2.

Порядок заполнения таблицы следующий:

1) записываем в первой строке значения x_0, y_0; вычисляем $F(x_0, y_0)$, умножаем на Δx и заносим в качестве $k_1^{(0)}$;

2) записываем во второй строке $x_0 + \Delta x/2,\quad y_0 + k_1^{(0)}/2$; вычисляем $F(x_0 + \Delta x/2; y_0 + k_1^{(0)}/2)$, умножаем на Δx и заносим в качестве $k_2^{(0)}$;

3) записываем в третьей строке $x_0 + \Delta x/2,\quad y_0 + k_2^{(0)}/2$; вычисляем $F(x_0 + \Delta x/2; y_0 + k_2^{(0)}/2)$, умножаем на Δx и заносим в качестве $k_3^{(0)}$;

4) записываем в четвертой строке $x_0 + \Delta x,\quad y_0 + k_3^{(0)}$; вычисляем $F(x_0 + \Delta x; y_0 + k_3^{(0)})$, умножаем на Δx и заносим в качестве $k_4^{(0)}$;

5) в столбец Δy записываем числа $k_1^{(0)}, 2k_2^{(0)}$, $2k_3^{(0)}$, $k_4^{(0)}$;

6) суммируем числа столбца Δy, делим на шесть и заносим в таблицу в качестве Δy_0;

7) вычисляем $y_1 = y_0 + \Delta y_0$.

Далее все вычисления продолжаются в том же порядке, принимая за начальную точку (x_1, y_1).

Таблица 2 - Схема метода Рунге - Кутты

i	x_i	y_i	k^i	Δy
0	x_0 $x_0 + \Delta x/2$ $x_0 + \Delta x/2$ $x_0 + \Delta x$	y_0 $y_0 + k_1^{(0)}/2$ $y_0 + k_2^{(0)}/2$ $y_0 + k_3^{(0)}$	$k_1^{(0)}$ $k_2^{(0)}$ $k_3^{(0)}$ $k_4^{(0)}$	$k_1^{(0)}$ $2k_2^{(0)}$ $2k_3^{(0)}$ $k_4^{(0)}$
				$\Delta y_0 = \frac{1}{6}\sum$
1	x_1	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	$k_1^{(1)}$	$k_1^{(1)}$

В целом, оценка погрешности методов Рунге - Кутты затруднительна. Грубую оценку погрешности можно получить с помощью двойного просчета

$$\left| F(x_n) - y_n \right| \approx \frac{| y_{n/2} - y_n |}{15}, \qquad (13)$$

где $F(x_n)$ – точное значение решения уравнения в точке x_n;

$y_n, y_{n/2}$ – приближенные значения, полученные с шагом Δx и $\Delta x / 2$.

Пример 1.4. Методом Рунге - Кутты найти решение уравнения $y' = 2(x^2 + y)$ при начальных условиях $x_0 = 0,\ y(x_0) = 1$ на интервале [0;1] с шагом $\Delta x = 0{,}1$.

Решение. На первом шаге получим:

$k_1^{(0)} = \Delta x \cdot F(x_0, y_0) = 0{,}1 \cdot 2(0^2 + 1) = 0{,}2;$

$k_2^{(0)} = \Delta x \cdot F(x_0 + \Delta x/2, y_0 + k_1/2) = 0{,}1 \cdot 2(0{,}05^2 + (1 + 0{,}2/2)) = 0{,}2205;$

$k_3^{(0)} = \Delta x \cdot F(x_0 + \Delta x/2, y_0 + k_2/2) = 0{,}1 \cdot 2(0{,}05^2 + (1 + 0{,}2205/2)) = 0{,}2225;$

$k_4^{(0)} = \Delta x \cdot F(x_0 + \Delta x, y_0 + k_3) = 0{,}1 \cdot 2(0{,}1^2 + (1 + 0{,}2225)) = 0{,}2465;$

