

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 17.05.2023 09:42:11

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ


Юго-Западный государственный университет

УТВЕРЖДАЮ:

И.о. зав. кафедрой

высшей математики

*(наименование кафедры полностью)*

  
*(подпись)*

О.А. Бредихина

« 30 » 08 2022 г.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА  
для текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации обучающихся  
по дисциплине

Математический анализ

*(наименование дисциплины)*

ОПОП ВО 38.03.01 Экономика

*шифр и наименование направления подготовки (специальности)*

направленность (профиль) «Мировая экономика»

*(наименование направления подготовки (специальности))*

# 1 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ

## 1.1 ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

Раздел (тема) 1 «Числовые множества. Введение в математический анализ»

Вариант 1 (Т 1)

1. Найти  $A \cap B$ , если множества  $A$  и  $B$  заданы перечислением элементов:  
 $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  и  $B = \{b, d, e, m, n, p\}$ .

- 1)  $\{a, b, c, d, e, f, m, n, p\}$                       2)  $\{b, d\}$   
3)  $\{a, c, f\}$     4)  $\{b, d, e\}$

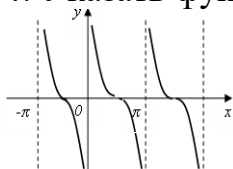
2. Найти  $A \cap (B \cup C)$ , если  $A = (-3; 11]$ ,  $B = [-2; 5]$ ,  $C = (4; 9)$

- 1)  $(4; 5]$                       2)  $[-2; 9]$                       3)  $(-3; 9]$                       4)  $(-3; 4) \cup [5; 11]$

3. Найти область определения функции  $y = \frac{4}{\sqrt{x} - 2}$

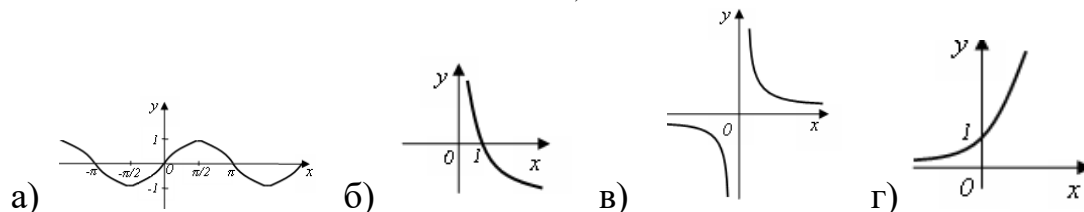
- 1)  $(4; +\infty)$                       2)  $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$   
3)  $[0; 4) \cup (4; +\infty)$                       4)  $(0; 4) \cup (4; +\infty)$

4. Указать функцию, график которой изображен на рисунке



- 1)  $y = \frac{1}{x}$                       2)  $y = \frac{1}{x^2}$                       3)  $y = x^3$                       4)  $y = \operatorname{ctg} x$

5. Указать график функции  $y = \log_{0,5} x$



6. Ниже дано определение бесконечно большой числовой последовательности. Вставьте вместо пропусков верную последовательность математических записей (Например, I, III, IV, II)

Числовая последовательность  $\{x_n\}$  называется бесконечно большой, если \_\_\_\_\_ существует \_\_\_\_\_ такой, что если \_\_\_\_\_, то выполняется условие

- I.  $|x_n| > \varepsilon$
- II.  $n > N(\varepsilon)$
- III. для любого числа  $\varepsilon > 0$
- IV. номер  $N(\varepsilon) > 0$

7. Установить соответствие между пределами и неопределенностями, обнаруженными в каждом из них

1) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi x}{2} \right)$	а) неопределённость $\left( \frac{0}{0} \right)$
2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 2x^2 + 8}{3x^3 + 5x^2 - 10}$	б) неопределённость $\left( \frac{\infty}{\infty} \right)$
3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$	в) неопределённость $(1^\infty)$
4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x-1} \right)^{3-4x}$	г) неопределённость $(0 \cdot \infty)$
	д) неопределённость $(\infty + \infty)$

8. Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 2x^2 + 8}{3x^3 + 5x^2 - 10}$ .

9. Предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x} \right)^x$  равен ...

- 1)  $e$     2)  $e^3$     3)  $3/e$     4) 1

10. Бесконечно малые в точке  $x_0$  функции  $f(x)$  и  $g(x)$  называются эквивалентными бесконечно малыми, если

- 1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$     2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$     3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$     4)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

### Вариант 2 (Т 1)

1. Даны два множества  $A = \{-2, 3, 8, 13, 18, 23\}$ ,  $B = \{-3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ .

Найти  $A \setminus B$ .

- 1)  $\{-3, -2, -1, 1, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 18, 23\}$     2)  $\{-2, 8, 18, 23\}$   
 3)  $\{-3, -2, -1, 1, 5, 7, 8, 9, 11, 18, 23\}$     4)  $\{-3, -1, 1, 5, 7, 9, 11\}$

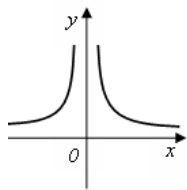
2. Даны числовые промежутки  $A = [3; 5)$  и  $B = [0; 3]$ . Выполнить операции над множествами и установить соответствие

1) $A \cap B$	а) $[0; 5]$
2) $A \cup B$	б) $\emptyset$
3) $A \setminus B$	в) $(3; 5)$
4) $B \setminus A$	г) $[3; 5]$
	д) $\{3\}$

3. Найти область определения функции  $y = \frac{\ln(x+1)}{x-4}$

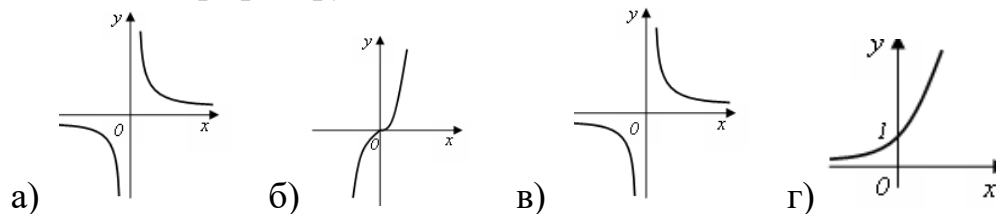
- 1)  $(4; +\infty)$                       2)  $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$   
 3)  $(0; 4) \cup (4; +\infty)$             4)  $(-1; 4) \cup (4; +\infty)$

4. Указать функцию, график которой изображен на рисунке



- 1)  $y = \frac{1}{x}$                       2)  $y = \frac{1}{x^2}$                       3)  $y = x^3$                       4)  $y = \text{ctg } x$

5. Указать график функции  $y = x^3$



6. Ниже дано определение бесконечно малой числовой последовательности. Вставьте вместо пропусков верную последовательность математических записей (Например, I, III, IV, II)

Числовая последовательность  $\{x_n\}$  называется бесконечно малой, если \_\_\_\_\_ существует \_\_\_\_\_ такой, что если \_\_\_\_\_, то выполняется условие \_\_\_\_\_

- I.  $|x_n| < \varepsilon$   
 II.  $n > N(\varepsilon)$   
 III. для любого числа  $\varepsilon > 0$   
 IV. номер  $N(\varepsilon) > 0$

7. Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+8}{3x+5} \right)^{6-9x}$ .

8. Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{5 - 5x^2}$ .

9. Предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+3}{2x} \right)^x$  равен

- 1)  $e$     2)  $0$     3)  $3/e$     4)  $1$

10. Если функции  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  – бесконечно малые в точке  $a$ , то бесконечно малыми в точке  $a$  обязательно являются функции

- 1)  $f(x) + g(x)$     2)  $f(x) \cdot g(x)$     3)  $f(x)^{g(x)}$     4)  $f(x) / g(x)$

*Раздел (тема) 2 «Дифференциальное исчисление функции одной»*

*Вариант 1 (Т 2)*

1. Производная функции  $y = x^5 - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{x^3}$  равна

- 1)  $5x^4 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$                       2)  $5x^4 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x^3}}$   
 3)  $5x^4 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$                       4)  $5x + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

2. Производная функции  $f(x) = \cos^3(x^2 + 2x)$  равна

- 1)  $3 \cos^2(x^2 + 2x)(2x + 2)$                       2)  $3 \cos^2(x^2 + 2x)(-\sin(x^2 + 2x))(2x + 2)$   
 3)  $3 \sin^2(x^2 + 2x)(2x + 2)$                       4)  $3 \cos^2(x^2 + 2x) \sin(x^2 + 2x)(2x + 2)$

3.

Задание на установление последовательности	Варианты ответов	Правильный ответ
Расположите последовательность действий при нахождении производной функции по определению	1) зафиксировать $x$ , вычислить значение функции $f(x)$ 2) найти приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 3) дать аргументу $x$ приращение $\Delta x$ и вычислить значение функции $f(x + \Delta x)$ 4) найти предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 5) определить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	

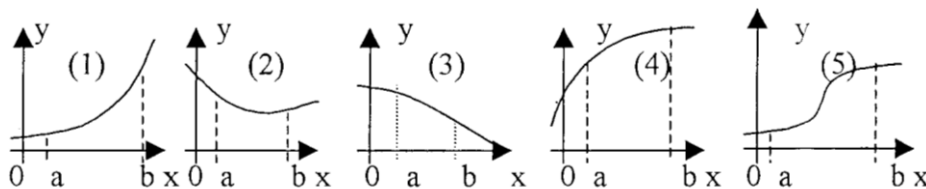
4. Производная функции  $y = x^x$

1)  $y' = \frac{x^{x+1}}{x+1}$       2)  $y' = x^x$       3)  $y' = x^x \ln x$       4)  $y' = x^x(1 + \ln x)$

5. Установить соответствие между функцией  $y = f(x)$  и способом нахождения ее первой производной  $y'$ .

1) $y = \sin(\ln x)$	1) логарифмическое дифференцирование
2) $y = x \cdot \operatorname{tg} x$	2) табличная производная
3) $y = (\log_2 x)^{\cos x}$	3) производная неявно заданной функции
4) $y = 5^x$	4) производная произведения
	5) производная сложной функции

6. Укажите, на каком рисунке изображён график функции, для которой в каждой точке отрезка  $[a; b]$  выполняются три условия:  $y > 0, y' < 0, y'' < 0$ .



7. Найти коэффициент  $k$  касательной  $y = kx + b$  к параболе  $y = 7x^2 - 14x + 5$  в точке  $x_0 = 2$ .

8. Найти точку минимума функции  $y = (2x + 1)^2 \cdot (x + 3) + 4$ .

9. Найти наименьшее значение функции  $y = \frac{x^2+49}{x}$  на отрезке  $[-9; -1]$ .

10. Выручка  $R$  от продажи некоторого товара определяется по формуле  $R(Q) = 150Q - 0,2Q^2$ , где  $Q$  – объём проданной продукции (тыс. ед.). Найти предельную выручку, если продано 120 тыс. ед.

*Вариант 2 (Т 2)*

1. Найти производную  $y'$  функции  $y = \operatorname{tg}^2 5x$

1)  $y' = \frac{2 \operatorname{tg} 5x}{\cos^2 5x}$       2)  $y' = 2 \operatorname{tg} 5x$       3)  $y' = \frac{10}{\cos^2 5x}$       4)  $y' = \frac{10 \operatorname{tg} 5x}{\cos^2 5x}$

2. Найти значение производной  $y'_x$  при  $t = 1$ , если функция задана

параметрически: 
$$\begin{cases} x = t + \frac{t^3}{3} \\ y = \operatorname{arctg} t \end{cases}$$

3.

