

# **МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники



## **РАСЧЁТ ВАЛОВ МЕХАТРОННЫХ МОДУЛЕЙ НА ПРОЧНОСТЬ**

Методические указания по выполнению практической,  
расчётно-графической и самостоятельной работы  
по дисциплине «Техническая механика»

Курск 2015

УДК 621

Составитель Е.Н. Политов

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент В.Я. Мищенко

**Расчёт валов мехатронных модулей на прочность:** методические указания по выполнению практической, расчётно-графической и самостоятельной работы по дисциплине «Техническая механика»/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Е.Н. Политов. Курск, 2015. 31 с.: ил. 9, табл. 2. Библиогр.: с. 30-31.

Методические указания содержат сведения по решению задач на расчет на прочность валов и осей при сложном сопротивлении.

Приведены варианты расчётных схем и примеры решения задач, а также правила оформления расчётно-графической работы.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утверждённой учебно-методическим объединением (УМО).

Предназначены для студентов направления 15.03.06 Мехатроника и робототехника и других родственных направлений всех форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать

. Формат 60x84 1/16

Усл.печ.л. Уч.-изд.л. Тираж 30 экз. Заказ. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

## Содержание

Введение	4
Основные требования по выполнению и защите расчётно-графических работ	7
2. Исходные данные и задания для расчета	9
3. Общие теоретические сведения	19
3.1 Основы расчета валов на прочность	19
3.2 Исходные формулы для расчета сил в зацеплении зубчатых колес	21
4. Пример расчета вала мехатронного модуля на прочность	25
Контрольные вопросы	30
Библиографический список	30

## Введение

При изучении дисциплин «Техническая механика» и «Прикладная механика» наибольшие трудности у студентов возникают при решении практических задач.

Вместе с тем, именно решение задач в значительной степени способствует развитию инженерного мышления у студентов, приобретение ими необходимых навыков прочностных расчётов элементов мехатронных модулей, роботов и инженерных конструкций.

В настоящей методической разработке подробно рассмотрено решение типовой задачи о расчете вала на прочность, а также изложены требования по выполнению и оформлению индивидуальных расчётно-графических работ по дисциплине «Техническая механика».

Основные компетенции в соответствии с ФГОС ВО по направлению 15.03.06 Мехатроника и робототехника [1] и рабочей программой дисциплины «Техническая механика» для данного направления, формируемые у студентов в ходе выполнения данной работы, показатели и критерии определения уровня их сформированности приведены в табл. 1:

Таблица 1 - Показатели и критерии определения уровня сформированности компетенций (частей компетенций)

№ п/ п	Код компетенции (или её части)	Уровни сформированности компетенций		
		Пороговый (удовлетворительный)	Продвинутый (хороший)	Высокий (отличный)
1	2	3	4	5
1	ПК-1 способность составлять математические модели мехатронных	<b>знать:</b> модели типовых элементов мехатронных и робототехнических систем	<b>знать:</b> принципы составления расчетных схем и математических моделей отдельных элементов и модулей	<b>знать:</b> принципы составления расчетных схем и математических моделей мехатронных и робототехнических систем

1	2	3	4	5
	и робототехнических систем, их подсистем и отдельных элементов и модулей	<p><b>уметь:</b> составлять математические модели подсистем и отдельных элементов и модулей</p>	<p><b>уметь:</b> составлять мат. модели мехатронных и робототехнических систем, их подсистем и отдельных элементов и модулей, применять методы математического анализа и моделирования</p>	<p><b>уметь:</b> составлять математические модели, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования</p>
		<p><b>владеть:</b> навыками составления математических моделей подсистем и отдельных элементов и модулей</p>	<p><b>владеть:</b> способностью определять основные характеристики элементов мехатронных и робототехнических систем на основе разработанных моделей.</p>	<p><b>владеть:</b> способностью определять основные характеристики элементов мехатронных и робототехнических систем на основе разработанных моделей; способностью теоретического и экспериментального исследования систем</p>
2	ПК-11 способность производить расчеты и проектирование отдельных устройств и подсистем мехатронных и робототехнических систем	<p><b>знать:</b> принципы расчета простейших типовых элементов мехатронных и робототехнических систем</p>	<p><b>знать:</b> принципы определения способов расчета отдельных устройств и подсистем мехатронных и робототехнических систем</p>	<p><b>знать:</b> современные методы расчета отдельных устройств и подсистем с использованием стандартных средств вычислительной техники</p>
	и подсистем мехатронных и робототехнических систем	<p><b>уметь:</b> производить расчеты и проектирование отдельных устройств и подсистем</p>	<p><b>уметь:</b> производить расчеты и проектирование отдельных устройств и подсистем</p>	<p><b>уметь:</b> определять и применять методы расчета механических систем в при-</p>

1	2	3	4	5
	ских систем с использованием стандартных средств измерительной и вычислительной техники	ств мехатронных и робототехнических систем	ств мехатронных и робототехнических систем с использованием стандартных средств измерительной и вычислительной техники	ложении к конкретным инженерным задачам в профессиональной деятельности
		<b>владеть:</b> навыками расчета простейших типовых элементов мехатронных и робототехнических систем	<b>владеть:</b> способностью производить расчеты простейших типовых элементов мехатронных и робототехнических систем с использованием стандартных средств вычислительной техники	<b>владеть:</b> способностью определять и применять различные способы расчета отдельных устройств и подсистем мехатронных и робототехнических систем с использованием стандартных средств ВТ

В данной работе приведены методические указания по выполнению практической и самостоятельной работы по теме «Расчет валов мехатронных модулей на прочность», входящей в состав модуля «Напряженно-деформированное состояние в точке и теории прочности. Сложное сопротивление» в соответствии с рабочей программой дисциплины «Техническая механика» для студентов направления 15.03.06 Мехатроника и робототехника.

## 1. Основные требования по выполнению и защите расчётно-графических работ

Все расчётно-графические работы выполняются на стандартных листах формата А4, скреплённых в тетрадь. Титульный лист оформляется в соответствии с требованиями ЕСКД. Пример оформления титульного листа приведен на рис. 1.

<b>МИНОБРНАУКИ РОССИИ</b>		
Федеральное государственное образовательное учреждение высшего образования «Юго-Западный государственный университет» (ЮЗГУ)		
<i>Кафедра механики, мехатроники и робототехники</i>		
<b>Расчётно-графическая работа</b> <b><i>Расчёт на прочность валов мехатронных модулей</i></b>		
<i>Вариант 11</i>		
Выполнил:	ст. гр. МТ-41	Иванов А.С.
Проверил:	к.т.н., доц.	Петров Е.Н.
Курск 2016		

Рис. 1. Пример оформления титульного листа

Расчётно-пояснительная записка должна быть достаточно краткой, без лишних подробных пояснений и теоретических выводов, имеющих в учебниках и других учебных пособиях, но не слишком краткой, содержащей одни только формулы и вычисления.

Формулы, приводимые в записке, должны быть, как правило, записаны сначала в общем виде, а затем уже должна быть произведена подстановка исходных данных и выполнены необходимые вычисления. При подстановке исходных данных нужно внимательно следить за соблюдением одинаковой размерности.

Все записи в расчётно-пояснительной записке ведутся чернилами синего или чёрного цвета на одной стороне писчей бумаги чётким разборчивым почерком, с расстоянием между строками 10-12 мм. Более предпочтительным является оформление записки с применением ЭВМ в любом текстовом редакторе (MS Word, Open Office и др.), при этом желательно применение шрифтов 12 или 14 кегля и полуторный интервал между строками.

Изложение текстового материала записки следует вести от первого лица или в безличной форме. Текст всей записки должен быть выдержан в едином стиле.

Графическая часть работы выполняется на бумаге формата А4 карандашом или гелевой ручкой чёрного цвета с применением необходимых чертёжных инструментов. Приветствуется использование компьютерных графических редакторов (Компас, AutoCad, MS Word, Corel Draw и др.).

В соответствии с заданной схемой по числовым данным вычерчивается в масштабе схема элемента конструкции, на которой проставляются исходные данные (размеры), а также наносится заданная нагрузка. Эпюры внутренних усилий (напряжений, деформаций) должны вычерчиваться строго под расчётной схемой (бруса, балки, вала) или рядом с ней. На расчётной схеме должны быть отмечены все сечения, для которых определяются внутренние усилия, на эпюрах обязательно проставляются значения вычисленных характерных ординат.

Каждым студентом все задачи расчётно-графической работы должны выполняться и отдаваться преподавателю на проверку в сроки, предусмотренные графиком работы студентов в текущем семестре. После исправления всех ошибок, отмеченных преподавателем при проверке, каждая задача расчётно-графической работы должна быть защищена.

На защиту студент получает задание на решение задачи по соответствующему разделу курса. Если студент решил задачу, и у преподавателя нет никаких дополнительных замечаний по расчётно-графической работе, то защита считается законченной. В случае если студент при защите не справляется с решением типовых задач, то преподавателем назначается дополнительная защита (не более двух раз).