$y_1 = y_0 + (k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)})/6 =$

$= 1 + (0{,}2 + 2 \cdot 0{,}2205 + 2 \cdot 0{,}2225 + 0{,}2465)/6 = 1{,}2221.$

Для удобства вычислений результаты поместим в таблицу 3

Таблица 3

i	x_i	y_i	$F(x_i, y_i)$	$k_i^{(i)}$	Δy
0	0	1,0	2,0	0,2	0,2
	0,05	1,1	2,205	0,2205	0,4410
	0,05	1,1103	2,225	0,2225	0,4450
	0,1	1,2225	2,465	0,2465	0,2465
Δy_0				$\frac{1}{6}\sum$	0,2221
1	0,1	1,2221	2,4642	0,2464	0,2464
	0,15	1,3453	2,7356	0,2736	0,5471
	0,15	1,3589	2,7628	0,2763	0,5526
	0,2	1,4984	3,0767	0,3077	0,3077
Δy_1				$\frac{1}{6}\sum$	0,2756
…	…	…	…	…	…
8	0,8	5,4898	12,2596	1,2260	1,2260
	0,85	6,1027	13,6505	1,3650	2,7301
	0,85	6,1723	13,7896	1,3789	2,7579
	0,9	6,8687	15,3575	1,5357	1,5357
Δy_8				$\frac{1}{6}\sum$	1,3749
9	0,9	6,8647	15,3495	1,5349	1,5349
	0,95	7,6322	17,0694	1,7069	3,4138
	0,95	7,7182	17,2314	1,7241	3,4483
	1,0	8,5889	19,1778	1,9177	1,9177
Δy_9				$\frac{1}{6}\sum$	1,7191
	1,0	8,5839			

Примечание. Результаты с 2 по 7 шаг опущены.

Полученные результаты показывают на высокую точность результатов интегрирования уравнения методом Рунге - Кутты четвертого порядка, что доказывается сравнением с точным значением функции (см. табл. 1).

При реализации метода Рунге - Кутты на ЭВМ с автоматическим выбором шага в каждом узле x_i делают двойной просчет – сначала с шагом Δx, а затем с шагом $\Delta x/2$. Если разность значений $|y_n - y_{2n}| < \varepsilon$, то для следующей точки x_{i+1} шаг удваивают, в противном случае берут половинный шаг, то есть $\Delta x/2$.

1.3. Экстраполяционные методы решений уравнения

При решении дифференциального уравнения методом Рунге - Кутты необходимо производить много вычислений для нахождения значений сеточной функции. В том случае, когда правая часть уравнения представляет сложную функцию, решение уравнения методом Рунге - Кутты вызывает большие трудности, что вызвало появление таких методов, как методы Адамса, Милна.

Метод Адамса не требует многократного расчета правой части уравнения, он основан на представлении производной с помощью второй интерполяционной формулы Ньютона (ограничиваясь разностями третьего порядка):

$$y' = y'_i + t\Delta y'_{i-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y'_{i-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y'_{i-3}, \qquad (14)$$

где $t = (x - x_i)/\Delta x$.

Если воспользоваться выражением для приращения функции в виде (14), то есть $\Delta y = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx$, получим

$$\Delta y_i = \Delta x \int\limits_0^1 \left(y'_i + t\Delta y'_{i-1} + \frac{t^2+t}{2}\Delta^2 y'_{i-2} + \frac{t^3+3t^2+2t}{6}\Delta^3 y'_{i-3} \right) dt =$$
$$= \Delta x y'_i + \frac{1}{2}\Delta(\Delta x y'_{i-1}) + \frac{5}{12}\Delta^2(\Delta x y'_{i-2}) + \frac{3}{8}\Delta^3(\Delta x y'_{i-3}). \qquad (15)$$

Обозначим $q_i = y'_i \Delta x = F(x_i, y_i)\Delta x$, тогда

$$\Delta y_i = q_i + \frac{1}{2}\Delta q_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{i-3}. \qquad (16)$$

Формула (16) называется *экстраполяционной формулой Адамса*.

Решение уравнения будет $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$.

Для обеспечения процедуры вычислений необходимо предварительно получить четыре значения: y_0, y_1, y_2, y_3. Они могут быть определены известными методами, например методом Рунге - Кутты. Далее вычисляют значения

$$q_0 = \Delta x y'_0 = \Delta x F(x_0, y_0); \qquad q_1 = \Delta x y'_1 = \Delta x F(x_1, y_1);$$

$$q_2 = \Delta x y'_2 = \Delta x F(x_2, y_2); \qquad q_3 = \Delta x y'_3 = \Delta x F(x_3, y_3).$$

После этого составляется таблица разностей (табл. 4).

Метод Адамса заключается в продолжении диагональной матрицы разностей с помощью формулы (16).

