

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра машиностроительных технологий и оборудования

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Локтионова
« 14 » 20 г.



ОПТИМИЗАЦИЯ МЕТОДОМ «КРУТОЕ ВОСХОЖДЕНИЕ»

Методические указания по выполнению практической и самостоятельной работы для студентов по направлениям подготовки 27.04.01 «Стандартизация и метрология», 27.04.02 «Управление качеством», 15.04.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»

Курск 2018

УДК 519.6

Составители: В.В. Куц, М.С. Разумов

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *А.О. Гладышкин*

Оптимизация методом «крутое восхождение» : методические указания по проведению практической и самостоятельной работы / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Куц, М.С. Разумов. – Курск, 2018. 9 с.: ил. 1.: табл. 4.

Содержат сведения по вопросам оптимизации методом «крутое восхождение». Указывается порядок выполнения практической и самостоятельной работы, подходы к решению и правила оформления.

Методические рекомендации соответствуют требованиям программы, утвержденной учебно-методическим объединением по специальности автоматизированного машиностроительного производства (УМОАМ).

Предназначено для студентов по направлениям подготовки 27.04.01 «Стандартизация и метрология», 27.04.02 «Управление качеством», 15.04.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 14.02.18 . Формат 60x84 1/16.
Усл.печ.л. 0,5. Уч.-изд.л. 0,4. Тираж 40 экз. Заказ. 1092 Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Цель работы: 1) ознакомить с методами оптимизации целевых функций; 2) овладеть практическими навыками оптимизации методами «крутого» восхождения и «наискорейшего» спуска.

Рекомендуемая литература: [1, 2, 7, 11].

Теоретические сведения

Решение разнообразных задач управления, проектирования и планирования в той или иной мере связано с оптимизацией, т.е. нахождением наилучших в определенном смысле значений различных факторов.

Обычно задается либо выбирается некоторый параметр оптимизации y , зависящий от факторов X_1, X_2, \dots, X_n . Задача оптимизации сводится к отысканию таких значений факторов, при которых этот параметр достигает экстремума (минимума или максимума).

Параметр оптимизации y (критерий оптимизации, целевая функция) должен количественно характеризовать исследуемый технологический процесс и иметь ясный физический смысл.

В качестве целевой функции могут быть использованы экономические (прибыль, себестоимость, рентабельность), технико-экономические (производительность, выход продукции, надежность) и технико-технологические параметры (пищевые, медико-биологические, механические, теплофизические и другие характеристики).

Следует отметить, что целевая функция и факторы могут меняться только в определенных пределах. Так, дозировки рецептурных компонентов не могут быть отрицательными, температура и давление в технологическом аппарате не могут превышать безопасных пределов, себестоимость продукции должна быть не выше плановой и т.п. Следовательно, оптимизацию осуществля-

ют в условиях ограничений, налагаемых на факторы и целевую функцию.

Рассмотрим оптимизацию методом «крутого восхождения», основанным на использовании результатов полного факторного эксперимента или эксперимента по методу дробных реплик.

Пусть, например, целевая функция задана в виде уравнения регрессии первого порядка, полученного по результатам полного или дробного факторного эксперимента. Уравнение регрессии адекватно описывает функцию отклика в области значений факторов X_1, X_2, \dots, X_n от -1 до $+1$:

$$y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_nX_n + b_{12}X_1X_2 + \dots + b_{(n-1)n}X_{n-1}X_n. \quad (1)$$

Для нахождения экстремума уравнения (1) следует осуществлять движение по градиенту, т. к. оно обеспечивает наиболее короткий путь к экстремуму, т.е. направление градиента – это направление самого крутого склона, ведущего от данной точки к экстремуму функции.

Движение по градиенту осуществляют с некоторым шагом (приращением значения фактора), причем его минимальная величина должна быть больше ошибки, с которой фиксируют фактор. Максимальную величину шага ограничивает область определения фактора. Необходимо учитывать, что при движении к оптимуму малый шаг потребует значительного числа опытов, а большой – может привести к проскоку области оптимума.

При выборе шага движения один из факторов принимают за базовый и для него выбирают шаг движения. Для всех остальных факторов шаг движения рассчитывают по формуле

$$\Delta_i = \Delta_l \frac{b_i e_i}{b_l e_l}, \quad (2)$$

где Δ_i – шаг движения для i – фактора; Δ_l – шаг движения для базового фактора l ; b_i и b_l – коэффициенты регрессионного уравнения вида (1).