Задание на установление последовательности	Варианты ответов	Правильный ответ
Расположите последовательность действий при нахождении производной функции $y = (\sin x)^{\cos x}$	1) найти производные обеих частей равенства 2) прологарифмировать обе части равенства 3) воспользоваться правилом нахождения производной сложной функции 4) воспользоваться свойством $\ln a^b  = b \cdot \ln a $ 5) заменить $y$ исходной функцией	

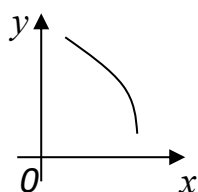
4. Пусть  $y(x)$  задана неявно:  $y = x + \ln y$ , тогда  $y'(x)$  равна \_\_\_\_\_

- 1)  $\frac{y}{y-1}$       2)  $\frac{y}{y+1}$       3)  $1 + \frac{1}{y}$       4)  $\frac{y-1}{y}$

5. Установить соответствие между функцией  $y = f(x)$  и способом нахождения ее первой производной  $y'$ .

1) $y = \sqrt[3]{x}$	1) логарифмическое дифференцирование
2) $y = (\lg x)^x$	2) табличная производная
3) $y = (5x + 2) \cdot \cos x$	3) производная неявно заданной функции
4) $y = e^{6x}$	4) производная произведения
	5) производная сложной функции

6. По графику функции  $y = f(x)$ , представленному на рисунке, определить знак  $y'$  и  $y''$ .



1)  $y' < 0, y'' > 0$

2)  $y' > 0, y'' < 0$

3)  $y' < 0, y'' < 0$

4)  $y' > 0, y'' > 0$

7. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции  $y = 5\sqrt[3]{x} + 4\sqrt{x}$  в точке  $x = 1$

8. Точка минимума функции  $y = \frac{e^x}{x}$

- 1) 0      2) 1      3)  $e$       4) нет точки минимума

9. Длина промежутка убывания функции  $y = (x+1)(x-2)^2$

- 1) 1      2) 2      3) 3      4) 4

10. Функции долговременного спроса  $D$  и предложения  $S$  от цены  $P$  на мировом рынке нефти имеют, соответственно, вид  $D = 30 - 0,9P$  и  $S = 1,2P + 16$ . Найти эластичность спроса в точке равновесной цены.

### Раздел (тема) 3 «Неопределенный интеграл»

#### Вариант 1 (Т 3)

1. Найти первообразная функции  $f(x) = \sin \frac{x}{2} + x + 1$ , график которой проходит через  $M(0; 4)$

1)  $\cos \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + x + 6$

2)  $2 \cos \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + 2$

3)  $-2 \cos \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + x + 6$

4)  $2 \cos \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + x + 6$

2. Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{dx}{\sin^2 4x}$

1)  $-\frac{1}{4} \operatorname{ctg} 4x + C$

2)  $\frac{1}{4} \operatorname{tg} 2x + C$

3)  $-\frac{1}{2} \operatorname{ctg} x + C$

4)  $-\frac{1}{4} \operatorname{ctg} 2x + C$

3. Установите соответствие между интегралами и их значениями



1) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$	а) $\frac{1}{2a} \ln \left  \frac{a+x}{a-x} \right  + c$
2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	б) $\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$
3) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	в) $\operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + c$
4) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	г) $\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$
	д) $\ln \left  x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right  + c$

4. Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 9}}$

1)  $\frac{1}{6} \arcsin 2x + C$

2)  $\frac{1}{6} \arcsin \frac{2x}{3} + C$

3)  $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{2x+3}{2x-3} \right| + C$

4)  $\frac{\ln \left| 2x + \sqrt{4x^2 - 9} \right|}{2} + C$

5. Найти неопределённый интеграл  $\int \frac{\cos x}{\sqrt{5 - 2 \sin x}} dx$

1)  $\sqrt{5 - 2 \sin x} + C$

2)  $2 \ln |5 - 2 \sin x| + C$

3)  $-\sqrt{5 - 2 \sin x} + C$

4)  $2\sqrt{5 - 2 \sin x} + C$

6. Указать равенства, которые являются верными

1)  $\int dF(x) = f(x)$

2)  $\int (f_1(x) \cdot f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \cdot \int f_2(x) dx$

3)  $\int dF(x) = F(x) + C$

4)  $\int f(ax+m) dx = \frac{F(ax+m)}{a} + C$

7. Найти неопределённый интеграл  $\int (2x+1) \cdot e^{2x+1} dx$

1)  $x e^{2x+1} + C$

2)  $2x e^{2x+1} + C$

3)  $(x^2 + x) e^{2x+1} + C$

4)  $2(x^2 + x) e^{2x+1} + C$

8. Указать вид разложения дроби  $\frac{x-4}{x^3 + 6x^2 + 8x}$  на простейшие

1)  $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2 + 6x + 8}$

2)  $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Mx + P}{x^2 + 6x + 8}$

3)  $\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 6x + 8}$

4)  $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+4}$

9. Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{4x+1}{x^2+x} dx$

- 1)  $\ln|x| + 3\ln|x+1| + C$                       2)  $3\ln|x| + \ln|x+1| + C$   
3)  $\ln|x| - 3\ln|x+1| + C$                       4)  $3\ln|x| - \ln|x+1| + C$

10. Записать верную последовательность действий, которую требуется совершить для вычисления интеграла  $\int (x+1) \cdot \sin x dx$ .

- 1) Вычислить  $du$  и  $v$   
2) Установить, что нужно взять за  $u$ , а что за  $dv$   
3) Определить, относится ли интеграл к типу интегралов, интегрируемых по частям  
4) Воспользоваться формулой  $\int u dv = uv - \int v du$ , подставив вместо  $u$ ,  $dv$ ,  $du$  и  $v$  их значения.

*Вариант 2 (Т 3)*

1. Найти первообразную функции  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 3x^2 + 1$ , график которой проходит через  $M(0; 2)$

- 1)  $-tg x + x^3 + 2$                       2)  $tg x + x^3 + x + 2$   
3)  $tg x + x^3 + 2$                       4)  $tg x + x^3 + x + 2$

2. Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{dx}{(2x)^2 - 9}$

- 1)  $\frac{1}{3} \arctg 2x + C$                       2)  $\frac{1}{12} \ln \left| \frac{2x-3}{2x+3} \right| + C$   
3)  $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{2x+3}{2x-3} \right| + C$                       4)  $\ln x + \left| \sqrt{4x^2 - 9} \right| + C$

3. Установите соответствие между функциями, записанными в левой колонке, и их первообразными в правой колонке

1) $\frac{1}{x^2}$	а) $\frac{x^2}{4}$
2) $\frac{x}{2}$	б) $\ln x  + x^2$
3) $3x^2$	в) $\frac{1}{x^2} + 2$
	г) $-\frac{1}{x}$
	д) $x^3$

4) $\frac{1}{x} + 2x$	
-----------------------	--

4. Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x} dx$

1)  $\frac{3\sqrt[3]{\ln^5 x}}{5} + C$

2)  $-\sqrt[3]{\ln^5 x} + C$

3)  $2\sqrt[3]{\ln^2 x} + C$

4)  $3\sqrt[3]{\ln x} + C$

5. Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 3}}$

1)  $2\sqrt{x^2 + 3} + C$

2)  $\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 3}}$

3)  $\sqrt{x^2 + 3} + C$

4)  $\ln|x + \sqrt{x^2 + 3}| + C$

6. Найти неопределённый интеграл  $\int (2x - 1) \cdot \cos x dx$

1)  $(2x - 1) \cdot \cos x + 2 \sin x + C$

2)  $2x \cdot \cos x - \sin x + C$

3)  $(x^2 - x) \sin x + C$

4)  $2 \cos x + (2x - 1) \cdot \sin x + C$

7. Найти неопределённый интеграл  $\int 2x \ln x dx$

1)  $x^2 \ln x + C$

2)  $x^2 \ln x - x^2 + C$

3)  $x + \ln x + C$

4)  $x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + C$

8. Определить вид разложения дроби  $\frac{3x - 4}{x^4 + 6x^3 + 10x^2}$  на простейшие дроби

1)  $\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^2 + 6x + 10}$

2)  $\frac{A}{x} + \frac{Mx + P}{x^2 + 6x + 10}$

3)  $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Mx + P}{x^2 + 6x + 10}$

4)  $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^2 + 6x + 10}$

9. Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{5x - 16}{x^2 - 6x + 8} dx$

1)  $3 \ln|x - 2| - 2 \ln|x - 4| + C$

2)  $3 \ln|x - 2| + 2 \ln|x - 4| + C$

3)  $2 \ln|x - 2| + 3 \ln|x - 4| + C$

4)  $3 \ln|x + 2| + 2 \ln|x + 4| + C$

10. Записать верную последовательность действий, которую требуется совершить для вычисления интеграла  $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 6}{x(x+3)} dx$ .

1. Проинтегрировать  $Q(x)$  и полученные простейшие дроби и сложить результаты
2. Определить вид разложения  $\frac{R(x)}{x(x+3)}$  дроби на простейшие дроби
3. Выполнить деление многочлена в числителе подынтегральной функции на многочлен в знаменателе, то есть представить подынтегральную функцию в виде  $f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{x(x+3)}$
4. Вычислить коэффициенты в разложении дроби  $\frac{R(x)}{x(x+3)}$  на простейшие дроби, воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов

*Раздел (тема) 4 «Определенный интеграл»*

*Вариант 1 (Т 4)*

1. Указать равенства, которые являются верными

$$1) \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \qquad 2) \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$3) \int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx \qquad 4) \int_a^a f(x) dx = 0$$

2. Вычислить определенный интеграл  $\int_1^8 \left( 2\sqrt[3]{x} - \frac{4}{x^2} \right) dx$

3. Установите соответствие между определенными интегралами, записанными в левой колонке, и равными им выражениями в правой колонке

<p>1) <math>\int_b^a f(x) dx</math></p> <p>2) <math>\int_a^a f(x) dx</math></p> <p>3) <math>\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx</math></p> <p>4) <math>\int_a^b (f(x) + g(x)) dx</math></p>	<p>а) 0</p> <p>б) <math>-\int_a^b f(x) dx</math></p> <p>в) <math>\int_a^b f(x) dx</math></p> <p>г) <math>\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx</math></p> <p>д) <math>\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx</math></p>
---	--

4. Вычислить определенный интеграл  $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} + 2}{e^x} dx$

5. Указать интегралы, которые являются несобственными

1)  $\int_{-1}^1 \frac{x}{x+1} dx$

2)  $\int_{-1}^1 e^{\frac{x+1}{x}} dx$

3)  $\int_{-1}^1 \ln(x+5) dx$

4)  $\int_{-1}^1 (x-1)(x+1) dx$

6. Указать интегралы, которые не являются несобственными:

1)  $\int_1^3 \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$

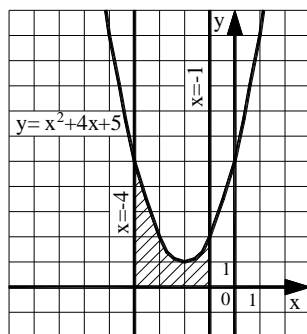
2)  $\int_1^8 \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$

3)  $\int_1^3 \ln x dx$

4)  $\int_0^\pi (tg x) dx$

7. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $y = -x^3$  и прямой, проходящей через точки  $A(-1; 4)$  и  $B(1; -4)$

8. Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке



1)  $\frac{230}{3}$

2) 70

3) 16

4)  $\frac{100}{3}$

5) 6

9. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$ . Укажите верную последовательность математических действий, которые для этого нужно совершить.

1) Доказать, что расходится хотя бы один из интегралов:  $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx$  или  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ .

2) Представить интеграл в виде  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ .

3) Установить, что подынтегральная функция не определена в точке  $x=0$ , в окрестности которой она не ограничена.

4) Сделать вывод о расходимости интеграла  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$ .

10. Найти работу силы  $F(x) = \frac{-3}{x^2}$  по перемещению мат. точки вдоль оси  $Ox$  из точки  $x=1$  в точку  $x=2$ .