## 2. Исходные данные и задания для расчета

Для заданной схемы (табл. 2) вала мехатронного модуля вращательного движения требуется:

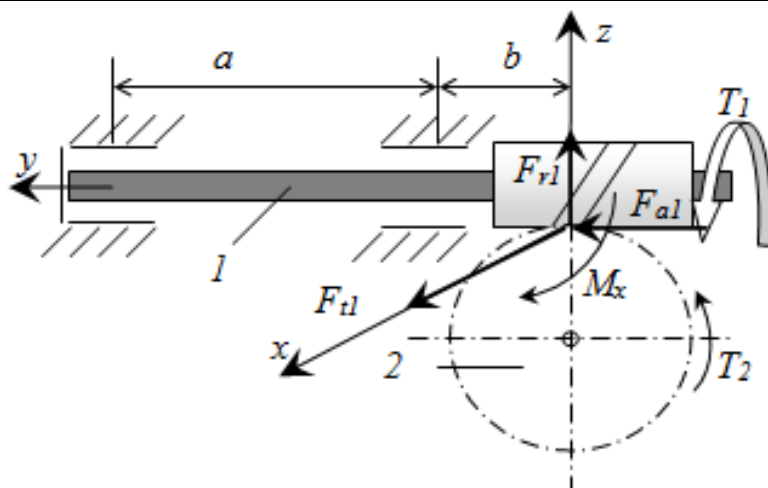
- построить эпюры внутренних силовых факторов (крутящего момента и изгибающих моментов);
- определить положение опасного сечения;
- определить диаметр рассчитываемого вала из условий прочности.

Расчётную схему и исходные данные для расчета необходимо взять из таблицы 2 в соответствии с вариантом.

Таблица 2 - Расчетные схемы валов и исходные данные для расчета вала

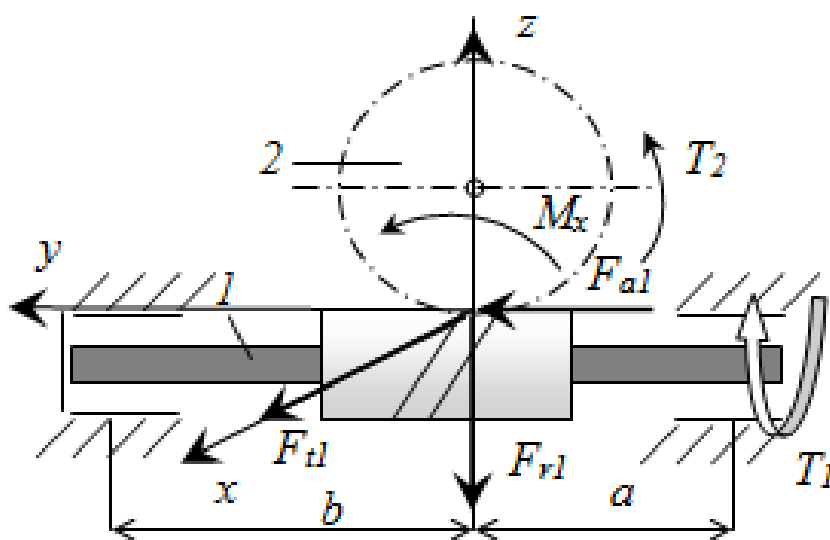
№ варианта	Схема и условие
1	 <p>Червячный вал 1 передает крутящий момент на колесо 2 (<math>T_1 = 1</math> Н·м). Червяк двухзаходный, колесо имеет 50 зубьев. Делительный диаметр червяка <math>d_1 = 20</math> мм. Линейные размеры вала: <math>a = 0,05</math> м; <math>b = 0,03</math> м; Модуль зацепления <math>m = 1</math> мм. При <math>[\sigma]_{экр} = 20</math> МПа определить диаметр вала 1 из расчёта на прочность.</p>

2



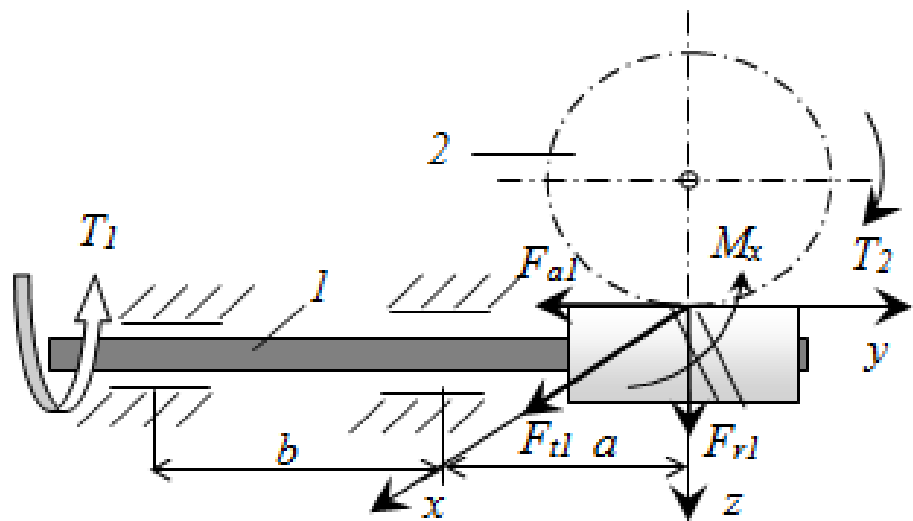
Червячный вал 1 передает крутящий момент на колесо 2 ( $T_1 = 1$  Н·м). Червяк однозаходный, колесо имеет 40 зубьев. Делительный диаметр червяка  $d_1 = 16$  мм. Линейные размеры вала:  $a = 0,1$  м;  $b = 0,05$  м; Модуль зацепления  $m = 1$  мм. При  $[\sigma]_{\text{экв}} = 20$  МПа определить диаметр вала 1 из расчёта на прочность.

3



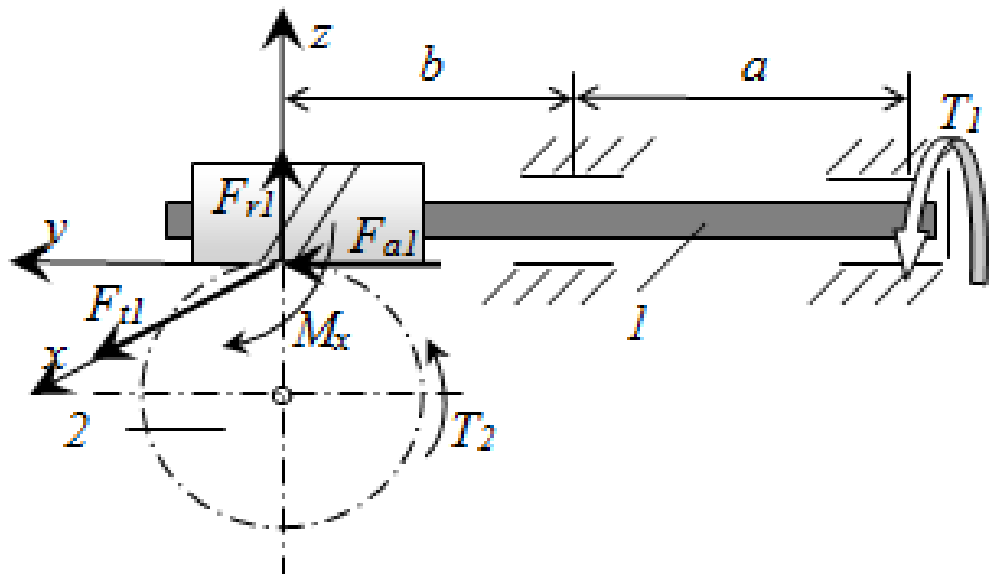
Червячный вал 1 передает крутящий момент на колесо 2 ( $T_1 = 2$  Н·м). Червяк двухзаходный, колесо имеет 60 зубьев. Делительный диаметр червяка  $d_1 = 25$  мм. Линейные размеры вала:  $a = 0,1$  м;  $b = 0,1$  м; Модуль зацепления  $m = 1$  мм. При  $[\sigma]_{\text{экв}} = 20$  МПа определить диаметр вала 1 из расчёта на прочность.

4



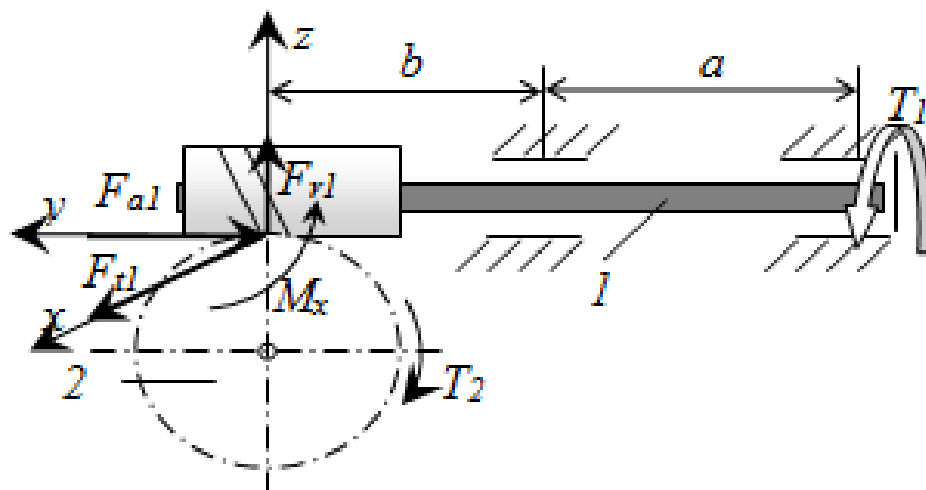
Червячный вал 1 передает крутящий момент на колесо 2 ( $T_1 = 0,5$  Н·м). Червяк однозаходный, колесо имеет 36 зубьев. Делительный диаметр червяка  $d_1 = 20$  мм. Линейные размеры вала:  $a = 0,08$  м;  $b = 0,06$  м; Модуль зацепления  $m=1$  мм. При  $[\sigma]_{\text{экв}} = 20$  МПа определить диаметр вала 1 из расчёта на прочность.