Движение к оптимуму начинают из центра плана (точка факторного пространства, в которой факторы X_1, X_2, \dots, X_n равны нулю).

Значения факторов X_i^k на каждом новом шаге находят путем прибавления шага Δ_i к соответствующим предыдущим значениям X_i^{k-1}

$$X_i^k = X_i^{k-1} + \Delta_i.$$

Так осуществляется оптимизация по методу «крутого восхождения» (поиск максимума). Если же ищется минимум функции y , то используют метод «наискорейшего спуска» и новые значения факторов находят из предыдущих путем вычитания шага

$$X_i^k = X_i^{k-1} - \Delta_i.$$

Поиск экстремума прекращают в следующих случаях:

1. Значения одного или нескольких факторов X_i или целевой функции y вышли на границы допустимых значений.
2. Критерий оптимальности y достиг экстремума.

В первом случае на этом оптимизация заканчивается, а во втором – в области экстремума функции y ищут ее новое математическое описание, используя ПФЭ или ДФЭ. Если удастся получить адекватное описание этой функции в виде (1), то продолжают оптимизацию методом «крутого восхождения». В противном случае – переходят к планированию эксперимента для получения математического описания функции y в виде многочлена второй степени.

Пример

Для моделирования и оптимизации процесса сушки армейских сухарей было использовано планирование эксперимента. В качестве целевой функции y был выбран выход продукта (кг). На параметр оптимизации оказывали существенное влияние сле-

дующие факторы: X_1 – количество улучшителя, %; X_2 – температура сушки, °С; X_3 – продолжительность сушки, мин; X_4 – скорость охлаждения.

К количественным факторам относят X_1, X_2, X_3 , к качественным – X_4 . Он принимает одно из двух значений: быстрое охлаждение (обдувка воздухом) и медленное охлаждение (выстойка в шкафах) (табл. 1).

Таблица 1

Параметр	Характеристики планирования			
	Факторы			
	$x_1, \%$	$x_2, \text{°C}$	$x_3, \text{мин}$	X_4
Основной уровень	0,40	84	60	-
Интервал варьирования	0,15	10	60	-
Верхний уровень	0,55	94	120	Выстойка в шкафах Обдувка воздухом
Нижний уровень	0,25	74	0	

Для построения уравнения регрессии была реализована полуреплика 2^{4-1} с определяющим контрастом $X_4 = X_1X_2X_3$ (табл. 2). При проведении эксперимента опыты дублировали три раза.

Таблица 2

Матрица планирования					
№ опыта	X_1	X_2	X_3	X_4	y
1	+1	+1	+1	+1	100
2	-1	+1	+1	-1	81
3	+1	-1	+1	+1	96
4	-1	-1	+1	-1	36
5	+1	+1	-1	+1	130
6	-1	+1	-1	-1	69
7	+1	-1	-1	+1	60
8	-1	-1	-1	-1	64

Была проведена статистическая обработка матрицы планирования, по результатам которой получено уравнение регрессии

$$y = 83,1 + 20,0X_1 + 11,8X_2 - 5,1X_3 - 9,4X_4 .$$

Сравнение расчетного значения критерия Фишера ($F_p = 2,0$) с табличным значением ($F_m = 19,2$) показало, что уравнение регрессии адекватно описывает экспериментальные данные.

Согласно полученной модели, значение целевой функции (выход продукта) возрастает с увеличением количества улучшителя X_1 и температуры сушки X_2 и уменьшением продолжительности сушки X_3 . Наибольшее влияние на функцию отклика оказывает фактор X_1 . Быстрое охлаждение (обдувка воздухом) позволяет увеличить выход армейских сухарей.

Для поиска максимального значения целевой функции y «крутое восхождение» по поверхности отклика (табл. 3) начинаем из центра плана (см. табл. 1): $X_1 = 0,40$; $X_2 = 84,0$; $X_3 = 60,0$; X_4 – быстрое охлаждение, т. к. медленное охлаждение приводит к уменьшению целевой функции.