Вариант 2 (Т 4)

1. Указать равенства и утверждения, которые являются верными

1)  $\int_a^b C f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx$     2)  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$

3)  $\int_a^b dx = a - b$     4) Если  $f(x) \geq g(x)$ , то  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

2. Вычислить определенный интеграл  $\int_0^1 \frac{6}{\pi \sqrt{4-x^2}} dx$

3. Установите соответствие между определенными интегралами, записанными в левой колонке, и равными им выражениями в правой колонке

1) $\int_{-a}^a f(x) dx$ , если $f(x)$ – четная функция	а) 0 б) $-\int_a^b f(x) dx$
2) $\int_{-a}^a f(x) dx$ , если $f(x)$ – нечетная функция	в) $\int_a^b f(x) dx$
3) $\int_b^a f(x) dx$	г) $2 \cdot \int_0^a f(x) dx$
4) $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$	д) $\int_0^a f(x) dx$

4. Вычислить определенный интеграл  $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos x}{\sin x + 1} dx$

1) 0      2) 1      3)  $\ln 2$       4)  $-\ln 2$

5. Указать интегралы, которые являются несобственными

1)  $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-1}$

2)  $\int_0^2 e^{2x-1} dx$

3)  $\int_0^2 \ln x dx$

4)  $\int_0^2 (x-2)x dx$

6. Указать интегралы, которые не являются несобственными:

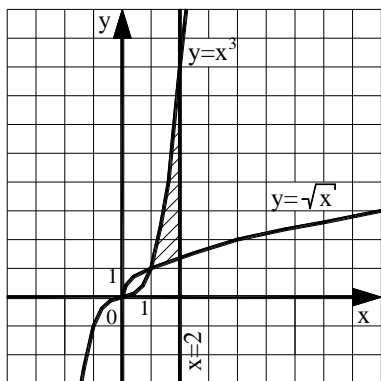
- 1)  $\int_0^3 \left(\frac{4}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$                       2)  $\int_1^8 (x-1)(x-8) dx$   
 3)  $\int_0^e \ln x dx$                               4)  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{ctg} x) dx$

7. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $y = \sqrt[3]{x}$  и прямой, проходящей через точки  $A(1; 1)$  и  $B(8; 2)$

8. Записать верную последовательность действий, которую требуется совершить для нахождения площади фигуры, ограниченной линиями, задаваемыми уравнениями:  $y = x$ ,  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x = 2$ .

1. Построить указанные линии в прямоугольной декартовой системе координат.
2. Найти  $a$  и  $b$  – пределы интегрирования, для этого определить абсциссы точек пересечения указанных линий.
3. Определив, график какой из функций  $y = x$  или  $y = \frac{1}{x}$  лежит выше, воспользоваться формулой:  $S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ .
4. Вычислить определенный интеграл, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница.

9. Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке



- 1) 3,5                      2) 3,75                      3)  $\frac{37}{12} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$   
 4)  $\frac{53}{12} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$                       5)  $\frac{14}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$

10. Найти работу силы  $F(x) = \frac{4}{x^2}$  по перемещению мат. точки вдоль оси  $Ox$  из точки  $x = -2$  в точку  $x = -1$ .

Раздел (тема) 5 «Функции нескольких переменных»

Вариант 1 (Т 5)

1. Найти частную производную  $\frac{\partial z}{\partial y}$  функции  $z = \frac{3-y^2}{1+x}$

- 1)  $-2y$       2)  $\frac{3-2y}{1+x}$       3)  $\frac{2y}{(1+x)^2}$       4)  $\frac{-2y}{1+x}$

2. Вычислите значения частных производных функции  $z = 5x^3 - 3xy^2 - 2y$  в точке  $M_0(1; 2)$  и установите соответствие.

1) $\frac{\partial z}{\partial x} \Big _{M_0}$	а) 30
2) $\frac{\partial z}{\partial y} \Big _{M_0}$	б) -14
3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big _{M_0}$	в) -12
4) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big _{M_0}$	г) -6
5) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big _{M_0}$	д) -4
	е) 3

3. Найти частную производную  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  функции  $z = x \ln y$

- 1)  $-\frac{x}{y^2}$       2)  $\frac{x}{y^2}$       3)  $\frac{x}{y}$       4)  $\ln y$

4.

Задание на установление последовательности	Варианты ответов	Правильный ответ
Расположите последовательность действий при исследовании функции двух переменных на экстремум	1) вычисляем значения $A, B, C$ 2) вычисляем $z_0(x_0; y_0)$ 3) определяем стационарные точки 4) находим частные производные функции первого и второго порядков 5) определяем, минимум или максимум имеется в точке экстремума 6) вычисляем значение $\Delta$ 7) определяем наличие точки экстремума	



5. Найти производную функции  $z = f(x, y)$  по направлению вектора  $e(-1; 0)$

- 1)  $\frac{\partial f}{\partial x}$       2)  $\frac{\partial f}{\partial y}$       3)  $-\frac{\partial f}{\partial x}$       4)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

6. Найти градиент функции  $z = e^{x^2+y}$  в точке P (0;1)

- 1) (0;e)      2) (0;0)      3) (e;e)      4) (1;1)

7. Найдите сумму  $a + b + c$ , где  $(a; b; c)$  – это координаты вектора градиента функции  $u = 2x^2 - 3y^2 + 4z^2$  в точке  $M(1; -1; 2)$ .

8. Исследуйте на экстремум функцию  $z = \frac{x^3}{3} - 2xy + y^2 - 3x$ . В ответе запишите значение  $z_0$ , если исследование дало результат  $z_{\max(\min)}(x_0; y_0) = z_0$ .

9. Производится два вида товаров в количестве  $x$  и  $y$ . Пусть цены на эти товары, соответственно,  $P_1 = 32$  и  $P_2 = 24$  тыс. руб. а функция издержек имеет вид  $C = 1,5x^2 + 2xy + y^2$ . Найдите максимальную прибыль в тыс. руб., которую можно получить при продаже этих товаров.

10. В таблице приведены данные об уровне безработицы ( $x$ ) и уровне преступности ( $y$ ) в некотором населенном пункте.

$x_i$	0,6	1,3	2,2	3,3	4,2	5,3	6,0	6,3	6,4	6,5
$y_i$	4,2	4,27	4,32	4,47	4,53	4,68	4,85	5,01	5,15	5,22

В предположении, что между  $x$  и  $y$  существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии  $y = kx + b$  методом наименьших квадратов. Спрогнозировать уровень преступности в случае, когда безработица отсутствует.

### Вариант 2 (Т 5)

1. Найти частную производную  $\frac{\partial z}{\partial x}$  функции  $z = x \cos(x + 2xy)$

1)  $\cos(x + 2xy) - x \sin(x + 2xy)(1 + 2y)$       2)  $-2y \sin(x + 2xy)$

3)  $\cos(x + 2xy) - x \sin(x + 2xy)$       4)  $-\sin(x + 2xy)$

2. Вычислите значения частных производных функции  $z = 4x^2 - xy^3 + 5y$  в точке  $M_0(1; -1)$  и установите соответствие.

1) $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right _{M_0}$	а) -3
2) $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right _{M_0}$	б) 8
3) $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right _{M_0}$	в) 2
4) $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right _{M_0}$	г) 6
5) $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right _{M_0}$	д) 9
	е) 1

3. Найти частную производную  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  функции  $z = y^x$

- 1)  $y^x \ln^2 y$     2)  $x y^{x-1} \ln y$     3)  $x(x-1)y^{x-2}$     4)  $y^{x-1} x \ln y$

4.

Задание на установление последовательности	Варианты ответов	Правильный ответ
Расположите последовательность действий при нахождении частной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ функции $z = \ln(3xy - x^3)$	1) $\frac{-6x(3xy-x^3)-(3y-3x^2)(3y-3x^2)}{(3xy-x^3)^2}$ 2) $\frac{(3xy-x^3)'}{3xy-x^3}$ 3) $(\ln(3xy - x^3))'_x$ 4) $\left(\frac{3y-3x^2}{3xy-x^3}\right)'_x$ 5) $\frac{(3y-3x^2)'(3xy-x^3)-(3y-3x^2)(3xy-x^3)'}{(3xy-x^3)^2}$ 6) $\frac{3y-3x^2}{3xy-x^3}$	

5. Найти производную функции  $z = f(x, y)$  по направлению вектора  $\vec{e}(0;1)$

- 1)  $\frac{\partial f}{\partial x}$     2)  $\frac{\partial f}{\partial y}$     3)  $-\frac{\partial f}{\partial x}$     4)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

6. Найти градиент функции  $z = \ln x + 2xy$  в точке  $P(0,5; -1)$

- 1) (0; 1)    2) (2; -1)    3) (0; -2)    4) (1; -2)

7. Найдите сумму  $a + b + c$ , где  $(a; b; c)$  – это координаты вектора градиента функции  $u = 5x^2 + 3y^2 + 3z^2$  в точке  $M(0; -2; 3)$ .

8. Исследуйте на экстремум функцию  $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$ . В ответе запишите значение  $z_0$ , если исследование дало результат  $z_{\max(\min)}(x_0; y_0) = z_0$ .

9. Производится два вида товаров в количестве  $x$  и  $y$ . Пусть цены на эти товары, соответственно,  $P_1 = 45$  и  $P_2 = 27$  тыс. руб. а функция издержек имеет вид  $C = 6x^2 + 3xy + 3y^2$ . Найдите максимальную прибыль в тыс. руб., которую можно получить при продаже этих товаров.

10. В таблице приведены данные об объемах производства ( $x$ , у.е.) некоторой компании в течение 10 месяцев и соответствующей операционной прибыли ( $y$ , тыс. руб.).

$x_i$	500	520	523	530	550	555	560	562	565	570
$y_i$	61	66,8	67	69	74	76,7	78	79	79,3	81

В предположении, что между  $x$  и  $y$  существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии  $y = kx + b$  методом наименьших квадратов. Сделать выводы о возможной месячной прибыли, если объем производства достигнет 600 у.е.

### Раздел (тема) 6 «Дифференциальные уравнения»

#### Вариант 1 (Т 6)

- Указать тип дифференциального уравнения  $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$ 
  - уравнением с разделяющимися переменными
  - однородным уравнением
  - линейным уравнением
  - уравнением Бернулли
  - уравнением в полных дифференциалах
- Найти общее решение дифференциального уравнения  $y' = xy^2$ 
  - $y = Ce^{-\frac{x^3}{3}}$
  - $y = (x^2 + C)^{-1}$
  - $y = \sqrt{x + C}$
  - $y = -2(x^2 + C)^{-1}$
- Найти общее решение дифференциального уравнения  $yy' = 3$ 
  - $y = -C/x^2$
  - $y = \pm\sqrt{3x + C}$
  - $y = Ce^{2x}$
  - $y = \pm\sqrt{6x + C}$
- Указать тип дифференциального уравнения  $(y^2 - 1) dx - \frac{x-1}{y+1} dy = 0$ 
  - уравнением с разделяющимися переменными
  - однородным уравнением
  - линейным уравнением
  - уравнением Бернулли
  - уравнением в полных дифференциалах
- Найти постоянную  $C$  в частном решении дифференциального уравнения  $y \cdot y' = 4x^3$  при  $y(5) = 2$ .

6. Указать уравнение, к которому сводится уравнение  $yy'' - y' = 0$  с помощью введения переменной  $z = y'$

- 1)  $y^2 dz = zdy$     2)  $y dz = z^2 dy$     3)  $y dz = zdy$     4)  $yz dz = dy$

7. Указать замену, целесообразную для понижения порядка диф.уравнения  $y'y'' = y^2$

- 1)  $z(y) = y'$     2)  $z(x) = y$     3)  $z(y) = y'$     4)  $z(x) = y'$

8. Решение задачи Коши для диф.уравнения  $x^2 y'' = 1$ , если  $y(1) = 3$ ,  $y'(1) = 1$

- 1)  $y = -\ln|x| + 2x + 1$     2)  $y = \ln|x| + 2$     3)  $y = x^2 + 2$     4)  $y = \frac{1}{x^2} + 3x$

9. Указать вид частного решения дифференциального уравнения  $y'' + 3y = xe^{3x}$

- 1)  $Axe^{3x}$     2)  $(Ax + B)e^{3x}$     3)  $x(Ax + B)e^{3x}$     4)  $x^2(Ax + B)e^{3x}$

10. Установить соответствие между дифференциальным уравнением и его решением.