5



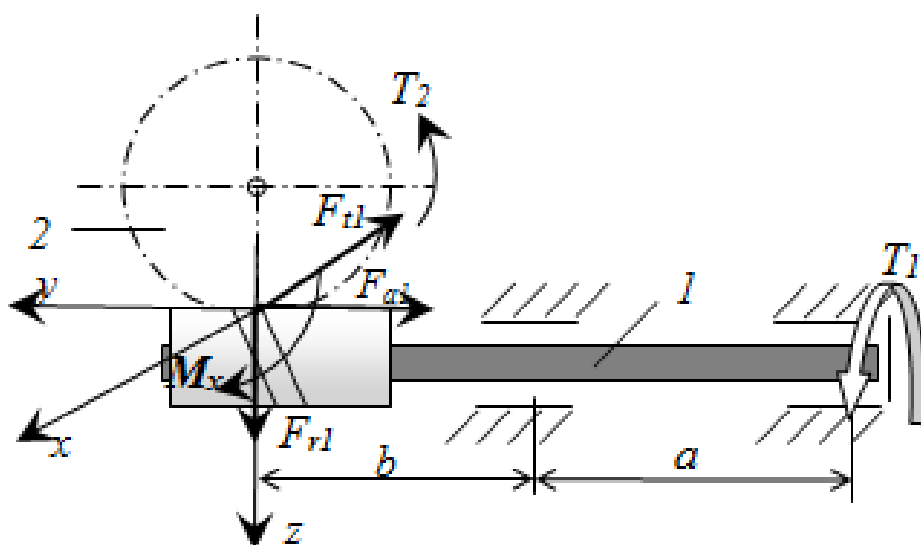
Червячный вал 1 передает крутящий момент на колесо 2 ( $T_1 = 1,5$  Н·м). Червяк однозаходный, колесо имеет 35 зубьев. Делительный диаметр червяка  $d_1 = 21$  мм. Линейные размеры вала:  $a = 0,1$  м;  $b = 0,1$  м; Модуль зацепления  $m=1$  мм. При  $[\sigma]_{\text{экв}} = 20$  МПа определить диаметр вала 1 из расчёта на прочность.

6



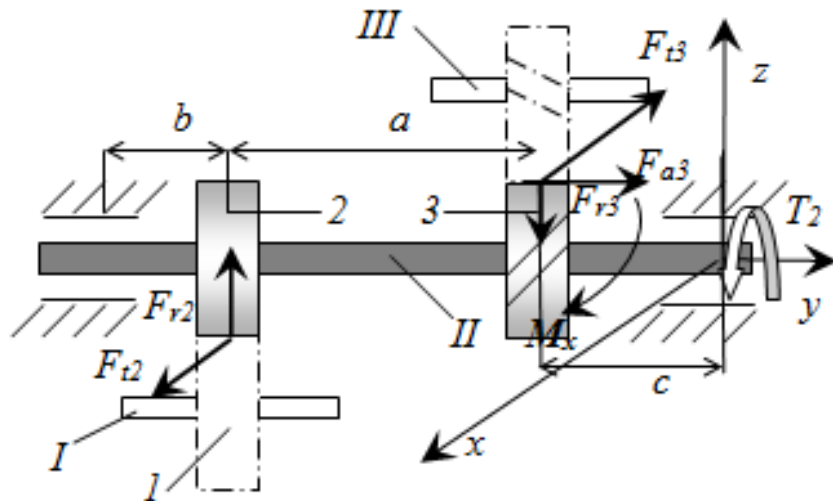
Червячный вал 1 передает крутящий момент на колесо 2 ( $T_1 = 1,2$  Н·м). Червяк двухзаходный, колесо имеет 58 зубьев. Делительный диаметр червяка  $d_1 = 16$  мм. Линейные размеры вала:  $a = 0,1$  м;  $b = 0,06$  м; модуль зацепления  $m = 1$  мм. При  $[\sigma]_{\text{экв}} = 20$  МПа определить диаметр вала 1 из расчёта на прочность.

7



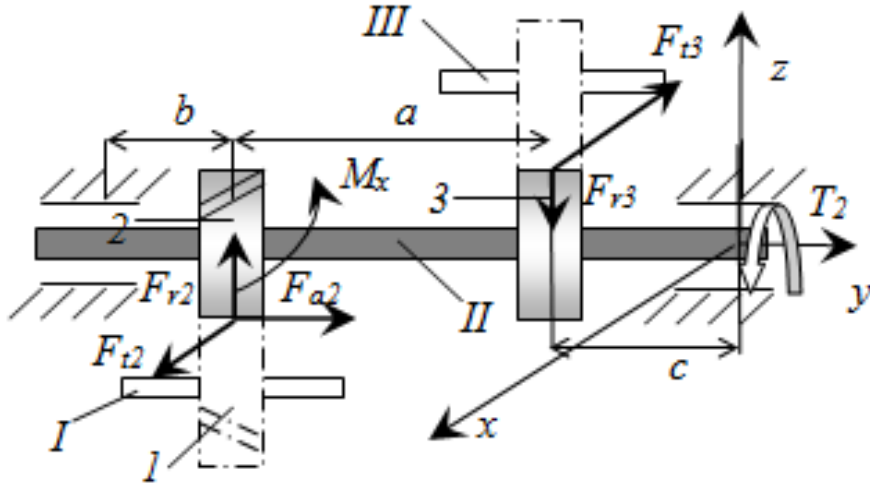
Червячный вал 1 передает крутящий момент на колесо 2 ( $T_1 = 1,4$  Н·м). Червяк однозаходный, колесо имеет 18 зубьев. Делительный диаметр червяка  $d_1 = 21$  мм. Линейные размеры вала:  $a = 0,08$  м;  $b = 0,04$  м; модуль зацепления  $m = 1$  мм. При  $[\sigma]_{\text{экв}} = 20$  МПа определить диаметр вала 1 из расчёта на прочность.

8



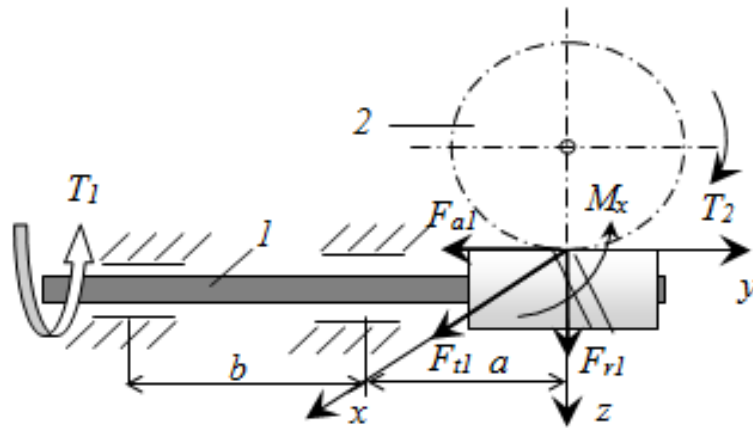
Рассматриваемый вал II получает крутящий момент от вала I ( $T_2 = 0,2 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ) посредством прямозубой передачи и передаёт его на вал III с помощью косозубой передачи (угол наклона зубьев  $\beta = 12^\circ$ ). Модуль всех колёс одинаков и равен  $m = m_n = 0,5 \text{ мм}$ , числа зубьев колёс:  $z_1 = 30$ ,  $z_2 = 60$ ,  $z_3 = 50$ .  $a = 0,08 \text{ м}$ ;  $b = c = 0,04 \text{ м}$ . При  $[\sigma]_{\text{экв}} = 20 \text{ МПа}$  определить диаметр вала из расчёта на прочность.

9



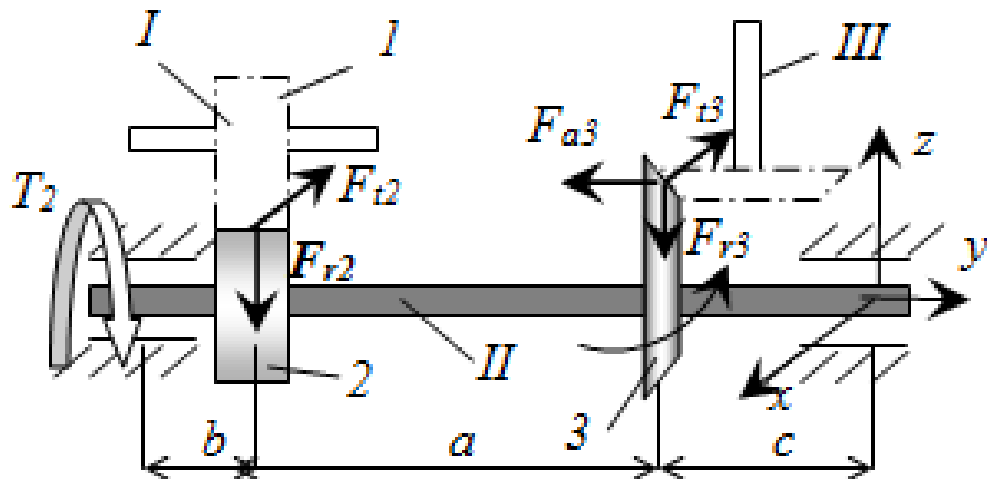
Рассматриваемый вал II получает крутящий момент от вала I ( $T_2 = 0,3 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ) посредством косозубой передачи (угол наклона зубьев  $\beta = 12^\circ$ ) и передаёт его на вал III с помощью прямозубой передачи. Модуль всех колёс одинаков и равен  $m = m_n = 1 \text{ мм}$ , числа зубьев колёс:  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 60$ ,  $z_3 = 50$ . Линейные размеры вала:  $a = 0,2 \text{ м}$ ;  $b = c = 0,1 \text{ м}$ . При  $[\sigma]_{\text{экв}} = 20 \text{ МПа}$  определить диаметр вала II из расчёта на прочность.