Используя вычисленные разности $q_3, \Delta q_2, \Delta^2 q_1, \Delta^3 q_0$, которые в таблице 4 располагаются по диагонали, получаем

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0 .$$

Таблица 4

i	x_i	y_i	Δy_i	$y' = F(x_i, y_i)$	$q_i = \Delta x y'_i$	Δq_i	$\Delta^2 q_i$	$\Delta^3 q_i$
0	x_0	y_0		$F(x_0, y_0)$	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
1	x_1	y_1		$F(x_1, y_1)$	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	
2	x_2	y_2		$F(x_2, y_2)$	q_2	Δq_2		
3	x_3	y_3	Δy_3	$F(x_3, y_3)$	q_3			
4	x_4	y_4						
5	x_5							
6	x_6							

Полученное значение Δy_3 вносят в таблицу и находят $y_4 = y_3 + \Delta y_3$. Затем при известном x_4 и найденном y_4 вычисляют $F(x_4, y_4), q_4, \Delta q_3$, $\Delta^2 q_2, \Delta^3 q_1$, то есть получается новая диагональ значений. По этим данным вычисляют $F(x_4, y_4), q_4, \Delta q_3, \Delta^2 q_2, \Delta^3 q_1$, откуда находят

$$\Delta y_4 = q_4 + \frac{1}{2}\Delta q_3 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_2 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_1 \quad \text{и} \quad y_5 = y_4 + \Delta y_4 .$$

Таким образом, продолжают таблицу решения, вычисляя правую часть дифференциального уравнения $y' = F(x, y)$ только один раз.

Для апробации метода Адамса используют решение дифференциального уравнения, полученное методом Рунге - Кутты.

Пример 1.5. Методом Адамса найти решение уравнения $y' = 2(x^2 + y)$ при начальных условиях $x_0 = 0$, $y(x_0) = 1$ на интервале $[0;1]$ с шагом $\Delta x = 0{,}1$.

Решение. Значения y_0, y_1, y_2, y_3, полученные методом Рунге - Кутты., возьмем из табл. 5.

Таблица 5

i	x_i	y_i	Δy_i	$y' = F(x_i, y_i)$	$q_i = \Delta x y'_i$	Δq_i	$\Delta^2 q_i$	$\Delta^3 q_i$
0	0	1,0	–	2,0	0,2	0,0464	0,0147	0,0033
1	0,1	1,2221	–	2,4642	0,2464	0,0611	0,0180	0,0039
2	0,2	1,4977	–	3,0755	0,3075	0,0791	0,0219	0,0048
3	0,3	1,8433	0,4349	3,8663	0,3866	0,1010	0,0267	0,0059
4	0,4	2,2782	0,5486	4,8764	0,4876	0,1218	0,0326	0,0074
5	0,5	2,8268	0,6922	6,1537	0,6154	0,1604	0,0399	0,0088
6	0,6	3,5190	0,8718	7,7580	0,7758	0,2004	0,0487	0,0109
7	0,7	4,3908	1,0958	9,7616	0,9762	0,2491	0,0596	
8	0,8	5,4866	1,3734	12,2531	1,2253	0,3087		
9	0,9	6,8600	1,7173	15,3401	1,5340			
10	1,0	8,5773						

Для решения уравнения составим две таблицы: основную (табл.5) и вспомогательную (табл.6)

В таблице 6 приведены значения q_i и Δy_i, рассчитанные по формуле (16)

Таблица 6

i	q_i	$\frac{1}{2}\Delta q_{i-1}$	$\frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2}$	$\frac{3}{8}\Delta^3 q_{i-3}$	Δy_i
3	0,3866	0,03955	0,0075	0,0012	0,4349
4	0,4876	0,05050	0,0091	0,0015	0,5486
5	0,6154	0,0639	0,0111	0,0018	0,6922
6	0,7758	0,0802	0,0136	0,0022	0,8718
7	0,9762	0,1002	0,0166	0,0028	1,0957
8	1,2253	0,1246	0,0203	0,0033	1,3734
9	1,5340	0,1543	0,0248	0,0041	1,7173

Таким образом, решение методом Адамса разбивается на два этапа. На первом этапе получают значения функции y_1, y_2, y_3 каким-либо одношаговым методом, например методом Эйлера, затем находят значения производной в этих точках y'_1, y'_2, y'_3. На втором этапе с помощью интерполяционной формулы Ньютона вычисляют приращение функции Δy_i. Для удобства вычислений используют две таблицы. Метод требует меньших затрат времени, так как правая часть уравнения $F(x_i, y_i)$ вычисляется один раз, недостатком метода является невозможность «замозапуска». В таблице 7 приведено его сравнение с методом Рунге - Кутты и точным решением.

