

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра машиностроительных технологий и оборудования

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебной работе  
Ю.И. Юкшинова  
« 14 » 02 (ЮЗГУ) 20 г.



**ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МОДЕЛИ, ПОЛУЧЕННОЙ  
ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ПОЛНОГО ФАКТОРНОГО  
ЭКСПЕРИМЕНТА**

Методические указания по выполнению практической и самостоятельной работы для студентов по направлениям подготовки 27.04.01 «Стандартизация и метрология», 27.04.02 «Управление качеством», 15.04.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»

Курск 2018

УДК 519.6

Составители: В.В. Куц, М.С. Разумов

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *А.О. Гладышкин*

**Интерпретация модели, полученной по результатам полного факторного эксперимента** : методические указания по проведению практической и самостоятельной работы / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Куц, М.С. Разумов. – Курск, 2018. 8 с.: ил. 4.: табл. 3.

Содержат сведения по вопросам интерпретации модели, полученной по результатам полного факторного эксперимента. Указывается порядок выполнения практической и самостоятельной работы, подходы к решению и правила оформления.

Методические рекомендации соответствуют требованиям программы, утвержденной учебно-методическим объединением по специальности автоматизированного машиностроительного производства (УМОАМ).

Предназначено для студентов по направлениям подготовки 27.04.01 «Стандартизация и метрология», 27.04.02 «Управление качеством», 15.04.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать *14.02.18* . Формат 60x84 1/16.  
Усл.печ.л. 0,5. Уч.-изд.л. 0,4. Тираж 40 экз. Заказ. *1093* Бесплатно.  
Юго-Западный государственный университет.  
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

**Цель работы:** овладеть практическими навыками аналитической и геометрической интерпретации уравнения регрессии первого порядка.

*Рекомендуемая литература:* [1, 2, 7].

### Теоретические сведения

По результатам планирования эксперимента строится уравнение регрессии первого порядка

$$y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_n X_n + b_{12} X_1 X_2 + \dots + b_{(n-1)n} X_{n-1} X_n, \quad (1)$$

в котором коэффициенты  $b_1, b_2, \dots, b_n$  называются линейными эффектами, а коэффициенты  $b_{12}, b_{13}, \dots, b_{(n-1)n}$  – эффектами взаимодействия.

Коэффициенты вида  $b_{12}, b_{13}$  и т. д. – эффект взаимодействия первого порядка; коэффициенты вида  $b_{123}, b_{134}$  и т. д. – эффект взаимодействия второго порядка. Вообще эффект взаимодействия максимального порядка в ПФЭ или ДФЭ имеет значение, на единицу меньше числа факторов.

Полное число всех возможных эффектов, включая  $b_0$ , линейные эффекты и взаимодействие всех порядков, равно числу опытов ПФЭ.

Математическую модель в виде уравнения регрессии первого порядка можно интерпретировать следующим образом:

1. Знак, стоящий перед коэффициентом  $b_i$ , указывает на характер изменения функции отклика при уменьшении или увеличении значения фактора  $X_i$ . Если коэффициент  $b_i$  имеет знак “+”, то с увеличением значения фактора  $X_i$  значение функции отклика возрастает, а если знак “–” – значение функции отклика уменьшается и наоборот.

2. Коэффициент  $b_0$ , входящий в уравнение (1), показывает значение функции отклика  $y$  на основном уровне (т. е. в точке факторного пространства с координатами  $X_1 = X_2 = \dots = X_n = 0$ ).

3. Коэффициенты  $b_1, b_2, \dots, b_n$  при независимых переменных  $X_1, X_2, \dots, X_n$  указывают на силу влияния каждого фактора в отдельности на функцию отклика  $y$ : чем больше значение коэффициента  $b_i$  (по модулю), тем большее влияние оказывает данный фактор  $X_i$  на функцию отклика. Величина коэффициента  $b_i$  соответствует вкладу данного фактора  $X_i$  в величину функции отклика при переходе с основного уровня на верхний или нижний.

Уравнение регрессии вида (1) позволяет прогнозировать (рассчитать) значение функции отклика  $y$  при интересующих значениях факторов  $X_i$ . При этом в ходе расчета в уравнение (1) подставляют кодированные значения факторов, что не всегда является удобным.

Следует отметить, что иногда в уравнении регрессии целесообразно перейти от кодированных переменных к натуральным.