10



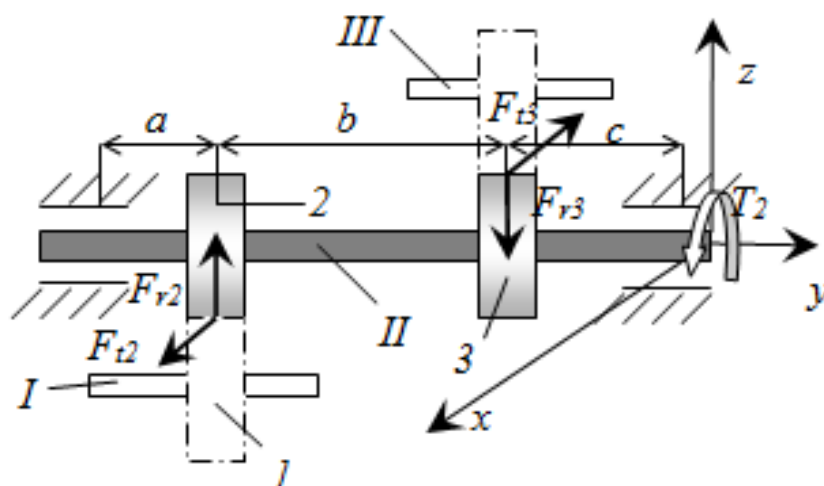
Червячный вал 1 передает крутящий момент на колесо 2 ( $T_1 = 0,7$  Н·м). Червяк двухзаходный, колесо имеет 46 зубьев. Делительный диаметр червяка  $d_1 = 20$  мм. Линейные размеры вала:  $a = 0,04$  м;  $b = 0,5$  м; Модуль зацепления  $m = 1$  мм. При  $[\sigma]_{\text{экв}} = 20$  МПа определить диаметр вала 1 из расчёта на прочность.

11



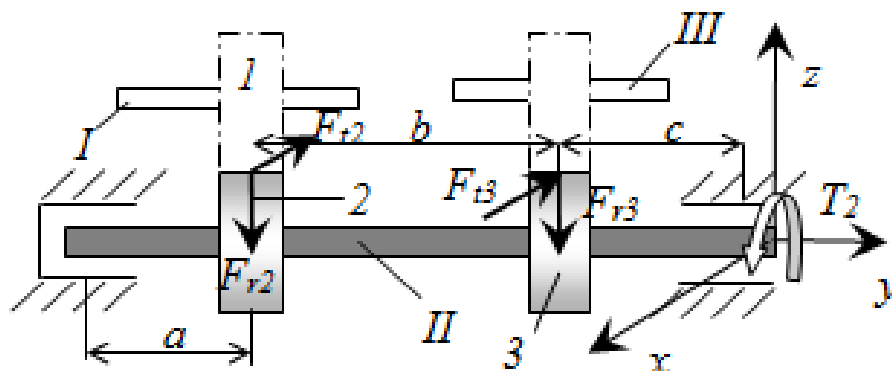
Рассматриваемый вал II передаёт крутящий момент  $T_2 = 0,8$  Н·м на вал III с помощью конической прямозубой передачи. Модуль всех колёс одинаков и равен  $m = m_m = 1,5$  мм, числа зубьев колёс:  $z_1 = 25$ ,  $z_2 = 40$ ,  $z_3 = 30$ .  $a = 0,2$  м;  $b = 0,05$  м;  $c = 0,1$  м. При  $[\sigma]_{\text{экв}} = 20$  МПа определить диаметр вала II из расчёта на прочность.

12



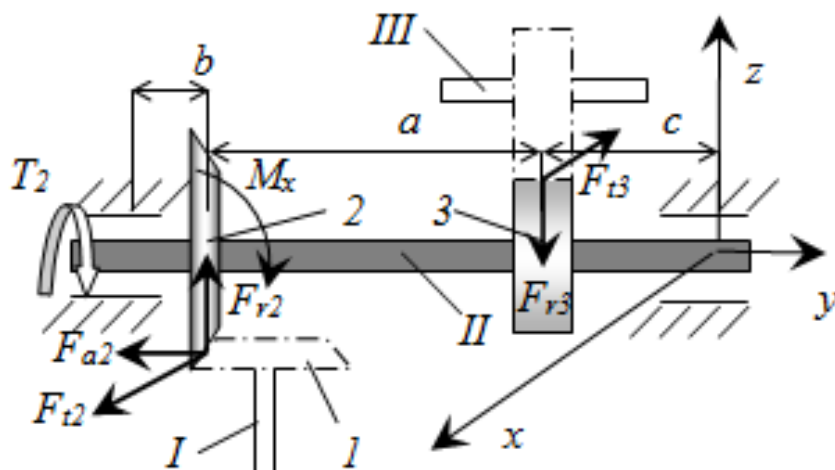
Рассматриваемый вал II передает крутящий момент  $T_2 = 0.8 \text{ Н}\cdot\text{м}$  на вал III с помощью прямозубой передачи. Модуль всех колёс одинаков и равен  $m = 0.4 \text{ мм}$ , числа зубьев колёс:  $z_1 = 60$ ,  $z_2 = 90$ ,  $z_3 = 75$ .  $a = 0,05 \text{ м}$ ;  $b = c = 0,07 \text{ м}$ . При  $[\sigma]_{\text{экв}} = 20 \text{ МПа}$  определить диаметр вала II из расчёта на прочность.

13



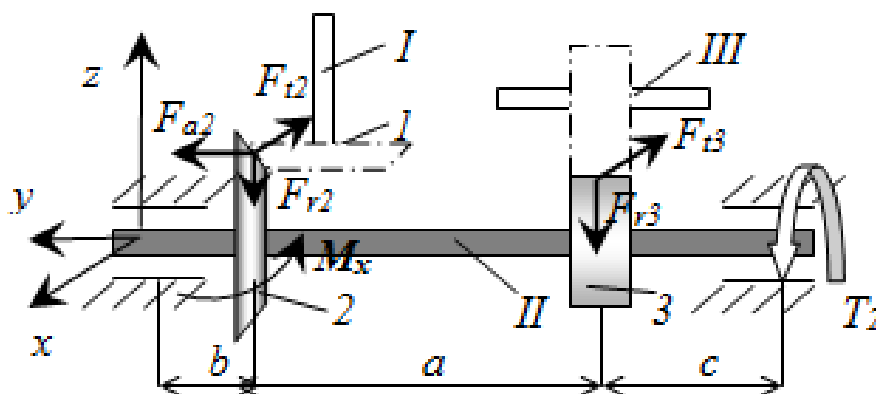
Рассматриваемый вал II получает крутящий момент от вала I ( $T_2 = 0.5 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ) посредством прямозубой передачи и передаёт его на вал III с помощью также прямозубой передачи. Модуль всех колёс одинаков и равен  $m = 0.5 \text{ мм}$ , числа зубьев колёс:  $z_1 = 50$ ,  $z_2 = 100$ ,  $z_3 = 80$ .  $a = 0,06 \text{ м}$   $b = c = 0,07 \text{ м}$ . При  $[\sigma]_{\text{экв}} = 20 \text{ МПа}$  определить диаметр вала II из расчёта на прочность.

14



Рассматриваемый вал II получает крутящий момент от вала I ( $T_2 = 4 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ) посредством конической прямозубой передачи и передаёт его на вал III с помощью прямозубой цилиндрической передачи. Модуль всех колёс одинаков и равен  $m = m_m = 1,5 \text{ мм}$ , числа зубьев колёс:  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 30$ ,  $z_3 = 20$ .  $a = 0,15 \text{ м}$ ;  $b = 0,05 \text{ м}$ ;  $c = 0,08 \text{ м}$ . При  $[\sigma]_{\text{экв}} = 20 \text{ МПа}$  определить диаметр вала II из расчёта на прочность.

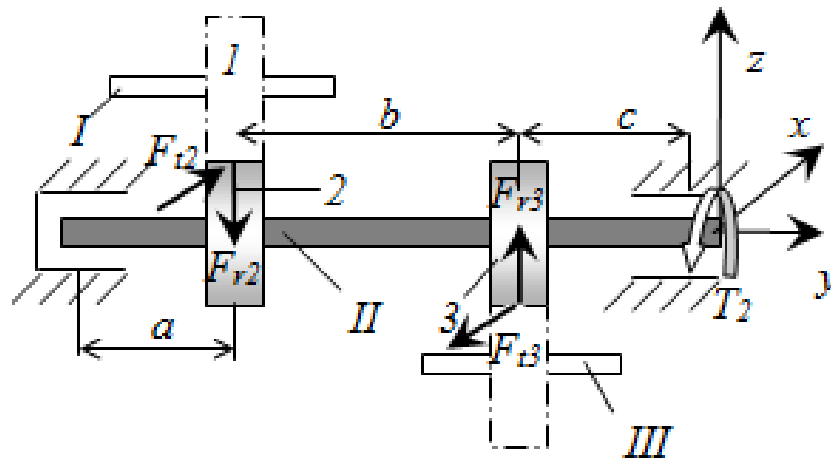
15



Рассматриваемый вал II получает крутящий момент от вала I ( $T_2 = 3 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ) посредством конической прямозубой передачи и передаёт его на вал III с помощью прямозубой цилиндрической передачи. Модуль всех колёс одинаков и равен  $m = m_m = 1 \text{ мм}$ , числа зубьев колёс:  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 50$ ,  $z_3 = 40$ .  $a = 0,1 \text{ м}$ ;  $b = 0,03 \text{ м}$ ;  $c = 0,05 \text{ м}$ . При  $[\sigma]_{\text{экв}} = 20 \text{ МПа}$  определить диаметр вала II из расчёта на прочность.