1) $y'' + y' - 6y = 0$	а) $y = e^{\alpha x}(C_1 \cdot \cos(\beta x) + C_2 \cdot \sin(\beta x))$
2) $y'' - 10y' + 29y = 0$	б) $y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$
3) $y'' - 10y' + 25y = 0$	в) $y = C_1 \cdot \cos(\beta x) + C_2 \cdot \sin(\beta x)$
4) $y'' + 25y = 0$	г) $y = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x}$
	д) $y = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2$

### Вариант 2 (Т 6)

1. Дифференциальное уравнение  $(3x^2 + y)dx + (x + 2y)dy = 0$  является

- 1) уравнением с разделяющимися переменными  
 2) однородным уравнением    3) линейным уравнением  
 4) уравнением Бернулли    5) уравнением в полных дифференциалах

2. Дифференциальное уравнение  $(xy^2 + e^x)dx - \frac{dy}{y} = 0$  является

- 1) уравнением с разделяющимися переменными  
 2) однородным уравнением    3) линейным уравнением  
 4) уравнением Бернулли    5) уравнением в полных дифференциалах

3. Общее решение дифференциального уравнения  $y' = \sqrt{xy}$

- 1)  $y = C \left( \frac{x\sqrt{x}}{3} \right)^2$     2)  $y = Cx - 3\sqrt{x}$

$$3) y = \frac{C}{\sqrt{x}}$$

$$4) y = \left( \frac{x\sqrt{x} + C}{3} \right)^2$$

4. Общее решение дифференциального уравнения  $y' = y - 1$

$$1) y = Ce^x - 1$$

$$2) y = Ce^x + 1$$

$$3) y = Cx + 1$$

$$4) y = Cx - 1$$

5. Понижение порядка в дифференциальном уравнении  $yy'' = 2$  с помощью введения переменной  $z = y'$  приводит к уравнению

$$1) yz dz = 2dy \quad 2) z dz = 2dy \quad 3) y dz = 2dy \quad 4) dz = 2 \ln y dy$$

6. Решение задачи Коши для диф.уравнения  $y'' = x^{-2}$ , если  $y(1) = 3$ ,  $y'(1) = 0$

$$1) y = \ln|x| + 2$$

$$2) y = -\ln|x| + x + 2$$

$$3) y = x^2 + 2$$

$$4) y = x^{-2} + 3x$$

7. Установить вид частного дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + y = (3x + 2)e^x$$

$$1) Ax e^x \quad 2) (Ax + B)e^x \quad 3) x(Ax + B)e^x \quad 4) x^2(Ax + B)e^x$$

8. Установить вид частного решения диф.уравнения  $y'' - 2y' + 2y = 2e^x \cos x$

$$1) e^x(A \cos x + B \sin x) \quad 2) x e^x(A \cos x + B \sin x) \quad 3) A x e^x \cos x \quad 4) A x e^x \sin x$$

9. Найти постоянную  $C$  в частном решении дифференциального уравнения  $y \cdot y' = \sqrt{x}$  при  $y(9) = 4$ .

10. Найти общее решение линейного однородного уравнения

$$y'' - 10y' + 29y = 0.$$

$$1) y = e^{-5x}(C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \sin(2x)) \quad 2) y = C_1 \cdot e^{7x} + C_2 \cdot e^{3x}$$

$$3) y = C_1 \cdot e^{-7x} + C_2 \cdot e^{-3x}$$

$$4) y = e^{5x}(C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \sin(2x))$$

$$5) y = e^{5x}(C_1 + C_2 x)$$

### Раздел (тема) 7 «Числовые ряды»

#### Вариант 1 (Т 7)

1. Найти сумму  $a_3 + a_2$ , если  $n$ -ая частичная сумма ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  имеет вид

$$S_n = \frac{\sqrt[3]{n-2}}{2}$$

2. Найти сумму ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n+1} - 8}{3^{2n}}$

3. Найти сумму ряда  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)}$

4. Выбрать сходящиеся среди рядов :

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2-1}}{n+3}$ , 2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2-2}{n(n^2+1)^2}$ , 3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{5n-1}$ , 4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{6^n+n}$

5. Установить соответствие между числовыми рядами и признаками сходимости, которые целесообразно применять для исследования вопроса об их сходимости

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{5n-1}$	а) признак сравнений
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5+1}$	б) необходимый признак сходимости
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{(n-1)!}$	в) радикальный признак Коши
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$	г) признак Даламбера
	д) теорема Лейбница

6. Выбрать верные утверждения для ряда  $\frac{4}{3} + \frac{8}{5} + \frac{16}{7} + \dots$

1) сходится, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ , 2) расходится, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ ,

3) расходится, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ , 4) расходится, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 4$ .

7. Запишите последовательность действий, которую нужно применить при исследовании ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  на сходимость с помощью интегрального признака сходимости

- 1) Ввести в рассмотрение функцию  $f(x) = \frac{1}{x^3}$
- 2) Доказать, что функция  $f(x)$  является положительной, непрерывной, убывающей на  $[1, +\infty)$

3) Установить, что интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  сходится

4) Сделать вывод о сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

8. Выбрать верные утверждения для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^{n^2}$

1) сходится, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$ ,    2) сходится, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e$ ,

3) расходится, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$ ,    4) расходится, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e^3$ .

9. Выбрать верные утверждения для рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^2}{2^n}$  и  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

1) оба сходятся абсолютно,    2) оба сходятся условно,

3) первый сходится абсолютно, а второй сходится условно,

4) первый сходится условно, а второй сходится абсолютно.

10. Какой вывод точно можно сделать о сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ,

если известно, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , где  $a_n \geq 0$ , расходится?

1) сходится условно,

2) расходится,

3) не является абсолютно сходящимся,

4) сходится абсолютно

### Вариант 2 (Т 7)

1. Найти член ряда  $a_3$ , если  $n$ -ая частичная сумма ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  имеет вид

$$S_n = \frac{12n}{n+1}$$

2. Найти сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} + 3^n}{2^{2n}}$

3. Найти сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n^2 + 9n + 20}$

4. Выбрать расходящиеся среди рядов:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{2n-1}, \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^4}, \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n+3}{n^3+n-1}, \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{4^n}$$

5. Установить соответствие между числовыми рядами и признаками сходимости, которые целесообразно применять для исследования вопроса об их сходимости

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n+4}{8n+3}$	а) признак сравнений
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-7}{n^7}$	б) необходимый признак сходимости
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{(n+1)!}$	в) радикальный признак Коши
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n^2}$	г) признак Даламбера
	д) теорема Лейбница

6. Выбрать верное утверждение для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{(n-1)!}$

1) сходится, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4}$ ,      2) сходится, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ ,

3) расходится, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ ,      4) расходится, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{4}$ .

7. Запишите последовательность действий, которую нужно применить при исследовании ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$  на сходимость с помощью интегрального признака сходимости

- 1) Ввести в рассмотрение функцию  $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$
- 2) Установить, что интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  сходится
- 3) Сделать вывод о сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$
- 4) Доказать, что функция  $f(x)$  является положительной, непрерывной, убывающей на  $[1, +\infty)$

8. Выбрать верное утверждение для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{(n-1)n}$

1) сходится, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-1}$ ,      2) сходится, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e$ ,



3) расходится, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e$ , 4) расходится, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$ .

9. Выбрать верное утверждение для рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$  и  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n^2 - 2}$

- 1) оба сходятся абсолютно, 2) оба сходятся условно,  
 3) первый сходится абсолютно, а второй сходится условно,  
 4) первый сходится абсолютно, а второй расходится.

10. Какой вывод можно сделать о сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ , если известно, что

ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , где  $a_n \geq 0$ , сходится?

- 1) сходится абсолютно, 2) сходится условно,  
 3) расходится, 4) не является абсолютно сходящимся

### Раздел (тема) 8 «Функциональные ряды»

#### Вариант 1 (Т 8)

1. Найти интервал сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x+1)^n$ , если радиус сходимости этого

ряда равен 3

- 1) (-3;3), 2) (-2;4) 3) (-4;2) 4) (-4;4)

2. Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} x^n}{3^n (n^2 + 1)}$

- 1) [-3/2;3/2) 2) [-3/2;3/2] 3) (-3/2;3/2] 4) [-2/3;2/3]

3. Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot n!}{5n - 2}$

- 1) [0;∞), 2) (-∞;0], 3) (-∞;∞) 4) {0}

4. Установить соответствие между функциями и их разложением в степенной ряд

1) $(1+x)^m$	а) $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$
2) $\sin x$	б) $\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$

3) $\cos x$	в) $1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$
4) $\frac{1}{1-x}$	г) $1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots,$
	д) $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

5. Определить значение выражения  $\ln 0,6$ , вычисленное с точностью до  $\varepsilon = 0,01$

6. Найти коэффициент  $c_2$ , если решение  $y = y(x)$  задачи Коши  $y' = 2x - \sin y$   
 $y(0) = \frac{\pi}{2}$  разложено в степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ .

7. Если степенной ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x+1)^n$  сходится в точке  $x = 6$ , то он обязательно

сходится и в точке

- 1)  $x = -9$ ,    2)  $x = 7$ ,    3)  $x = -3$ ,    4)  $x = -8$ .

8. Найти коэффициент  $b_2$  разложения функции  $f(x) = x - 2$  в ряд Фурье на отрезке  $[-\pi; \pi]$ .

9. Запишите верную последовательность действий при нахождении области

сходимости степенного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 4^n}$ .

- 1) Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости
- 2) Записать интервал сходимости ряда
- 3) Найти радиус сходимости ряда
- 4) Сделать вывод о том, входят ли концы интервала сходимости в область сходимости ряда

10. Известно, что начальный размер вклада под 10% годовых в банке составил 1 млн. рублей. Найти размер вклада через 5 лет: а) с ежегодной капитализацией, б) с непрерывной капитализацией.

### Вариант 2 (Т 8)

1. Найти интервал сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-1)^n$ , если радиус сходимости ряда

равен 4

- 1)  $(-3;5)$ ,    2)  $(-4;4)$ ,    3)  $(-3;3)$     5)  $(-5;3)$

2. Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{2n+1} \dots$

- 1)  $[-1/5; 1/5)$     2)  $[-1/5; 1/5]$     3)  $(-5/2; 5/2]$     4)  $(-1/5; 1/5)$

3. Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n \cdot n!}{4^n}$

- 1)  $[-1; \infty)$ ,    2)  $(-\infty; \infty)$     3)  $\{-1\}$     4)  $\{0\}$

4. Установить соответствие между функциональными рядами и их суммой

1) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$	а) $e^x$
2) $x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$	б) $\frac{1}{1+x}$
3) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots$	в) $\operatorname{arctg} x =$
4) $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$	г) $\arcsin x =$
	д) $\ln(1+x)$

5. Определить значение выражения  $\sqrt{4,8}$ , вычисленное с точностью до  $\varepsilon = 0,01$

6. Найти коэффициент  $c_2$ , если решение  $y = y(x)$  задачи Коши  $y' = 6 \ln(x+y)$ ,

$y(0) = 1$  разложено в степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

7. Определить коэффициент  $c_2$  разложения функции  $f(x) = 4 \operatorname{arctg} x$  в

степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n$  равен....

8. Какой (какие) из коэффициентов  $a_0, a_n, b_n$  разложения функции

$f(x) = x^3 \cos x$  в ряд Фурье на отрезке  $[-\pi; \pi]$  равен 0?

- 1)  $a_0$ ,    2)  $a_n$ ,    3)  $b_n$ ,    4) ни один из них.

9. Ниже сформулирована теорема Абеля. Вставьте вместо пропусков верную последовательность математических записей. (Например, I, III, IV, II.)