Кодированное значение фактора  $X_i$  связано с натуральным значением  $x_i$  соотношением

$$X_i = \frac{x_i - x_i^0}{e_i}, \quad (2)$$

где  $x_i^0$  – натуральное значение  $i$ -го фактора на основном уровне;  $e_i$  – интервал варьирования  $i$ -го фактора.

После подстановки выражения (2) в уравнение (1) с учетом несложных преобразований можно получить уравнение регрессии с натуральными переменными. Это позволит исследователю избавиться от необходимости всякий раз переводить условия опытов в кодированные значения.

Уравнение (1) позволяет геометрически интерпретировать результаты планирования эксперимента. Известно, что графически можно показать только непрерывную связь между двумя переменными. Зависимость функции отклика от большего числа аргументов можно изобразить дискретно или непрерывно, но в искаженном виде с помощью аксонометрических построений.

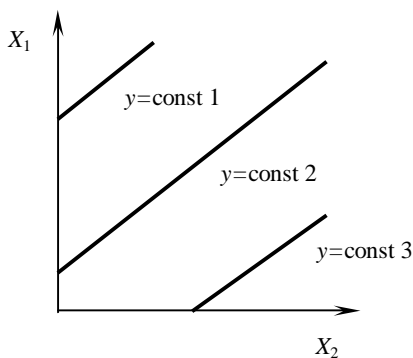


Рис. 1. Линии равного уровня  $y = \text{const}$

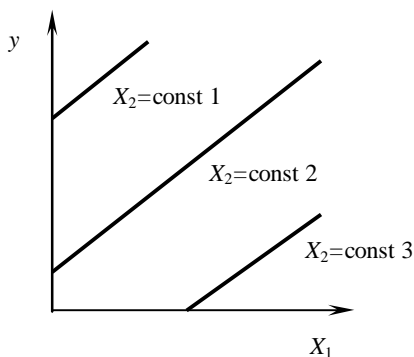
б) частных зависимостей  $y = f(X_i)$  при фиксированных значениях факторов ...  $X_{i-1} = \text{const}$ ,  $X_{i+1} = \text{const}$ , ...  $X_n = \text{const}$  (рис. 2, а и рис. 2, б).

При геометрической интерпретации результатов планирования эксперимента используются оба эти метода, но предпочтение отдается первому вследствие его простоты.

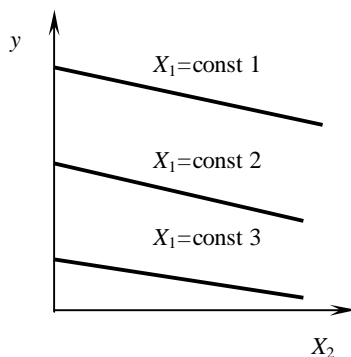
С помощью первого метода уравнение регрессии графически представляют в виде:

а) линий равного уровня

$y = \text{const}$  при изменяемых значениях факторов  $X_i = \text{const}$  (рис. 8.1);



а



б

Рис. 2. Частные зависимости: а -  $y = f(X_1)$  при  $X_2 = \text{const}$ ; б -  $y = f(X_2)$  при  $X_1 = \text{const}$

## Пример

Для изучения зависимости формоустойчивости тестовой заготовки при расстойке  $y$  (усл. ед.) от продолжительности  $x_1$  (мин) и температуры расстойки  $x_2$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) был проведен полный факторный эксперимент типа  $2^2$ , характеристики которого представлены в табл. 1. При проведении эксперимента использовали рандомизацию, каждый опыт дублировали 5 раз.

Таблица 1

Характеристики планирования

Параметр	$x_1$ , мин	$x_2$ , $^{\circ}\text{C}$
Основной уровень	45,0	36,0
Интервал варьирования	15,0	6,0
Верхний уровень	60,0	42,0
Нижний уровень	30,0	30,0

Была проведена статистическая обработка результатов ПФЭ, которая показала воспроизводимость опытов и позволила построить уравнение регрессии первого порядка, адекватно описывающее экспериментальные данные

$$y = 5,06 + 0,52X_1 + 0,75X_2.$$

Полученную математическую модель можно интерпретировать следующим образом:

1. Формоустойчивость тестовой заготовки в процессе расстойки составляет 5,06 усл. ед. при продолжительности расстойки 45,0 мин и температуре расстойки 36,0  $^{\circ}\text{C}$ .

2. Температура расстойки (фактор  $X_2$ ) оказывает большее влияние на формоустойчивость тестовой заготовки, чем продолжительность расстойки (фактор  $X_1$ ).