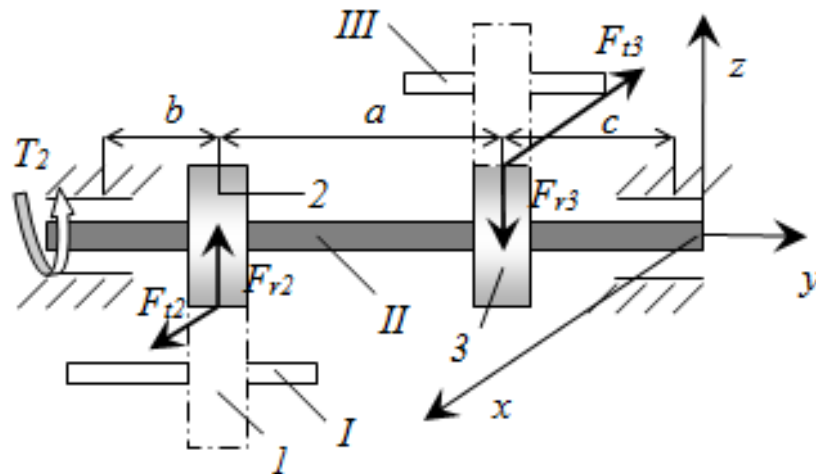


16



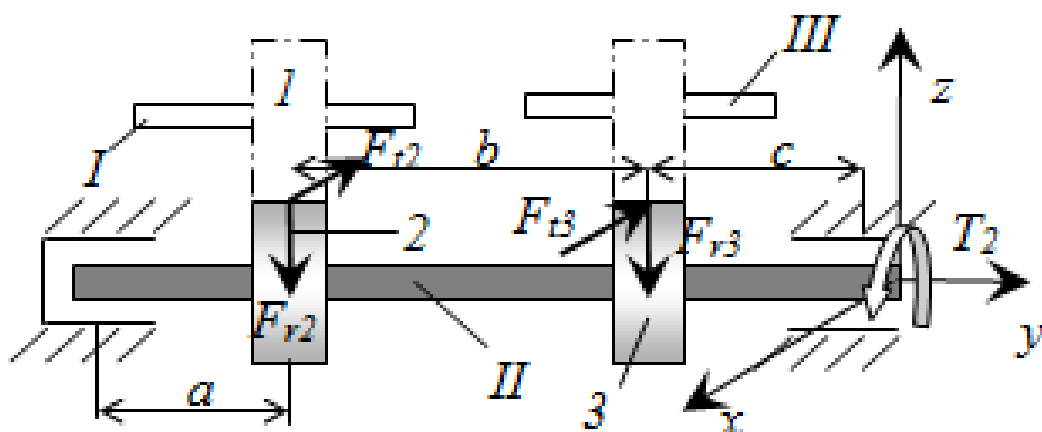
Рассматриваемый вал II получает крутящий момент от вала I ( $T_2 = 0.8 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ) посредством прямозубой передачи и передаёт его на вал III с помощью также прямозубой передачи. Модуль всех колёс одинаков и равен  $m = 0.6 \text{ мм}$ , числа зубьев колёс:  $z_1 = 40$ ,  $z_2 = 100$ ,  $z_3 = 80$ .  $a = 0.05 \text{ м}$ ;  $b = c = 0.06 \text{ м}$  При  $[\sigma]_{\text{экв}} = 20 \text{ МПа}$  определить диаметр вала II из расчёта на прочность.

17



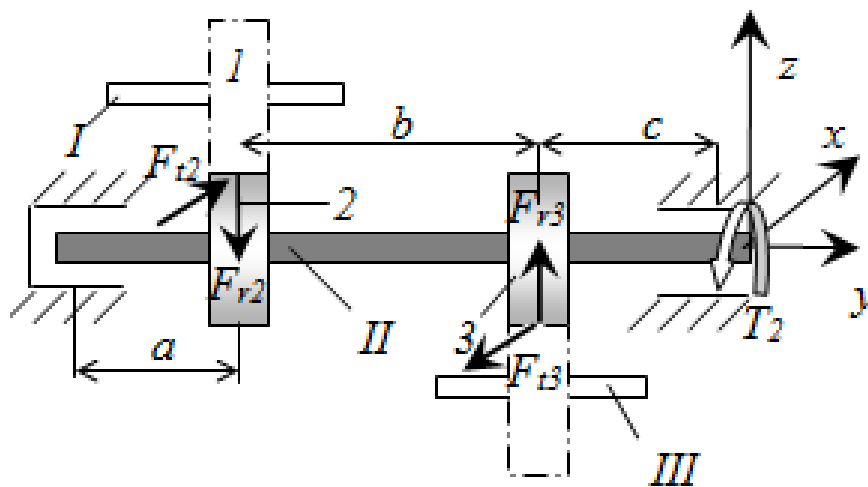
Рассматриваемый вал II получает крутящий момент от вала I ( $T_2 = 1 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ) посредством прямозубой передачи и передаёт его на вал III с помощью также прямозубой передачи. Модуль всех колёс одинаков и равен  $m = 0.5 \text{ мм}$ , числа зубьев колёс:  $z_1 = 40$ ,  $z_2 = 60$ ,  $z_3 = 40$ .  $a = 0.1 \text{ м}$ ;  $b = c = 0.05 \text{ м}$  При  $[\sigma]_{\text{экв}} = 20 \text{ МПа}$  определить диаметр вала II из расчёта на прочность.

18



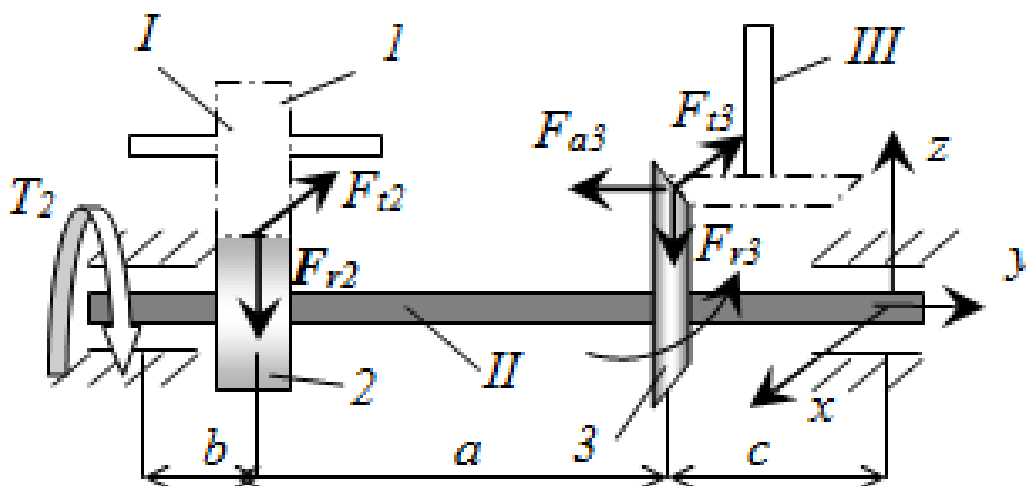
Рассматриваемый вал II получает крутящий момент от вала I ( $T_2 = 0.2 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ) посредством прямозубой передачи и передаёт его на вал III с помощью также прямозубой передачи. Модуль всех колёс одинаков и равен  $m = 0.6 \text{ мм}$ , числа зубьев колёс:  $z_1 = 60$ ,  $z_2 = 90$ ,  $z_3 = 120$ .  $a = 0.06 \text{ м}$ ;  $b = c = 0.05 \text{ м}$  При  $[\sigma]_{\text{экв}} = 20 \text{ МПа}$  определить диаметр вала II из расчёта на прочность.

19



Рассматриваемый вал II получает крутящий момент от вала I ( $T_2 = 1 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ) посредством прямозубой передачи и передаёт его на вал III с помощью также прямозубой передачи. Модуль всех колёс одинаков и равен  $m = 0.5 \text{ мм}$ , числа зубьев колёс:  $z_1 = 40$ ,  $z_2 = 100$ ,  $z_3 = 80$ .  $a = 0.04 \text{ м}$ ;  $b = c = 0.05 \text{ м}$  При  $[\sigma]_{\text{экв}} = 20 \text{ МПа}$  определить диаметр вала II из расчёта на прочность.

20



Рассматриваемый вал II передаёт крутящий момент  $T_2 = 0,4 \text{ Н}\cdot\text{м}$  на вал III с помощью конической прямозубой передачи. Модуль всех колёс одинаков и равен  $m = m_m = 1 \text{ мм}$ , числа зубьев колёс:  $z_1 = 24$ ,  $z_2 = 36$ ,  $z_3 = 30$ .  $a = 0,1 \text{ м}$ ;  $b = 0,05 \text{ м}$ ;  $c = 0,05 \text{ м}$ . При  $[\sigma]_{\text{экв}} = 20 \text{ МПа}$  определить диаметр вала II из расчёта на прочность.

### 3. Общие теоретические сведения

#### 3.1 Основы расчета валов на прочность

Валы предназначены для размещения вращающихся деталей в мехатронных модулях и механизмах роботов. Валы передают также вращающий момент и работают в условиях кручения, изгиба и растяжения. В основном валы делают ступенчатыми. Такая форма осей и валов удобна для монтажа на них вращающихся деталей.