Таблица 7

	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Точное решение	1,2010	1,2210	1,4977	1,8432	2,2783	2,8274	3,5202	4,3928	5,4895	6,8645	8,5836
Метод Рунге-Кутты	1,0	1,222	1,4977	1,8433	2,2784	2,8276	3,5203	4,3930	5,4898	6,8647	8,5839
Метод Адамса	1,0	1,2221	1,4977	1,8433	2,2782	2,8268	3,5190	4,3908	5,4866	6,860	8,5773

Из сравнения результатов вычислений видна разница в рассмотренных методах. Отметим, что величину шага Δx в методе Адамса определяют из неравенства $\Delta x^4 < \varepsilon$. На практике следят за изменением величин разностей $\Delta^3 q_i$, выбирая Δx таким, чтобы соседние разности $\Delta^3 q_i$ и $\Delta^3 q_{i+1}$ отличались между собой не более чем на одну-две единицы заданного разряда.

Индивидуальное задание студента

Методом Рунге - Кутты четвертого порядка найти частное решение дифференциального уравнения на отрезке [a,b] с шагом 0,2.

№	Задание	Ответ
1.	$y' = e^x + y, \quad y(0) = 1, \quad a = 0, \quad b = 1.$	Ответ: $y = (x+1)e^x$.
2.	$y' = 2x(x^2 + y), \quad y(0) = 0, \quad a = 0, \quad b = 1.$	Ответ: $y = x^2 + 1 - e^{x^2}$.
3.	$y' = y + \dfrac{e^x}{x}, \quad y(1) = 0, \quad a = 1, \quad b = 2.$	Ответ: $y = e^x \ln x$.
4.	$y' = \dfrac{1 - xy}{1 - x^2}, \quad y(0) = 1, \quad a = 0, \quad b = 1.$	Ответ: $y = x + \sqrt{1 - x^2}$.
5.	$y' = \dfrac{2xy + 3}{x^2}, \quad y(1) = -1, \quad a = 1, \quad b = 2.$	Ответ: $y = -1/x$.
6.	$y' = xe^{-x^2} - 2xy, \quad y(0) = 0, \quad a = 0, \quad b = 1.$	Ответ: $y = \dfrac{x^2}{2e^{x^2}}$.
7.	$y' = \dfrac{y}{x \ln x}, \quad y(2) = \ln 2, \quad a = 2, \quad b = 3.$	Ответ: $y = \ln x$.
8.	$y' = \dfrac{2(x^4 + y)}{x}, \quad y(1) = 0, \quad a = 1, \quad b = 2.$	Ответ: $y = x^4 - x^2$.
9.	$y' = \dfrac{-(1 + xy)}{x^2}, \quad y(1) = 0, \quad a = 1, \quad b = 2.$	Ответ: $y = -\dfrac{\ln x}{x}$.
10.	$y' = y - \dfrac{2x}{y}, \quad y(0) = 1, \quad a = 0, \quad b = 1.$	Ответ: $y = \sqrt{2x + 1}$.

Пример выполнения задания. Методом Рунге - Кутты четвертого порядка найти частное решение дифференциального уравнения $y' = \dfrac{\ln x - y + 1}{x}$ при начальных условиях $x_0 = 1$ $y_0 = 0$ на интервале [1;2] с шагом 0,2.

Решение.

Определим число узлов и шаг интегрирования:

$a = 1;\quad b = 2;\quad \Delta x = 0{,}2\;\; x_0 = a = 1;\quad x_1 = x_0 + \Delta x = 1{,}2; \ldots;\; x_5 = 2{,}0.$

Для расчетов воспользуемся формулой (3.13):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}}{6},$$