3. Увеличение продолжительности и температуры расстойки способствуют росту формоустойчивости тестовой заготовки и наоборот.

Представим полученное уравнение регрессии в натуральном виде. Для этого, используя формулу (2), натуральные значения факторов на основном уровне и интервалы варьирования запишем

$$X_1 = \frac{x_1 - 45,0}{15,0};$$

$$X_2 = \frac{x_2 - 36,0}{6,0}.$$

Подставляя данные выражения в уравнение регрессии, после несложных преобразований получим регрессионное уравнение в натуральном виде

$$y = 5,06 + 0,52 \frac{x_1 - 45,0}{15,0} + 0,75 \frac{x_2 - 36,0}{6,0} = -1,0 + 0,035x_1 + 0,125x_2,$$

которое позволяет рассчитать значение формоустойчивости тестовой заготовки путем подстановки в него натуральных значений факторов.

Выполним построение частной зависимости вида  $y = f(X_1)$  при  $X_2 = \text{const}$  (фактор  $X_2$  принимает значение 24, 30, 36, 42 и 48 °С) (рис. 3). Результаты предварительных вычислений даны в табл. 2.

Построим линии равных значений  $y$  при  $x_1 = \text{var}$  и  $x_2 = \text{var}$  (рис. 4). Для этого зададим значение функции отклика  $y$  и, при фиксированном значении фактора  $x_1$  из уравнения регрессии определяем значение фактора

$$x_2 = \frac{y + 1 - 0,035x_1}{0,125}.$$

Все проведенные вычисления сведены в табл. 3.

Таблица 2

**Построение зависимости  $y = f(X_1)$  при  $X_2 = \text{const}$**

$x_1$	$x_2$	$y$
15,0	24,0	2,52
75,0	24,0	4,62
15,0	30,0	3,27
75,0	30,0	5,37
15,0	36,0	4,02
75,0	36,0	6,12
15,0	42,0	4,77
75,0	42,0	9,87
15,0	48,0	5,27
75,0	48,0	7,37

Таблица 3

**Построение линий равных значений  $y = \text{const}$**

$x_1$	$x_2$	$y$
15,0	35,8	4,0
75,0	19,0	4,0
15,0	43,8	5,0
75,0	27,0	5,0
15,0	51,8	6,0
75,0	35,0	6,0
15,0	59,8	7,0
75,0	43,0	7,0
15,0	67,8	8,0
75,0	51,0	8,0

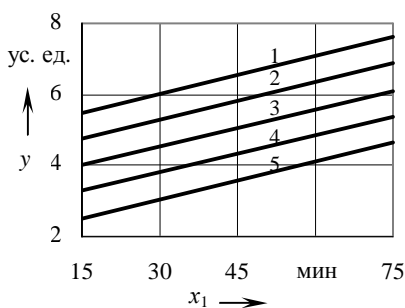


Рис. 3. Зависимость формоустойчивости тестовой заготовки от продолжительности при температуре расстойки: 1 – 48 °С; 2 – 42 °С; 3 – 36 °С; 4 – 30 °С; 5 – 24 °С

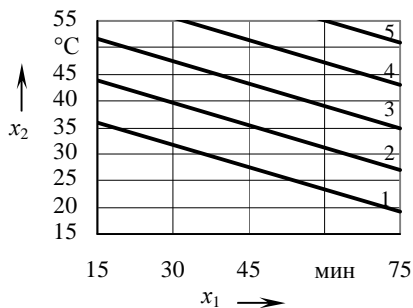


Рис. 4. Линии равных значений при значении формоустойчивости: 1 – 4 усл. ед.; 2 – 5 усл. ед.; 3 – 6 усл. ед.; 4 – 7 усл. ед.; 5 – 8 усл. ед.

### Задание

Выполнить интерпретацию уравнения регрессии, полученного в практической работе № 6. Построить частные зависимости вида  $y = f(x_1)$  при  $x_2 = \text{const}$  и  $y = f(x_2)$  при  $x_1 = \text{const}$ , линии равных значений  $y = \text{const}$  при  $x_1 = \text{var}$  и  $x_2 = \text{var}$ . С помощью соответствующих преобразований представить уравнение регрессии в натуральном виде.

### Контрольные вопросы

1. Что показывают коэффициенты, входящие в уравнение регрессии?
2. Как осуществить переход от кодированных переменных к натуральным?
3. Каким образом выполняется графическое построение линий равного уровня?
4. Как представить уравнение регрессии в натуральной форме?