В качестве базового принимаем фактор X_2 , для которого устанавливаем шаг движения $\Delta_2 = 1,0$ °С. По формуле (2) вычисляем шаг движения для факторов X_1 и X_3 :

$$\Delta_1 = 1,0 \frac{20 \cdot 0,15}{11,9 \cdot 10,0} = 0,0252 \approx 0,03;$$

$$\Delta_3 = 1,0 \frac{(-5,1) \cdot 60,0}{11,9 \cdot 10,0} = -2,57 \approx -3,0.$$

Как видно, см. табл. 3, лучший результат был получен на 15-м шаге продвижения к оптимуму. Величина параметра оптимизации (максимум выхода продукта $y = 366$ кг) удовлетворила исследователей, и «крутое восхождение» по поверхности отклика было закончено. При этом оптимальные параметры сушки таковы: количество улучшителя $X_1 = 0,61$ %; температура сушки $X_2 = 91,0$ °С; продолжительность сушки $X_3 = 39,0$ мин; скорость охлаждения X_4 – быстрое охлаждение.

Таким образом, потребовалось 16 опытов (из них 4 “мысленных”), для того, чтобы определить оптимальные условия проведения сушки армейских сухарей.

Таблица 3

**Расчет «крутого восхождения»
для оптимизации процесса сушки армейских сухарей**

Наименование показателя	Натуральные значения факторов				Кодированные значения факторов				Целевая функция y , кг
	x_1 , %	x_2 , °C	x_3 , мин	x_4	X_1	X_2	X_3	X_4	
Основной уровень.	0,40	84,0	60,0	-	0	0	0	0	83,1
Шаг движения D_i	0,03	1,0	-3,0	-	0,2	0,1	-0,05	-	-
Движение по градиенту:									
шаг 9	0,43	85,0	57,0	Быстрое охлаждение	0,2	0,1	-0,05	-1	*
'' 10	0,46	86,0	54,0		0,4	0,2	-0,1	-1	*
'' 11	0,49	87,0	51,0		0,6	0,3	-0,15	-1	108,0
'' 12	0,52	88,0	48,0		0,8	0,4	-0,2	-1	*
'' 13	0,55	89,0	45,0		1,0	0,5	-0,25	-1	*
'' 14	0,58	90,0	42,0		1,2	0,6	-0,3	-1	196,0
'' 15	0,61	91,0	39,0		1,4	0,7	-0,35	-1	366,1
'' 16	0,64	92,0	36,0		1,6	0,8	-0,4	-1	313,2

Примечание. Символами (*) показаны “мысленные” опыты.

Задание

Используя метод «крутое восхождение» («наискорейший спуск»), выполнить оптимизацию целевой функции в виде уравнения регрессии, полученного в практической работе № 6 после статистической обработки результатов полного факторного эксперимента. Условия оптимизации представлены в табл. 4.

Таблица 4

Исходные данные для оптимизации

Вариант	Ограничения			Тип задачи оптимизации
	Фактор x_1	Фактор x_2	Целевая функция y	
1	$1,0 \leq x_1 \leq 4,0$	$2,5 \leq x_2 \leq 8,5$	$y \rightarrow \max$	«Крутое восхождение»
2	$2,5 \leq x_1 \leq 3,5$	$1,5 \leq x_2 \leq 3,0$	$y \leq 8,0$	То же
3	$0,25 \leq x_1 \leq 1,0$	$1,5 \leq x_2 \leq 2,5$	$y \leq 1,0$	''
4	$0,25 \leq x_1 \leq 1,0$	$1,5 \leq x_2 \leq 2,5$	$y \geq 3,2$	«Наискорейший спуск»
5	$110,0 \leq x_1 \leq 120,0$	$5,0 \leq x_2 \leq 25,0$	$y \geq 40,0$	То же
6	$10,0 \leq x_1 \leq 35,0$	$34,0 \leq x_2 \leq 40,0$	$y \rightarrow \max$	«Крутое восхождение»
7	$10,0 \leq x_1 \leq 35,0$	$34,0 \leq x_2 \leq 40,0$	$y \leq 75,0$	То же
8	$0 \leq x_1 \leq 75,0$	$1,0 \leq x_2 \leq 15,0$	$y \leq 180,0$	''

Контрольные вопросы

1. Что является условием прекращения движения по градиенту?
2. Что такое градиент функции?
3. Как вычисляют значение фактора на новом шаге движения по градиенту?
4. Как проводится «крутое восхождение» по поверхности отклика?
5. В чем заключается оптимизация методом «наискорейшего спуска»?