Если степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  сходится при  $x = x_0$ , то он \_\_\_\_\_ для всех  $x$ , удовлетворяющих условию \_\_\_\_\_. Если степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  расходится при  $x = x_0$ , то он \_\_\_\_\_ для всех  $x$ , удовлетворяющих условию \_\_\_\_\_.

- I.  $|x| < |x_0|$
- II.  $|x| > |x_0|$
- III. *сходится*
- IV. *расходится*

10. Известно, что начальный размер вклада под 5% годовых в банке составил 2 млн. рублей. Найдем размер вклада через 10 лет: а) без капитализации процентов, б) с непрерывной капитализацией.

**Шкала оценивания:** 10-ти балльная для всех тестов.

**Критерии оценивания:**

Каждый вопрос (задание) в тестовой форме оценивается по дихотомической шкале: выполнено – 1 балл, не выполнено – 0 баллов.

Применяется следующая шкала перевода баллов в оценку по 5-балльной шкале:

- 9, 10 баллов соответствуют оценке «отлично»;
- 7, 8 баллов – оценке «хорошо»;
- 5, 6 баллов – оценке «удовлетворительно»;
- 4 балла и менее – оценке «неудовлетворительно».

## 2 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

### 2.1 БАНК ВОПРОСОВ И ЗАДАНИЙ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

#### 1. Вопросы в закрытой форме

1.1. Найти  $A \cap (B \cup C)$ , если  $A = (-3; 11]$ ,  $B = [-2; 5]$ ,  $C = (4; 9)$

- 1)  $(4; 5]$                       2)  $[-2; 9]$   
3)  $(-3; 9]$                       4)  $(-3; 4) \cup [5; 11]$

1.2. Верным для множества  $X = \{x \mid x \leq 5, x \in N\}$  является утверждение:

- 1)  $\inf X = 0, \sup X = 5$                       2)  $\inf X = 1, \sup X = 5$   
3)  $\inf X = 5, \sup X = 1$                       4)  $\inf X = 1, \sup X = 6$

1.3. Окрестностью точки  $a = 1,3$  радиуса  $r = 0,3$  является множество

- 1)  $(-1,6; 1)$                       2)  $(1; 1,6)$   
3)  $(0,3; 1,6)$                       4)  $(-1; 1,6)$

1.4. Нечетными из ниже перечисленных являются функции

- 1)  $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$                       2)  $y = \sin^2 x$                       3)  $y = \frac{x|x|}{\cos x}$                       4)  $y = 3^x + 3^{-x} + 3$

1.5. Среди данных ниже функций указать функции, возрастающие на всей области определения

- 1)  $y = \frac{1}{x}$                       2)  $y = \frac{1}{x^2}$                       3)  $y = x^3$                       4)  $y = \operatorname{tg} x$

1.6. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно

- 1) прямой  $y = x$                       2) оси  $Ox$                       3) оси  $Oy$                       4) начала координат

1.7. Предел  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 8x^2 + 6}{4x^2 + 7x - 1}$  равен

- 1)  $\infty$                       2) 2                      3) -2                      4) -0,75

1.8. Предел  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{16 - x^2}{\sqrt{5 - x} - 3}$  равен

- 1) -48                      2) 48                      3) -32                      4) 0

1.9. Предел  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{27 - x^3}$  равен

- 1)  $\frac{7}{27}$       2)  $-\frac{7}{9}$       3)  $-\frac{7}{27}$       4)  $\frac{7}{9}$

1.10. Предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2(3x)}{\operatorname{tg}(2x^2)}$  равен

- 1) 4,5      2) 1,5      3) 0      4) 2,25

1.11. Предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x) - \sin(3x)}{\sin x + \sin(8x)}$  равен

- 1)  $\frac{1}{3}$       2)  $\frac{1}{9}$       3)  $-\frac{1}{3}$       4) -1

1.12. Предел  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 2x$  равен

- 1) 0      2)  $\infty$       3) 2      4) 0,5

1.13. Найти точку разрыва функции  $y = \frac{3}{(x+1) \ln x}$

- 1)  $e$       2) 0      3) -1      4) 1

1.14. Производная функции  $y = x^5 - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{x^3}$  равна

- 1)  $5x^4 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$       2)  $5x^4 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x^3}}$       3)  $5x^4 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$   
4)  $5x + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$       5)  $5x - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

1.15. Производная функции  $y = x^2 \cdot \sin(2x)$  равна

- 1)  $2x \cdot \cos(2x)$       2)  $2x \cdot \sin(2x) + 2x^2 \cdot \cos(2x)$   
3)  $2x \cdot \sin(2x) + x^2 \cdot \cos(2x)$       4)  $4x \cdot \cos(2x)$

1.16. Укажите, как должен выглядеть график функции  $y(x)$  на отрезке  $[a; b]$ , если в каждой точке указанного отрезка выполняются три условия:

$$y < 0, \quad y' < 0, \quad y'' > 0.$$

- 1) график лежит ниже оси ОХ;  $y(x)$  возрастает; выпуклость вниз  
2) график лежит ниже оси ОХ;  $y(x)$  убывает; выпуклость вверх  
3) график лежит ниже оси ОХ;  $y(x)$  возрастает; выпуклость вверх  
4) график лежит ниже оси ОХ;  $y(x)$  убывает; выпуклость вниз  
5) график лежит выше оси ОХ;  $y(x)$  убывает; выпуклость вверх

1.17. Неопределенный интеграл  $\int \frac{dx}{\sin^2 4x}$  равен

- 1)  $-\frac{1}{4} \operatorname{ctg} 4x + C$                       2)  $\frac{1}{4} \operatorname{tg} 2x + C$   
3)  $-\frac{1}{2} \operatorname{ctg} x + C$                       4)  $-\frac{1}{4} \operatorname{ctg} 2x + C$

1.18. Неопределенный интеграл  $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x} dx$  равен

- 1)  $\frac{3\sqrt[3]{\ln^5 x}}{5} + C$                       2)  $-\sqrt[3]{\ln^5 x} + C$   
3)  $2\sqrt[3]{\ln^2 x} + C$                       4)  $3\sqrt[3]{\ln x} + C$

1.19. Разложение дроби  $\frac{x+5}{x^3+6x^2}$  на простейшие дроби имеет вид

- 1)  $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2+6x}$                       2)  $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+6}$   
3)  $\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+6x}$                       4)  $\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x+6}$

1.20. Неопределенный интеграл  $\int \frac{4x+1}{x^2+x} dx$  равен

- 1)  $\ln|x| + 3\ln|x+1| + C$                       2)  $3\ln|x| + \ln|x+1| + C$   
3)  $\ln|x| - 3\ln|x+1| + C$                       4)  $3\ln|x| - \ln|x+1| + C$

1.21. Частная производная  $\frac{\partial z}{\partial y}$  от функции  $z = x - \frac{x}{y} + 1$  равна...

- 1)  $1 - \frac{x}{y^2}$                       2)  $x - \frac{1}{y^2} + 1$                       3)  $\frac{x}{y^2}$                       4)  $1 - \frac{1}{y^2}$

1.22. Общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными  $e^x dx - (e^x + 2) \cdot 4y dy = 0$  имеет вид

- 1)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{e^x}{\sqrt{2}} = 2y^2 + C$                       2)  $\ln|e^x + 2| = C - 2y^2$                       3)  $\ln|e^x + 2| = 2y^2 + C$   
4)  $e^x \cdot \ln|e^x + 2| = 2y^2 + C$                       5)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{e^x}{\sqrt{2}} = C - 2y^2$

1.23. Область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n (n^2 + 1)}$  равна

- 1)  $[-3; 3]$     2)  $[-3; 3]$     3)  $(-3; 3)$     4)  $[-1/3; 1/3]$

1.24. Частное решение дифференциального уравнения  $y'' + 2y' - y = -x^2 + 6x - 3$  имеет вид

- 1)  $x^2$     2)  $2x^2 - x$     3)  $x^2 + 2$     4)  $x^2 - 2x + 1$     5)  $x^2 + 3x + 1$

1.25. Общее решение дифференциального уравнения  $y' = \sqrt{y-1}$  имеет вид

- 1)  $y = 1 + \left(\frac{x+C}{2}\right)^{-1}$     2)  $y = 1 + \left(\frac{x+C}{2}\right)^{-2}$     3)  $y = 1 + \left(\frac{x+C}{2}\right)^2$   
4)  $y = C + \left(\frac{x}{2}\right)^2$     5)  $y = 1 + C\left(\frac{x}{2}\right)^2$

## 2. Вопросы в открытой форме

2.1. Количество корней уравнения  $\|4-x|-7|=7$  равно ...

2.2. Точная верхняя грань множества  $(0; 3)$  равна....

2.3. Предел  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{5-5x^2}$  равен ...

2.4. Предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{2x}\right)^x$  равен ...

2.5. Предел  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{5-5x^2}$  равен ...

2.6. Предел  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{16-x^2}{\sqrt{5-x}-3}$  равен ...

2.7. Точка разрыва функции  $y = \frac{\lg x}{x^2-4}$  равна...

2.8. Коэффициент  $k$  касательной  $y = kx + b$  к параболе  $y = 7x^2 - 14x + 5$  в точке  $x_0 = 2$  равен...

2.9. Точку минимума функции  $y = (2x + 1)^2 \cdot (x + 3) + 4$  равна ...

2.10. Наибольшее значение функции  $y = \frac{4\sqrt{x}-3}{x+1}$  равно...

2.11. Ускорение точки, движущейся по закону  $x(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$  в момент

времени  $t=0$ , равно

2.12. Сумма  $a + b + c$ , где  $(a; b; c)$  – это координаты вектора градиента функции  $u = 5x^2 + 3y^2 + 3z^2$  в точке  $M(0; -2; 3)$  равна ...

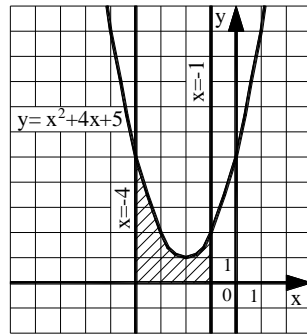
2.13. Исследуйте на экстремум функцию  $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$ . В ответе запишите значение  $z_0$ , если исследование дало результат  $Z_{\max(\min)}(x_0; y_0) = z_0$ .



2.14. Исследуйте на экстремум функцию  $z = \frac{x^3}{3} - 2xy + y^2 - 3x$ . В ответе запишите значение  $z_0$ , если исследование дало результат  $z_{\max(\min)}(x_0; y_0) = z_0$ .

2.15. Определённый интеграл  $\int_1^9 \frac{1 + 2\sqrt{x}}{x^2} dx$  равен ...

2.16. Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке. Ответ округлить до сотых.



2.17. Площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 - 4$ ;  $y = -2x - 1$ , равна ...

2.18. Работа силы  $F(x) = \frac{4}{x^2}$  по перемещению мат. точки вдоль оси  $Ox$  из точки  $x = -2$  в точку  $x = -1$ , равна ...

2.19. Постоянная  $C$  в частном решении дифференциального уравнения  $y \cdot y' = 4x^3$  при  $y(5) = 2$  равна ...

2.20. Сумма ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{5^n}$  равна ...

2.21. Частичная сумма  $S_2$  ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{15}{2n+1}$  равна...

2.22. Если  $n$ -ая частичная сумма ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  имеет вид  $S_n = \frac{15(n-1)}{n+1}$ ,

то сумма  $a_3 + a_4$  равна ...

2.23. Если решение  $y = y(x)$  задачи Коши  $y' = 5x + \frac{3}{y}$ ,  $y(0) = 1$  разложено в

степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ , то коэффициент  $c_2$  равен ...

2.24. Коэффициент  $c_2$  разложения функции  $f(x) = \sqrt{3} \operatorname{tg} x$  в степенной ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^n$  равен ...