Основными критериями работоспособности валов и осей являются прочность, жесткость и антирезонансные свойства. Для расчета валов необходимо составить расчетную схему. При этом валы и оси рассматриваются как балки на шарнирных опорах, роль которых выполняют подшипники. Весами валов или осей, а также деталей, установленных на них пренебрегают. Трение в опорах также не учитывается. Реакции в опорах прикладываются в середине ширины подшипников. Распределенные силы, действующие на детали, сидящие на валу, заменяются сосредоточенными, которые приложены в середине ширины деталей.

После составления расчетной схемы вала, определяются все действующие на вал силы, в т.ч. силы в зацеплениях зубчатых колес и других тел вращения, насаженных на вал – они считаются приложенными к продольной оси вала-, а также реакции опор. После этого находятся крутящие и изгибающие моменты по длине вала.

Проверочный расчет на прочность выполняется с учетом одновременного действия изгибающего и крутящего моментов.

На основании четвертой теории прочности можно записать [2-6]:

$$\sigma_{\text{эк}} = \sqrt{\sigma_u^2 + 3\tau_k^2} \leq [\sigma_u],$$

где  $\sigma_{\text{экв}}$  - эквивалентное напряжение, зависящее от материала вала;  $\sigma_u$  и  $\tau_k$  - соответственно наибольшие напряжения в точке вала от изгиба – моментом  $M_u$  и кручения - моментом  $T$ .

Так как

$$\sigma_u = \frac{M_u}{W_u}; \quad \tau_k = \frac{T}{W_k}; \quad W_k = 2W_u,$$

то можно записать

$$\sigma_{\text{эк}} = \frac{10}{d^3} \sqrt{M_u^2 + 0,75T^2}$$

откуда диаметр вала

$$d = \sqrt[3]{\frac{10\sqrt{M_u^2 + 0,75T^2}}{[\sigma_{\text{эк}}]}}, \quad (1)$$

По третьей теории прочности :

$$\sigma_{\text{эк}} = \sqrt{\sigma_{\text{и}}^2 + 4\tau_k^2} \leq [\sigma_{\text{и}}],$$

условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sqrt{M_Y^2 + T^2}}{W} \leq [\sigma],$$

откуда диаметр вала

$$d = \sqrt[3]{\frac{10\sqrt{M_u^2 + T^2}}{[\sigma_{\text{эк}}]}} \quad (2)$$

Опасное сечение находят после построения эпюр изгибающих и крутящих моментов. При этом силы, действующие на вал в разных

плоскостях, раскладывают по двум взаимно перпендикулярным плоскостям и строят эпюры моментов. Затем производится геометрическое суммирование изгибающих моментов.

Более подробно с основными принципами расчета валов на прочность можно ознакомиться в соответствующей литературе [2-9].

### 3.2 Исходные формулы для расчета сил в зацеплении зубчатых колес

Схема сил в зацеплении прямозубых колёс показана на рис. 2.

Возникающую в точке контакта зубьев силу нормального давления, как правило, раскладывают на две составляющие:

$$F_{t1} = F_{t2} = \frac{2T_1}{d_1} = \frac{2T_2}{d_2};$$

$$F_{r1} = F_{r2} = F_{t1} \cdot \operatorname{tg} \alpha = F_{t2} \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (3)$$

$$d_1 = mz_1$$

$$d_2 = mz_2$$

где  $d_1, d_2$  – делительные диаметры колёс;  $m$  – модуль зацепления;  $z_1, z_2$  – числа зубьев колёс;  $\alpha = 20^\circ$  – профильный угол.

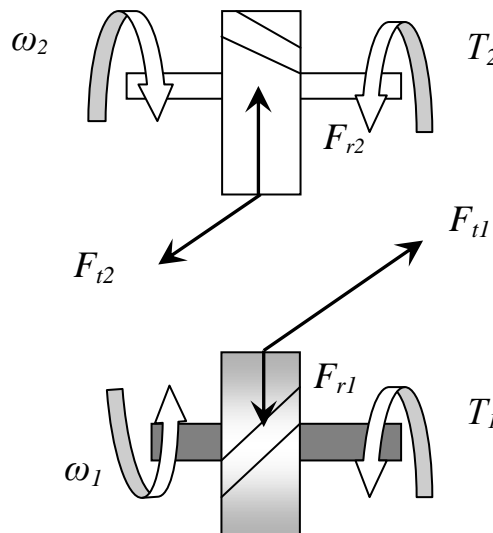


Рис. 2 Схема сил в зацеплении прямозубых колёс:

$\omega_1, \omega_2$  – угловая скорость колес;  $T_1, T_2$  – крутящий момент на валах колес;  $F_{t1}, F_{t2}, F_{r1}, F_{r2}$  – соответственно окружные и радиальные силы, действующие на колёса

Схема сил в зацеплении косозубых колёс показана на рис. 3.

Возникающую в точке контакта зубьев силу нормального давления, как правило, раскладывают на три составляющие:

$$\begin{aligned}
 F_{t1} = F_{t2} &= \frac{2T_1}{d_1} = \frac{2T_2}{d_2}; \\
 F_{r1} = F_{r2} &= \frac{F_{t1} \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta} \\
 F_{a1} = F_{a2} &= F_{t1} \cdot \operatorname{tg} \beta \\
 d_1 &= mz_1 \\
 d_2 &= mz_2
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

где  $d_1, d_2$  – делительные диаметры колёс;  $m$  – модуль зацепления;  $z_1, z_2$  – числа зубьев колёс;  $\alpha = 20^\circ$  – профильный угол;  $\beta$  – угол наклона линии зуба.

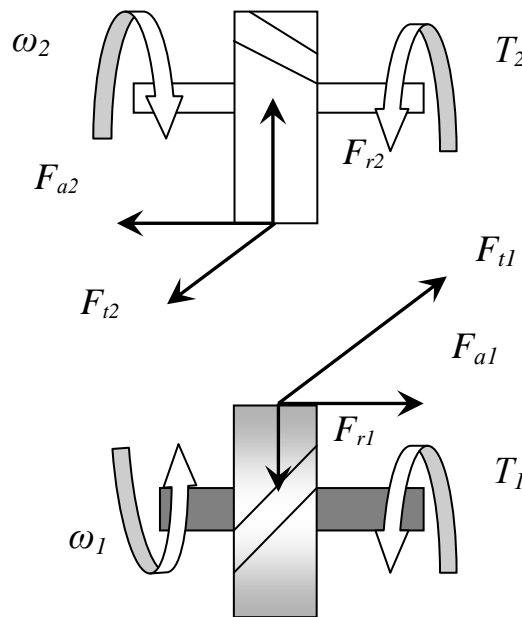


Рис. 3. Схема сил в зацеплении косозубых колёс:

$\omega_1, \omega_2$  – угловая скорость колёс;  $T_1, T_2$  – крутящий момент на валах колёс;  $F_{t1}, F_{t2}, F_{r1}, F_{r2}, F_{a1}, F_{a2}$  – соответственно окружные, радиальные и осевые силы, действующие на колёса

На каждое колесо также действует возникающий в точке зацепления сосредоточенный изгибающий момент (вокруг поперечной оси колеса) от осевой силы:

$$M_x = F_{a1} \cdot \frac{d_1}{2}
 \tag{5}$$

Схема сил в зацеплении прямозубых конических колёс показана на рис. 4.

Силы в зубчатом зацеплении конических колёс определяют по формулам:

$$\begin{aligned}
 F_{t1} = F_{t2} &= \frac{2T_1}{d_{m1}}; \\
 F_{r1} = F_{a2} &= F_{t1} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cos \delta \\
 F_{a1} = F_{r2} &= F_{t1} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cos \delta_2 = F_{t1} \cdot \operatorname{tg} \alpha \sin \delta
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

$$d_{m1} = m_m z_1$$

$$d_{m2} = m_m z_2$$

где  $d_{m1}$ ,  $d_{m2}$  – средние делительные диаметры колёс;  $m_m$  – средний модуль зацепления;  $z_1$ ,  $z_2$  – числа зубьев колёс;  $\alpha = 20^\circ$  – профильный угол;  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  – угол делительного конуса колеса;  $\delta_1 + \delta_2 = 90^\circ$ ;

$$\delta = \operatorname{arctg} \left( \frac{z_2}{z_1} \right)$$

$$\delta_2 = \operatorname{arctg} \left( \frac{z_2}{z_1} \right)$$

(7)

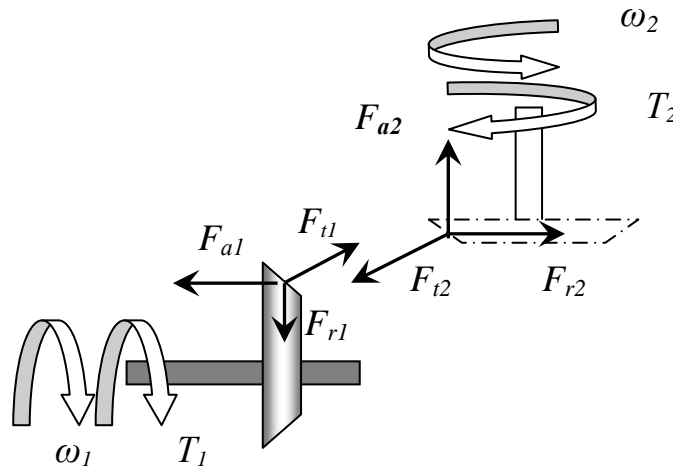


Рис. 4. Схема сил в зацеплении косозубых колёс:

$\omega_1$ ,  $\omega_2$  – угловая скорость колес;  $T_1$ ,  $T_2$  – крутящий момент на валах колес;  $F_{t1}$ ,  $F_{t2}$ ,  $F_{r1}$ ,  $F_{r2}$ ,  $F_{a1}$ ,  $F_{a2}$  – соответственно окружные, радиальные и осевые силы, действующие на колёса

Схема сил в червячном зацеплении приведена на рис. 5.