где

$$k_1^{(i)} = \Delta x \cdot F(x_i, y_i);$$

$$k_2^{(i)} = \Delta x \cdot F(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_1}{2});$$

$$k_3^{(i)} = \Delta x \cdot F(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_2}{2});$$

$$k_4^{(i)} = \Delta x \cdot F(x_i + \Delta x, y_i + k_3).$$

На первом шаге имеем:

$$k_1^{(0)} = 0{,}2\left(\frac{\ln x_0 - y_0 + 1}{x_0}\right) = 0{,}2\left(\frac{\ln 1 - 0 + 1}{1}\right) = 0{,}2;$$

$$k_2^{(0)} = 0{,}2\left(\frac{\ln(x_0 + \Delta x/2) - (y_0 + k_1^{(0)}/2) + 1}{x_0 + \Delta x/2}\right) = 0{,}2\left(\frac{\ln 1{,}1 - (0 + 0{,}1) + 1}{1{,}1}\right) = 0{,}1810;$$

$$k_3^{(0)} = 0{,}2\left(\frac{\ln(x_0 + \Delta x/2) - (y_0 + k_2^{(0)}/2) + 1}{x_0 + \Delta x/2}\right) = 0{,}2\left(\frac{\ln 1{,}1 - (0 + 0{,}181/2) + 1}{1{,}1}\right) = 0{,}1827;$$

$$k_4^{(0)} = 0{,}2\left(\frac{\ln(x_0 + \Delta x) - (y_0 + k_3^{(0)}) + 1}{x_0 + \Delta x}\right) = 0{,}2\left(\frac{\ln 1{,}2 - (0 + 0{,}1827) + 1}{1{,}2}\right) = 0{,}1666.$$

$$y_1 = y_0 + \frac{k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}}{6} =$$

$$= 0 + \frac{(0{,}20 + 2\cdot 0{,}1810 + 2\cdot 0{,}1827 + 0{,}1666)}{6} = 0{,}18233.$$

Дальнейшие расчеты проведем во вспомогательной таблице 1.13.

Таблица 1.13

i	x_i	y_i	$F(x_i, y_i)$	$k_i^{(i)}$	Δy
0	1,0	0	1,0	0,2	0,2
	1,1	0,1	0,9050	0,1810	0,3620
	1,1	0,090	0,4525	0,1827	0,3654
	1,2	0,1827	0,8330	0,1666	0,1666
Δy_0				$\frac{1}{6}\sum \Delta y$	0,1823
1	1,2	0,1823	0,8333	0,1667	0,1667
	1,3	0,2656	0,7667	0,1533	0,3067
	1,3	0,2590	0,7718	0,1544	0,3087
	1,4	0,3366	0,7141	0,1428	0,1428
Δy_1					0,1541
2	1,4	0,3364	0,7143	0,1429	0,1429
	1,5	0,4079	0,6650	0,1330	0,2660
	1,5	0,4030	0,6683	0,1337	0,2673
	1,6	0,4701	0,6249	0,1250	0,1250
Δy_2					0,1335
3	1,6	0,4699	0,6250	0,1250	0,1250
	1,7	0,5324	0,5871	0,1174	0,2348
	1,7	0,5287	0,5893	0,1179	0,2357
	1,8	0,5878	0,5555	0,1111	0,1111
Δy_3					0,1177
4	1,8	0,5877	0,5555	0,1111	0,1111
	1,9	0,6433	0,5255	0,1051	0,2102
	1,9	0,6403	0,5271	0,1054	0,2109
	2,0	0,6931	0,4999	0,0999	0,0999
Δy_4					0,1054
5	2,0	0,6931	–	–	–

Результаты интегрирования запишем в итоговую таблицу 1.14.

Таблица 1.14

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
y_i	0,0	0,1823	0,3364	0,4699	0,5877	0,6931

Библиографический список

1. Амосов, А. А. Вычислительные методы для инженеров [Текст] : учебное пособие для втузов / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н.В. Копченова. - М. : Высшая школа, 1994. - 544 с..
2. Вержбицкий В.М. Численные методы математической физики [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.М.Вержбицкий. - М: Директ.-Медиа, 2013. - 212 с. // Режим доступа -http://biblioclub.ru/
3. Волков Е.А. Численные методы [Текст]: учебное пособие / Е.А. Волков. - 4 –е изд., стер.– СПб.: Лань., 2007. - 256 с.
4. Киреев, В. И. Численные методы в примерах и задачах [Текст] : учебное пособие / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. - Изд. 4-е, испр. - Санкт-Петербург : Лань, 2015. - 448 с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 441-443.
5. Численные методы [Текст] : учебное пособие : [для студентов 2 курса специальности 230700.62 «Прикладная информатика» при изучении дисциплины «Численные методы»] / В. А. Милых, Ю. А. Халин ; - Курск : ЮЗГУ, 2013. - 155 с.