2.25. Коэффициент  $b_2$  разложения функции  $f(x) = x + 1$  в ряд Фурье на отрезке  $[-\pi; \pi]$  равен ...

### 3. Вопросы на установление последовательности.

3.1. Ниже дано определение предела  $A$  функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  (в случае  $A \in \mathbb{R}$  и  $x_0 \in \mathbb{R}$ ). Вставьте вместо пропусков верную последовательность математических записей (Например, I, III, IV, II).

Число  $A$  называется пределом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ , если \_\_\_\_\_ существует \_\_\_\_\_ такое, что для всех  $x_0 \in D(f)$ , удовлетворяющих условию \_\_\_\_\_, выполняется условие \_\_\_\_\_.

I.  $|f(x) - A| < \varepsilon$

II. для любого числа  $\varepsilon > 0$

III.  $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$

IV.  $\delta(\varepsilon) > 0$

3.2. Ниже дано определение функции  $f(x)$ , бесконечно большой в действительной точке  $x_0$ . Вставьте вместо пропусков верную последовательность математических записей (Например, I, III, IV, II).

Функция  $f(x)$  называется бесконечно большой в точке  $x_0$ , если \_\_\_\_\_ существует \_\_\_\_\_ такое, что для всех  $x_0 \in D(f)$ , удовлетворяющих условию \_\_\_\_\_, выполняется условие \_\_\_\_\_.

I.  $\delta(\varepsilon) > 0$

II.  $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$

III.  $|f(x)| > \varepsilon$

IV. для любого числа  $\varepsilon > 0$

3.3. Ниже дано определение функции  $f(x)$ , бесконечно малой в действительной точке  $x_0$ . Вставьте вместо пропусков верную последовательность математических записей (Например, I, III, IV, II).

Функция  $f(x)$  называется бесконечно малой в точке  $x_0$ , если \_\_\_\_\_ существует \_\_\_\_\_ такое, что для всех  $x_0 \in D(f)$ , удовлетворяющих условию \_\_\_\_\_, выполняется условие \_\_\_\_\_.

I.  $\delta(\varepsilon) > 0$

II.  $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$

III.  $|f(x)| < \varepsilon$

IV. для любого числа  $\varepsilon > 0$

3.4. Ниже сформулировано следствие теоремы о промежуточных значениях функций (следствие теоремы Больцмана-Коши). Вставьте вместо пропусков верную последовательность математических записей (Например, I, III, IV, II).

Пусть функция  $f(x)$  \_\_\_\_\_, на концах отрезка \_\_\_\_\_, тогда \_\_\_\_\_, где выполняется условие \_\_\_\_\_.

- I. принимает значение разных знаков
- II. существует точка  $c \in (a, b)$
- III. непрерывна на отрезке  $[a, b]$
- IV.  $f(c) = 0$

3.5. Расположите последовательность действий при нахождении производной функции по определению.

- 1) зафиксировать  $x$ , вычислить значение функции  $f(x)$
- 2) найти приращение функции  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$
- 3) дать аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$  и вычислить значение функции  $f(x + \Delta x)$
- 4) найти предел  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- 5) определить отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

3.6. Расположите последовательность действий при нахождении производной функции  $y = (\sin x)^{\cos x}$ .

- 1) найти производные обеих частей равенства
- 2) прологарифмировать обе части равенства
- 3) воспользоваться правилом нахождения производной сложной функции
- 4) воспользоваться свойством  $\ln|a^b| = b \cdot \ln|a|$
- 5) заменить  $y$  исходной функцией

3.7. Расположите последовательность действий при нахождении частной производной  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  функции  $z = \ln(3xy - x^3)$ .

- 1)  $\frac{-6x(3xy - x^3) - (3y - 3x^2)(3y - 3x^2)}{(3xy - x^3)^2}$
- 2)  $\frac{(3xy - x^3)'}{3xy - x^3}$
- 3)  $(\ln(3xy - x^3))'_x$
- 4)  $\left(\frac{3y - 3x^2}{3xy - x^3}\right)'_x$
- 5)  $\frac{(3y - 3x^2)'(3xy - x^3) - (3y - 3x^2)(3xy - x^3)'}{(3xy - x^3)^2}$
- 6)  $\frac{3y - 3x^2}{3xy - x^3}$

3.8. Расположите последовательность действий при исследовании функции двух переменных на экстремум.

- 1) вычисляем значения  $A, B, C$
- 2) вычисляем  $z_0(x_0; y_0)$
- 3) определяем стационарные точки
- 4) находим частные производные функции первого и второго порядков
- 5) определяем, минимум или максимум имеется в точке экстремума
- 6) вычисляем значение  $\Delta$

7) определяем наличие точки экстремума

3.9. Расположите последовательность действий при вычислении неопределённого интеграла  $\int \frac{(4-5x)^2}{x} dx$ .

- 1) используем таблицу неопределённых интегралов
- 2) используем формулу квадрата разности
- 3) используем свойство неопределённого интеграла<sup>^</sup>  
 $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- 4) используем почленное деление

3.10. Расположите последовательность действий при вычислении неопределённого интеграла  $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{x}}$ .

- 1)  $\frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + C$
- 2)  $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C$
- 3)  $\int \frac{dx}{x^{\frac{4}{3}}}$
- 4)  $\int x^{-\frac{4}{3}} dx$
- 5)  $\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{1}{3}}} + C$
- 6)  $\int \frac{dx}{x \cdot x^{\frac{2}{3}}}$

3.11. Вставьте вместо пропусков верную последовательность математических записей, чтобы получилась формулировка определения неопределенного интеграла. (Например, I, III, IV, II.)

Если функция  $F(x)$  – \_\_\_\_\_ функции  $f(x)$  на промежутке  $X$ , то множество функций  $F(x)+C$ , где  $C$  – произвольная постоянная, называется \_\_\_\_\_ от функции  $f(x)$  на этом промежутке и обозначается символом  $\int f(x) dx$ . При этом  $f(x)$  называется \_\_\_\_\_,  $f(x)dx$  называется \_\_\_\_\_.

- I. подынтегральной функцией
- II. первообразная
- III. подынтегральным выражением
- IV. неопределенным интегралом

3.12. Запишите верную последовательность действий, которую требуется совершить для вычисления интеграла  $\int x \cdot \cos x dx$ .

- 1) Вычислить  $du$  и  $v$
- 2) Установить, что нужно взять за  $u$ , а что за  $dv$
- 3) Определить, относится ли интеграл к типу интегралов, интегрируемых по частям

- 4) Воспользоваться формулой  $\int u dv = uv - \int v du$ , подставив вместо  $u$ ,  $dv$ ,  $du$  и  $v$  их значения.

3.13. Запишите верную последовательность действий, которую требуется совершить для вычисления интеграла  $\int \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 1}{x(x-1)} dx$ .

- 1) Проинтегрировать  $Q(x)$  и полученные простейшие дроби и сложить результаты
- 2) Определить вид разложения  $\frac{R(x)}{x(x-1)}$  дроби на простейшие дроби
- 3) Выполнить деление многочлена в числителе подынтегральной функции на многочлен в знаменателе, то есть представить подынтегральную функцию в виде  $f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{x(x-1)}$
- 4) Вычислить коэффициенты в разложении дроби  $\frac{R(x)}{x(x-1)}$  на простейшие дроби, воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов

3.14. Вставьте вместо пропусков верную последовательность математических записей, чтобы получилась формулировка одного из свойств определенного интеграла. (Например, I, III, IV, II)

Если  $m$  и  $M$  – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции  $f(x)$  на \_\_\_\_\_, то \_\_\_\_\_  $\leq$  \_\_\_\_\_  $\leq$  \_\_\_\_\_.

- I.  $M(b-a)$
- II.  $m(b-a)$
- III.  $\int_a^b f(x) dx$
- IV.  $[a, b]$

3.15. Ниже сформулирован геометрический смысл определенного интеграла  $\int_a^b f(x) dx$  для случая  $f(x) \geq 0$ . Вставьте вместо пропусков верную последовательность математических записей, чтобы утверждение оказалось верным (Например, I, III, IV, II.)

Определенный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  выражает площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху \_\_\_\_\_, снизу \_\_\_\_\_, слева \_\_\_\_\_, справа \_\_\_\_\_.

- I. прямой  $x = a$
- II. прямой  $x = b$
- III. графиком функции  $y = f(x)$
- IV. осью  $Ox$

3.16. Запишите верную последовательность действий, которую требуется совершить для нахождения площади фигуры, ограниченной линиями, задаваемыми уравнениями:  $y = 2x$ ,  $y = -x^2 + 4x$ .

- 1) Построить указанные линии в прямоугольной декартовой системе координат.
- 2) Найти  $a$  и  $b$  – пределы интегрирования, для этого определить абсциссы точек пересечения указанных линий.
- 3) Определив, график какой из функций лежит выше, воспользоваться формулой:  $S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ .
- 4) Вычислить определенный интеграл, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница.

3.17. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^5} dx$ . Укажите верную последовательность математических действий, которые для этого нужно совершить.

- 1) Сделать вывод о расходимости интеграла  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^5} dx$ .
- 2) Доказать, что расходится хотя бы один из интегралов:  $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^5} dx$  или  $\int_0^1 \frac{1}{x^5} dx$ .
- 3) Представить интеграл в виде  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^5} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^5} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^5} dx$ .
- 4) Установить, что подынтегральная функция не определена в точке  $x=0$ , в окрестности которой она не ограничена.

3.18. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ . Укажите верную последовательность математических действий, которые для этого нужно совершить.

- 1) Доказать, что сходятся оба интеграла:  $\int_{-\infty}^a \frac{1}{1+x^2} dx$  или  $\int_a^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ .
- 2) Представить интеграл в виде  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^a \frac{1}{1+x^2} dx + \int_a^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ .
- 3) Установить, что данный интеграл является несобственным по бесконечному промежутку.
- 4) Сделать вывод о сходимости интеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ .

3.19. Ниже сформулирован признак сравнения несобственных интегралов.

Вставьте вместо пропусков верную последовательность математических записей, чтобы утверждение оказалось верным (Например, I, III, IV, II.)

Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  \_\_\_\_\_ на  $[a, +\infty)$  и удовлетворяют на нем условию \_\_\_\_\_, то из сходимости интеграла \_\_\_\_\_ следует сходимость интеграла \_\_\_\_\_.

- I.  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$
- II.  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$
- III.  $0 \leq f(x) \leq g(x)$
- IV. непрерывны

3.20. Ниже сформулированы факты о сходимости и расходимости числовых рядов. Вставьте вместо пропусков верную последовательность математических записей, чтобы утверждения оказались верными (Например, I, III, IV, II.)

Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  \_\_\_\_\_, то \_\_\_\_\_. Если \_\_\_\_\_, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- 
- I. *расходится*
  - II. *сходится*
  - III.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
  - IV.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$

3.21. Ниже сформулирован интегральный признак сходимости числовых рядов. Вставьте вместо пропусков верную последовательность математических записей. (Например, I, III, IV, II.)

Пусть дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ , члены которого являются значениями некоторой функции  $f(x)$ , \_\_\_\_\_ на \_\_\_\_\_. Тогда, если \_\_\_\_\_ сходится (расходится), то сходится (расходится) и \_\_\_\_\_.

- I.  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$
- II.  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$
- III.  $[1, +\infty)$
- IV. *положительной, непрерывной и не возрастающей*

3.22. Запишите последовательность действий, которую нужно применить при исследовании гармонического ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  на сходимость с помощью интегрального признака сходимости

- 1) Сделать вывод о расходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
- 2) Ввести в рассмотрение функцию  $f(x) = \frac{1}{x}$

- 3) Установить, что интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  расходится
- 4) Доказать, что функция  $f(x)$  является положительной, непрерывной, убывающей на  $[1, +\infty)$

3.23. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n^2}$ .

Запишите верную последовательность действий, которая при этом должна быть осуществлена.