Окружная сила  $F_{t1}$  на червяке равна осевой силе  $F_{a2}$  на колесе, и наоборот, то есть:

$$F_{t1} = F_{a2} = \frac{2T_1}{d_1};$$

$$F_{t2} = F_{a1} = \frac{2T_2}{d_2},$$
(8)

где  $d_1, d_2$  – делительный диаметр червяка и колеса соответственно.

Радиальная сила:

$$F_{r1} = F_{r2} = F_r = \frac{F_{t2} \operatorname{tg} \alpha}{\cos \gamma}.$$
(9)

$$\operatorname{tg} \gamma = z_1 m / d_1$$

где  $\alpha$  – угол зацепления;

$\gamma$  – угол подъема винтовой линии;

$z_1$  – число заходов червяка;

$m$  – модуль зацепления.

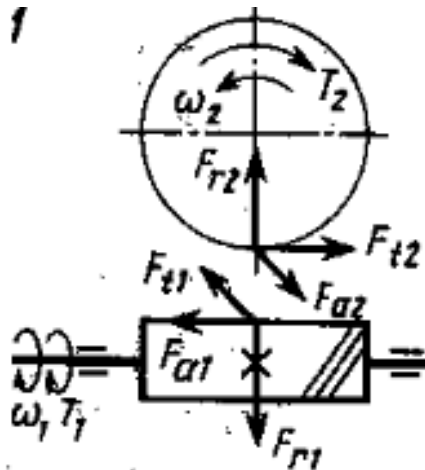


Рис. 5. Схема сил в червячном зацеплении:

$\omega_1, \omega_2$  – угловая скорость червяка и колеса соответственно;  $T_1, T_2$  – крутящий момент на червяке и колесе;  $F_{t1}, F_{r1}, F_{a1}$  – соответственно окружная, радиальная и осевая сила, действующие на червяк;  $F_{t2}, F_{r2}, F_{a2}$  – соответственно окружная, радиальная и осевая сила, действующие на червячное колесо

На червяк также действует возникающий в точке зацепления червяка и колеса сосредоточенный изгибающий момент (вокруг поперечной оси червяка) от осевой силы:

$$M_x = F_{a1} \cdot \frac{d_1}{2}$$
(10)



#### 4. Пример расчета вала мехатронного модуля на прочность

Рассматриваемый вал *II* (рис. 6) передаёт крутящий момент  $T_2 = 0,5 \text{ Н}\cdot\text{м}$  на вал *III* с помощью конической прямозубой передачи. Модуль всех колёс одинаков и равен  $m = m_m = 1 \text{ мм}$ , числа зубьев колёс:  $z_1 = 60$ ,  $z_2 = 40$ ,  $z_3 = 30$ .  $a = 0,2 \text{ м}$ ;  $b = c = 0,1 \text{ м}$ .

При допускаяемом эквивалентном напряжении  $[\sigma]_{\text{экв}} = 20 \text{ МПа}$  определить диаметр вала *II* из расчёта на прочность.

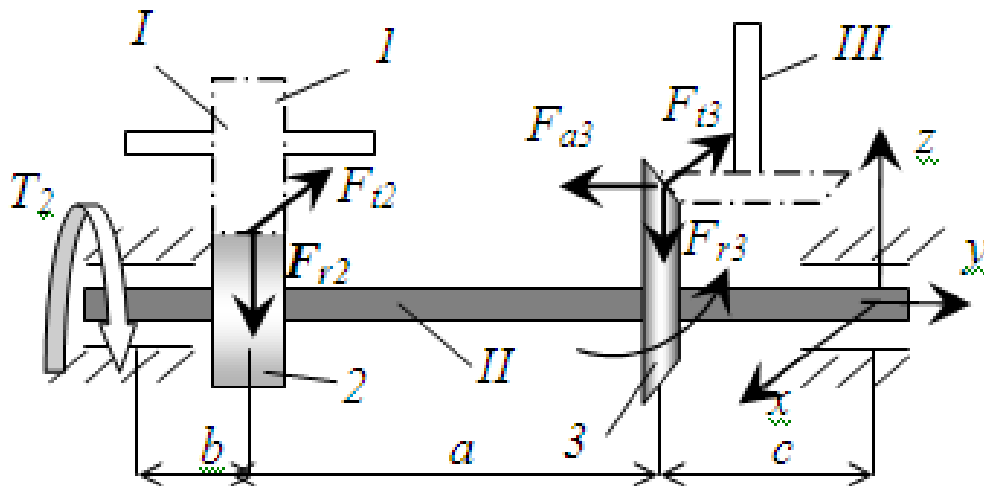


Рис. 6. Расчетная схема вала

Решение.

1) Проведем расчет сил  $F_{t2}$ ,  $F_{r2}$ ,  $F_{t3}$ ,  $F_{r3}$ ,  $F_{a3}$ , действующих на колеса, и других геометрических параметров:

делительные диаметры колес:

$$d_{m3} = m_m z_3 = 30 \text{ мм}$$

$$d_2 = m_2 z_2 = 40 \text{ мм}$$

окружная сила  $F_{t2} = \frac{2T_2}{d_2} = \frac{2 \cdot 0,5}{0,04} = 25 \text{ Н}$

угол конуса шестерни 3 определим по формуле (7):

$$\delta_3 = \arctg\left(\frac{60}{30}\right) = 27^\circ$$

радиальная сила на колесе 2:

$$F_{r2} = F_{t2} \operatorname{tg} \alpha = 25 \operatorname{tg} 20^\circ = 9,1 \text{ Н}$$

окружная сила на колесе 3:

$$F_{t3} = \frac{2T_2}{d_{m3}} = \frac{2 \cdot 0,5}{0,03} = 33,3 \text{ Н}$$

радиальная сила на колесе 2:

$$F_{r3} = F_{t3} \operatorname{tg} \alpha \cos \delta_3 = 33,3 \times \operatorname{tg} 20^\circ \times \cos 27^\circ = 10,6 \text{ Н}$$

осевая сила на колесе 3:

$$F_{a3} = F_{t3} \tan \alpha \sin \beta_1 = 5,5 \text{ Н}$$

сосредоточенный изгибающий момент относительно оси  $x$ , действующий на колесо 3:

$$M_{3x} = \frac{F_{a3} m Z_3}{2} = \frac{5,5 \times 0,001 \times 30}{2} = 0,08 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Рассматриваемый вал находится под действием различных по характеру силовых факторов, т.е. в его поперечных сечениях возникает сложное сопротивление. В данном случае на вал действуют одновременно: осевая сила, крутящий момент, поперечные силы и изгибающие моменты в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, т.е. имеет место кривой изгиб с растяжением и кручением.

В соответствии с принципом независимости действия сил (гипотеза о суперпозиции) можно рассмотреть отдельно действие перечисленных силовых факторов, по совокупности их действия определить местоположение опасных сечений, после чего по 3-й или 4-й теории прочности определить эквивалентное напряжение.

Построим эпюры основных силовых факторов, рассмотрев по отдельности разные виды нагрузок.

## 2) Кручение.

Расчетная схема вала на кручение и эпюра крутящего момента показаны на рис. 7

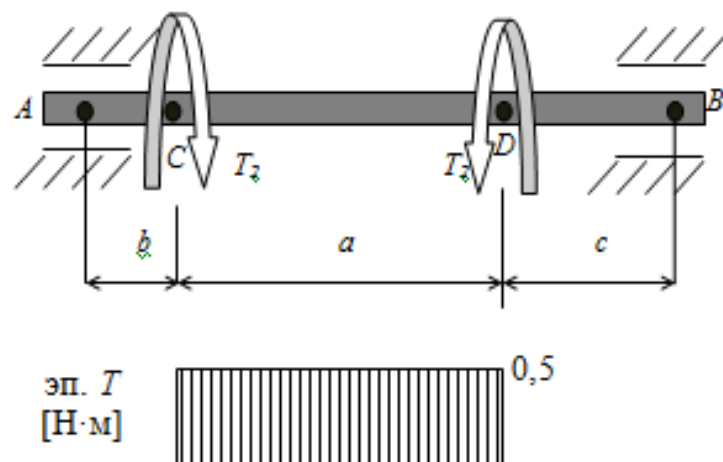


Рис. 7. Расчетная схема вала на кручение и эпюра крутящего момента

## 3) Изгиб в горизонтальной плоскости

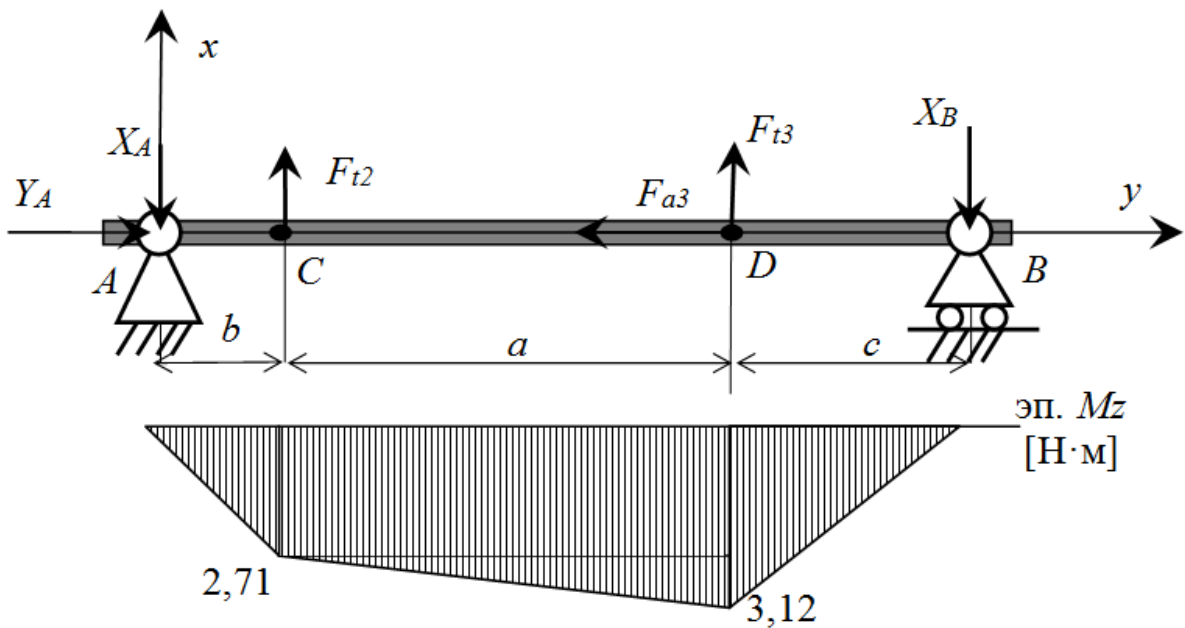


Рис. 8. Расчетная схема вала на изгиб в горизонтальной плоскости и эпюра изгибающего момента