- 1) Применить теорему Лейбница
- 2) Сделать вывод, является ряд абсолютно сходящимся или нет
- 3) Выбрать признак сходимости ряда с положительными членами и воспользоваться им
- 4) Составить ряд из модулей членов данного ряда

3.24. Запишите верную последовательность действий при нахождении области

сходимости степенного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^{n+1}}$ .

- 1) Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости
- 2) Записать интервал сходимости ряда
- 3) Найти радиус сходимости ряда
- 4) Сделать вывод о том, входят ли концы интервала сходимости в область сходимости ряда

3.25. Ниже сформулирована теорема Абеля для ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ . Вставьте

вместо пропусков верную последовательность математических записей. (Например, I, III, IV, II.)

Если ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  сходится при  $x = a$ , то он \_\_\_\_\_ для всех  $x$ ,

удовлетворяющих условию \_\_\_\_\_. Если степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  расходится при  $x = a$ , то он \_\_\_\_\_ для всех  $x$ , удовлетворяющих условию \_\_\_\_\_.

I.  $|x - x_0| < |a|$

II.  $|x - x_0| > |a|$

III. *сходится*

IV. *расходится*



#### 4. Вопросы на установление соответствия.

4.1. Даны числовые промежутки  $A = [3; 5)$  и  $B = [0; 3]$ .

Выполнить операции над множествами и установить соответствие.

1) $A \cap B$	а) $[0; 5)$
2) $A \cup B$	б) $\emptyset$
3) $A \setminus B$	в) $(3; 5)$
4) $B \setminus A$	г) $[3; 5)$
	д) $\{3\}$

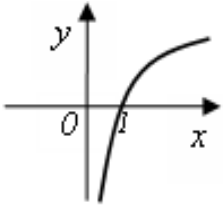
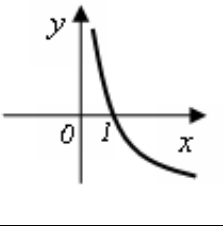
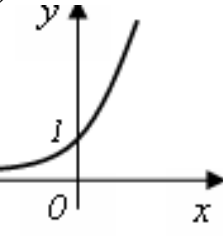
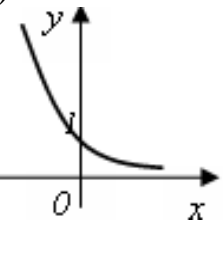
4.2. Установить соответствие между пределами и неопределенностями, обнаруженными в каждом из них

1) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi x}{2} \right)$	а) неопределённость $\left( \frac{0}{0} \right)$
2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 2x^2 + 8}{3x^3 + 5x^2 - 10}$	б) неопределённость $\left( \frac{\infty}{\infty} \right)$
3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$	в) неопределённость $(1^\infty)$
4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x-1} \right)^{3-4x}$	г) неопределённость $(0 \cdot \infty)$
	д) неопределённость $(\infty + \infty)$

4.3. Установить соответствие между пределами и их значениями

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + 2x^2 + 8}{3x^3 + 5x^2 - 10}$	а) 0
2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 2x^2 + 8}{3x^3 + 5x^2 - 10}$	б) $\frac{2}{3}$
3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 2x^2 + 8}{3x^3 + 5x^2 - 10}$	в) $+\infty$
4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + 2x^2 + 8}{3x^5 + 5x^2 - 10}$	г) $-\infty$

4.4. Установить соответствие между графическим и аналитическим заданиями функций.

<p>1)</p> 	<p>а) <math>y = 2^x</math></p> <p>б) <math>y = (0,5)^x</math></p>
<p>2)</p> 	<p>в) <math>y = \log_2 x</math></p> <p>г) <math>y = \log_{0,5} x</math></p>
<p>3)</p> 	<p>д) <math>y = x^{\frac{1}{2}}</math></p>
<p>4)</p> 	

4.5. Исследуйте данные ниже функции на ограниченность и установите соответствие.

<p>1) <math>y = 3^x</math></p> <p>2) <math>y = -x^2 + 3x</math></p> <p>3) <math>y = \operatorname{tg} x</math></p> <p>4) <math>y = \sin x</math></p>	<p>а) ограничена сверху, не ограничена снизу</p> <p>б) ограничена снизу, не ограничена сверху,</p> <p>в) ограничена и сверху, и снизу</p> <p>г) не ограничена ни сверху, ни снизу</p>
--	---

4.6. Исследуйте данные ниже функции на четность и периодичность и установите соответствие.

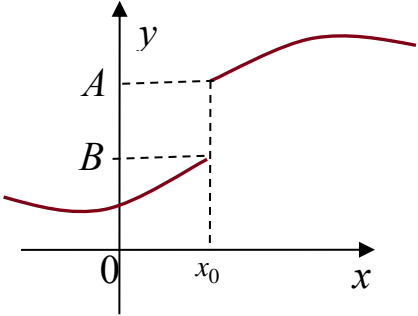
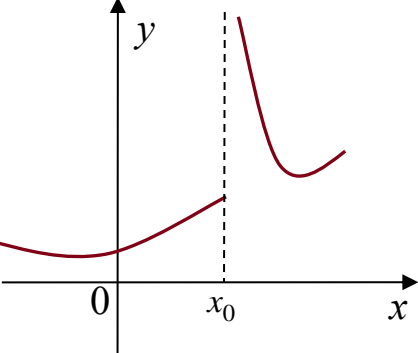
<p>1) <math>y = \arcsin x</math></p>	<p>а) четная, периодическая с периодом <math>T = 2\pi</math></p>
--------------------------------------	--

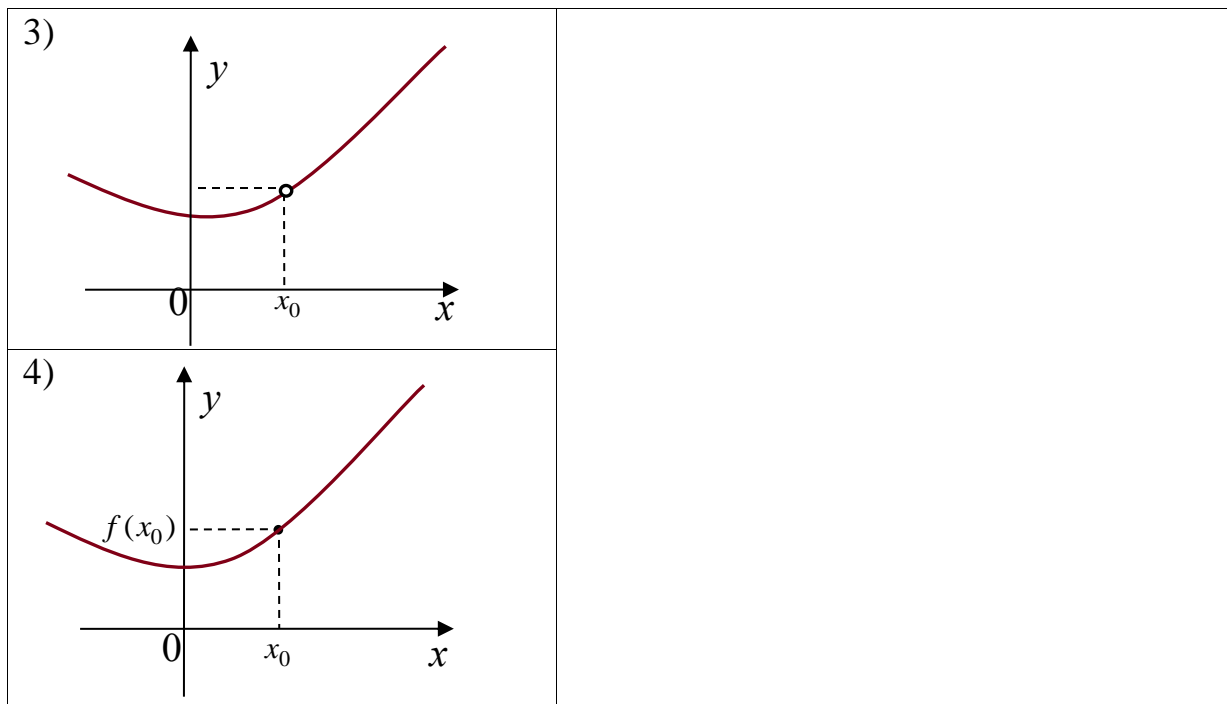
2) $y = \cos x$	б) нечетная, периодическая с периодом $T = 2\pi$
3) $y = \operatorname{tg} x$	в) четная, периодическая с периодом $T = \pi$
4) $y = \sin x$	г) нечетная, периодическая с периодом $T = \pi$
	д) нечетная, не периодическая

4.7. Исследуйте данные ниже функции на монотонность и установите соответствие.

1) $y = \arccos x$	а) возрастает на $(-\infty, +\infty)$
2) $y = (x - 1)^2$	б) убывает на $(-\infty, +\infty)$
3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	в) убывает на $[-1, 1]$
4) $y = \operatorname{arctg} x$	г) убывает на $(-\infty, 1]$ и возрастает на $[1, +\infty)$
	д) нечетная, не периодическая

4.8. Пользуясь графиками функций, исследуйте вопрос о непрерывности функции в точке  $x_0$  и поставьте в соответствие каждой указанной точке  $x_0$  ее характеристику.

1) 	а) $x_0$ – точка непрерывности функции б) $x_0$ – точка устранимого разрыва 1го рода
2) 	в) $x_0$ – точка неустраняемого разрыва 1го рода г) $x_0$ – точка разрыва 2го рода



4.9. Исследуйте вопрос о непрерывности функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ (x+1)^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ -x+4, & 2 < x < 3, x > 3 \\ 4, & x = 3 \end{cases}$$

в точках, указанных в левой колонке, и установите соответствие

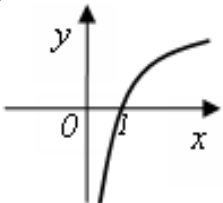
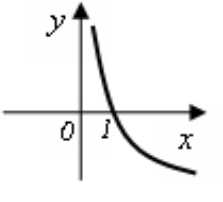
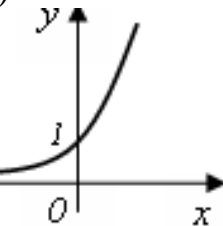
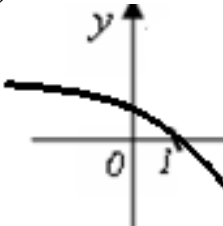
1) $x = 0$	а) точка непрерывности функции
2) $x = 1$	б) точка устранимого разрыва 1го рода
3) $x = 2$	в) точка неустранимого разрыва 1го рода
4) $x = 3$	г) точка разрыва 2го рода

4.10. Установить соответствие между функцией  $y = f(x)$  и способом нахождения ее первой производной  $y'$ .

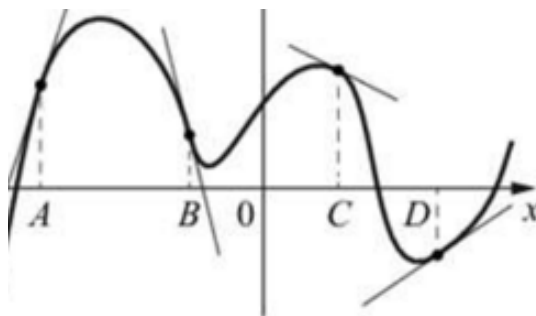
1) $y = \sin(\sqrt{x+1}-2)$	1) логарифмическое дифференцирование
2) $y = x \cdot \lg x$	2) табличная производная
3) $y = (\log_2 x)^{\cos x}$	3) производная неявно заданной функции
	4) производная произведения
	5) производная сложной функции

4) $y = x^6$	
--------------	--

4.11. Установить соответствие между графиками функций и знаками первой и второй производной этих функций

1) 	a) $y' > 0, y'' > 0$ б) $y' < 0, y'' < 0$
2) 	в) $y' > 0, y'' < 0$ г) $y' < 0, y'' > 0$
3) 	
4) 	

4.12. На рисунке изображен график функции и касательные к нему, проведенные в точках с абсциссами А, В, С, D. Поставьте в соответствие каждой точке значение ее производной в этой точке.