Представим вал в виде двухопорной балки, одна из опор шарнирно-неподвижная (т.  $A$ ), вторая – шарнирно-подвижная (т.  $B$ ) (рис. 8).

Определим реакции связей для данной схемы [2,3,7]:

$$\sum F_y = 0$$

$$Y_A = F_{a3} = 5,5 \text{ Н}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$F_{t2}b + F_{t3}(b + a) = X_B(a + b + c)$$

откуда

$$X_B = 31,2 \text{ Н}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$X_A(a + b + c) = F_{t2}(a + c) + F_{t3}c$$

откуда

$$X_A = 27,1 \text{ Н}$$

Далее строим эпюру изгибающего момента  $M_z$  относительно оси  $z$  (см. рис. 8).

## 4) Изгиб в вертикальной плоскости

Опять представим вал в виде двухопорной балки, одна из опор шарнирно-неподвижная (т.  $A$ ), вторая – шарнирно-подвижная (т.  $B$ ) (рис. 9).

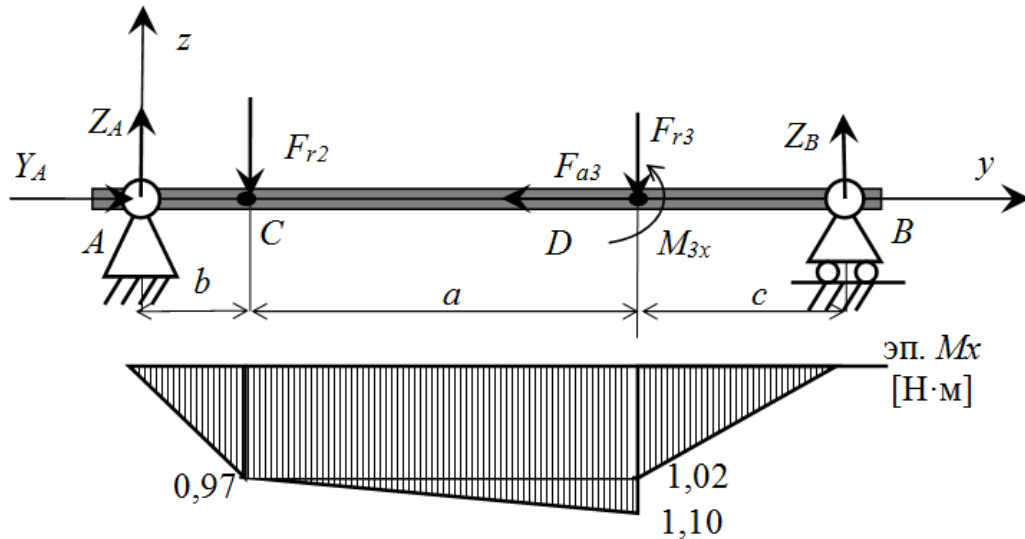


Рис. 9. Расчетная схема вала на изгиб в вертикальной плоскости и эпюра изгибающего момента

Определим реакции связей для данной схемы:

$$\sum F_y = 0$$

$$Y_A = F_{a3} = 5,5 \text{ Н} - \text{ранее уже определена}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$F_{r2}b + F_{r3}(a + b) - M_{3x} = Z_B(a + b + c)$$

откуда

$$Z_A = 10,2 \text{ Н}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$F_{r3}c + F_{r2}(a + c) + M_{3x} = Z_A(a + b + c)$$

откуда

$$Z_A = 9,7 \text{ Н}$$

Далее строим эпюру изгибающего момента  $M_x$  относительно оси  $x$  (см. рис. 9).

уч.  $AC$ :  $0 \leq y_1 \leq b$

$$M_x = Z_A y_1$$

$$\begin{aligned} & \text{при } y_1 = 0 \quad M_x = 0 \\ & \text{при } y_1 = b \quad M_x = 9,7 \times 0,1 = 0,97 \text{ Н} \cdot \text{м} \\ \text{уч. CD: } & b \leq y_2 \leq a + b \\ & M_x = Z_A y_2 - F_{r2}(y_2 - b) \\ & \text{при } y_2 = a + b \quad M_x = 1,10 \text{ Н} \cdot \text{м} \\ \text{уч. BD: } & 0 \leq y_3 \leq c \\ & M_x = Z_B y_3 \quad y_3 = 0 \quad M_x = 0 \\ & \text{при } y_3 = 0 \quad M_x = 0 \\ & \text{при } y_3 = c \quad M_x = 10,2 \times 0,1 = 1,02 \text{ Н} \cdot \text{м} \end{aligned}$$

5) Определяем диаметра вала для опасного сечения.

Из анализа эпюр крутящего и изгибающих моментов следует, что опасным сечением является точка  $D$ , для которой характерны максимальные значения моментов по всем трем эпюрам.

Определим суммарный изгибающий момент в опасном сечении:

$$M_{\Sigma D} = \sqrt{(M_{ZD}^2 + M_{XD}^2)} = \sqrt{(3,12^2 + 1,1^2)} = 3,31 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Далее определим эквивалентный момент в опасном сечении по третьей теории прочности:

$$M_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{(M_{\Sigma D}^2 + T^2)} = \sqrt{(3,31^2 + 0,5^2)} = 3,35 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Тогда диаметр вала в опасном сечении из условия прочности (2):

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{ЭКВ}}}{0,1 \times [\sigma]_{\text{ЭКВ}}}} = \sqrt[3]{\frac{3,35}{0,1 \times 20 \cdot 10^6}} = 0,0149 \text{ м}$$

Округлив, примем

$$d = 15 \text{ мм}$$

### Контрольные вопросы

1. Что такое вал и для чего он предназначен?
2. Как определяются внешние силы, действующие на вал мехатронного модуля?
3. Какой характер напряженно-деформированного состояния испытывает вал?
4. Как строятся эпюры крутящих и изгибающих моментов?
5. Условие прочности вала и определение его диаметра.

### Библиографический список

1. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 15.03.06 Мехатроника и робототехника (уровень бакалавриата), утв. приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 12.03.2015 г. № 206; 2015. – 23 с.
2. Яцун, С.Ф. Кинематика, динамика и прочность машин, приборов и аппаратуры : учебное пособие [Текст]: С.Ф. Яцун, В.Я. Мищенко, Е.Н. Политов – М : Альфа-М : ИНФРА-М, 2015.-208с.
3. Яцун, С.Ф. Механика [Текст]: учебное пособие для студентов вузов: в 2 ч./ Ч.1 / С.Ф. Яцун, В.Я. Мищенко. – Курск: КГТУ, 2004.-140с.
4. Яцун С. Ф. Механика: Учебник для студентов вузов: В 2 ч. Ч. 2 / С. Ф. Яцун, В. Я. Мищенко. - Курск: КГТУ, 2004. - 140 с.
5. Дарков, А.В. Сопротивление материалов [Текст]: учебное пособие / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро; М.: Высшая школа, 1989. 626 с.
6. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов [Текст]: учебное пособие / В.И. Феодосьев; МГТУ им. Баумана, М., 1999. 592 с.

7. Локтионова О. Г. Лекции по теоретической механике [Текст] : учебное пособие : [для студентов инженерно-технических специальностей всех форм обучения] / О. Г. Локтионова, С. Ф. Яцун, О. В. Емельянова ; ЮЗГУ. - Курск : ЮЗГУ, 2014. - 187 с. : ил. - Библиогр.: с. 187 (10 назв.).
8. Техническая механика: [Электронный ресурс]: методические рекомендации по выполнению контрольной работы по разделу «Сопротивление материалов» для студентов специальностей (направлений) 151001.51 «Технология машиностроения» и 140409.51 «Электроснабжение (по отраслям)» / ЮЗГУ ; сост.: Е. Н. Политов, Н. П. Уварова, А. Н. Рукавицын. - Курск: ЮЗГУ, 2013. - 30 с.: ил., табл. - Библиогр.: с. 30.
9. Расчёт элементов конструкций на растяжение, кручение и изгиб: [Электронный ресурс] : методические указания по выполнению расчётно-графической и самостоятельной работы по курсам «Сопротивление материалов» и «Механика» для студентов направлений 260800 и 262200 / ЮЗГУ ; сост. Е. Н. Политов . - Курск: ЮЗГУ, 2011. - 35 с.: ил.