1) A	а) - 4
2) B	б) 3
3) C	в) -0,5
4) D	г) 0,7

4.13. Вычислите значения частных производных функции  $z = 4x^2 - xy^3 + 5y$  в точке  $M_0(1; -1)$  и установите соответствие.

1) $\frac{\partial z}{\partial x} \Big _{M_0}$	а) -3
2) $\frac{\partial z}{\partial y} \Big _{M_0}$	б) 8
3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big _{M_0}$	в) 2
4) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big _{M_0}$	г) 6
5) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big _{M_0}$	д) 9
	е) 1

4.14. Вычислите значения частных производных функции  $z = 5x^3 - 3xy^2 - 2y$  в точке  $M_0(1; 2)$  и установите соответствие

1) $\frac{\partial z}{\partial x} \Big _{M_0}$	а) 30
2) $\frac{\partial z}{\partial y} \Big _{M_0}$	б) -14
3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big _{M_0}$	в) -12
4) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big _{M_0}$	г) -6
5) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big _{M_0}$	д) -4
	е) 3

4.15. Установите соответствие между функциями, записанными в левой колонке, и их первообразными в правой колонке

1) $\frac{1}{x^2}$	а) $\frac{x^2}{4}$
2) $\frac{x}{2}$	б) $\ln x  + x^2$

3) $3x^2$	в) $\frac{1}{x^2} + 2$
4) $\frac{1}{x} + 2x$	г) $-\frac{1}{x}$
	д) $x^3$

4.16. Установите соответствие между интегралами и их значениями

1) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$	а) $\frac{1}{2a} \ln \left  \frac{a+x}{a-x} \right  + c$
2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	б) $\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$
3) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	в) $\operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + c$
4) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	г) $\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$
	д) $\ln \left  x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right  + c$

4.17. Установите соответствие между неопределенными интегралами, записанными в левой колонке, и равными им выражениями в правой колонке

1) $\int Af(x)dx$	а) $\int f dx \pm \int g dx$
2) $\int (f \pm g)dx$	б) $f(x)$
3) $\left( \int f(x)dx \right)$	в) $A \int f(x)dx$
4) $\int dF(x)$	г) $F(x) + C$
	д) $f(x)dx$

4.18. Установите соответствие между неопределенными интегралами и заменами, которые целесообразно применить для вычисления интегралов

1) $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx$	а) $t = \operatorname{tg} x$
2) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$	б) $t = \operatorname{ctg} x$
3) $\int \sin^4 x \cdot \cos x dx$	в) $t = \sin x$
4) $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} dx$	г) $t = \cos x$
	д) $t = \cos^2 x$

4.19. Установите соответствие между интегралом и способом его вычисления.

1) $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^5 x}$	а) использование почленного деления
2) $\int (x + 1) \sin x dx$	б) подведение под знак дифференциала
3) $\int 5^x dx$	в) использование формулы $\int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} \int f(t) dt$
4) $\int \frac{3+x}{x} dx$	г) непосредственное интегрирование
	д) метод интегрирования по частям

4.20. Установите соответствие между дифференциальным уравнением и его решением.

1) $y'' + y' - 6y = 0$	а) $y = e^{\alpha x} (C_1 \cdot \cos(\beta x) + C_2 \cdot \sin(\beta x))$
2) $y'' - 10y' + 29y = 0$	б) $y = e^{kx} (C_1 + C_2 x)$
3) $y'' - 10y' + 25y = 0$	в) $y = C_1 \cdot \cos(\beta x) + C_2 \cdot \sin(\beta x)$
4) $y'' + 25y = 0$	г) $y = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x}$
	д) $y = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2$

4.21. Установить соответствие между числовыми рядами и признаками сходимости, которые целесообразно применять для исследования вопроса об их сходимости

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n}$	а) признак сравнений
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5 + 1}$	б) необходимый признак сходимости
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{(n+2)!}$	в) радикальный признак Коши
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^2}$	г) признак Даламбера
	д) теорема Лейбница

4.22. Установить соответствие между степенными рядами и областями их сходимости



1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot n!$	а) $(-\infty; \infty)$
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	б) $\{0\}$
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$	в) $[-1, 1]$
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$	г) $(-1, 1)$
	д) $[-1, 1)$

4.23. Установить соответствие между функциями и их разложением в степенной ряд

1) $\ln(1+x)$	а) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$
2) $\frac{1}{1-x}$	б) $\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$
3) $e^x$	в) $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$
4) $\arctg x$	г) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots$
	д) $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

4.24. Установить соответствие между функциональными рядами и их суммой

1) $x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$	а) $e^x$
2) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$	б) $\frac{1}{1+x}$
3) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots$	в) $\arctg x$
4) $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$	г) $\arcsin x$
	д) $\ln(1+x)$

4.25. Известно, что функцию, заданную на отрезке  $[-\pi, \pi]$  можно разложить в ряд Фурье, то есть представить в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx).$$

Установить соответствие между коэффициентами Фурье и формулами, по которым они вычисляются.

1) $a_0$	а) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$
2) $a_n$	б) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx$
3) $b_n$	в) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx$
	г) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx$
	д) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx$

**Шкала оценивания результатов тестирования:** в соответствии с действующей в университете балльно-рейтинговой системой оценивание результатов промежуточной аттестации обучающихся осуществляется в рамках 100-балльной шкалы, при этом максимальный балл по промежуточной аттестации обучающихся по очной форме обучения составляет 36 баллов, по очно-заочной и заочной формам обучения – 60 баллов (установлено положением П 02.016).

Максимальный балл за тестирование представляет собой разность двух чисел: максимального балла по промежуточной аттестации для данной формы обучения (36 или 60) и максимального балла за решение компетентностно-ориентированной задачи (6).

Балл, полученный обучающимся за тестирование, суммируется с баллом, выставленным ему за решение компетентностно-ориентированной задачи.

Общий балл по промежуточной аттестации суммируется с баллами, полученными обучающимся по результатам текущего контроля успеваемости в течение семестра; сумма баллов переводится в оценку по 5-балльной шкале (для экзамена) следующим образом:

Соответствие 100-балльной и 5-балльной шкал

Сумма баллов по 100-балльной шкале	Оценка по 5-балльной шкале
100–85	отлично
84–70	хорошо
69–50	удовлетворительно
49 и менее	неудовлетворительно

**Критерии оценивания результатов тестирования:**

Каждый вопрос (задание) в тестовой форме оценивается по дихотомической шкале: выполнено – **2 балла**, не выполнено – **0 баллов**.

## 2.2 КОМПЕТЕНТНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ

### Компетентностно-ориентированная задача №1

Составить функцию прибыли и построить её график, если известно, что фиксированные издержки производства продукции составляют 10 тыс. руб. в месяц, переменные издержки – 30 руб. за единицу продукции, а выручка равна 50 руб. за единицу продукции.

### Компетентностно-ориентированная задача №2

Законы спроса и предложения на некоторый товар определяются уравнениями  $D = 12 - 2Q$  и  $S = Q + 3$ .

- а) Найти точку рыночного равновесия.
- б) Найти точку равновесия после введения налога, равного 3 ден. ед. на единицу продукции. Определить увеличение цены и уменьшение равновесного объёма продаж. Посчитать доход государства после введения этого налога.

### Компетентностно-ориентированная задача №3

Законы спроса и предложения на некоторый товар определяются уравнениями  $D = 12 - 2Q$  и  $S = Q + 3$ .

- а) Какая субсидия приведёт к увеличению объёма продаж на 2 единицы?
- б) Вводится пропорциональный налог, равный 20%. Найти новую точку равновесия в доход правительства.

### Компетентностно-ориентированная задача №4

В прошлом году средняя цена данного товара была 15 денежных единиц, а в настоящем году – 18 денежных единиц. Найти зависимость  $P = f(n)$  цены товара  $P$  от номера года  $n$  при условии, что тенденция роста сохраниться, то есть цена будет увеличиваться на одно и то же число. Составить прогноз средней цены на три года вперед.

### Компетентностно-ориентированная задача №5

Цена за единицу товара зависит от объёма заказа и определяется следующим образом.

1. Если объём заказа не превышает 4 000 единиц товара, то цена единицы товара равна 300 рублей.

2. Если объём заказа превышает 4 000 единиц товара, то на каждую единицу товара от цены 300 рублей предоставляется скидка в размере  $\frac{x-4000}{50}$  рублей, где  $x$  –

количество единиц товара в заказе.

Определить наибольшую выручку в руб., которую сможет получить фирма (объём заказа не может превышать 16 000 единиц товара). Ответ записать в виде:  $R(x_0) = R_0$ .

### Компетентностно-ориентированная задача №6

Цена за единицу товара зависит от объёма заказа и определяется так:

1. Если объём заказа не превышает 3 000 единиц товара, то цена единицы товара равна 200 рублей.

2. Если объём заказа превышает 3 000 единиц товара, то на каждую единицу товара от цены 200 рублей предоставляется скидка в размере  $\frac{x-3000}{100}$  рублей, где  $x$  – количество единиц товара в заказе.

Определить наибольшую выручку в руб., которую сможет получить фирма (объём заказа не может превышать 13 000 единиц товара). Ответ записать в виде:  $R(x_0) = R_0$ .

#### *Компенентностно-ориентированная задача №7*

Зависимость количества  $Q$  (в шт.,  $0 \leq Q \leq 30\,000$ ) купленного у фирмы товара от цены  $P$  (в руб. за шт.) выражается формулой  $Q = 30\,000 - P$ . Затраты на производство  $Q$  единиц товара составляют  $5\,000Q + 3\,000\,000$  руб. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог  $t$  руб. ( $0 < t < 15\,000$ ) с каждой произведённой единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет  $PQ - 5\,000Q - 3\,000\,000 - tQ$  руб., а общая сумма налогов, собранных государством, равна  $tQ$  руб.

Фирма производит такое количество товара, при котором её прибыль максимальна. При каком значении  $t$  (в руб.) общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

#### *Компенентностно-ориентированная задача №8*

Предприятие выпускает и реализует продукцию в объёме  $Q$  ед. Известны функция затрат  $C(Q) = 1,92 \cdot Q^3 + 4,32 \cdot Q^2 + 2,88 \cdot Q + 15$  и функция цены продукции  $P(Q) = -1,44 \cdot Q + 89,28$ . Требуется определить максимальную прибыль предприятия.

#### *Компенентностно-ориентированная задача №9*

Предприятие выпускает и реализует продукцию в объёме  $Q$  ед. Известны функция затрат  $C(Q) = 1,92 \cdot Q^3 + 4,32 \cdot Q^2 + 2,88 \cdot Q + 15$  и функция цены продукции  $P(Q) = -1,44 \cdot Q + 89,28$ . Требуется определить объём продукции и цену, соответствующие максимальной прибыли.

#### *Компенентностно-ориентированная задача №10*

Предприятие выпускает и реализует продукцию в объёме  $Q$  ед. Известны функция затрат  $C(Q) = 1,92 \cdot Q^3 + 4,32 \cdot Q^2 + 2,88 \cdot Q + 15$  и функция цены продукции  $P(Q) = -1,44 \cdot Q + 89,28$ . Требуется определить средние и предельные затраты, соответствующие максимальной прибыли.

#### *Компенентностно-ориентированная задача №11*

Предприятие выпускает и реализует продукцию в объёме  $Q$  ед. Известны функция затрат  $C(Q) = 1,92 \cdot Q^3 + 4,32 \cdot Q^2 + 2,88 \cdot Q + 15$  и функция цены

продукции  $P(Q) = -1,44 \cdot Q + 89,28$ . Требуется определить участки роста и убывания прибыли при изменении объёма выпускаемой продукции от 2 до 5 ед.

*Компенентностно-ориентированная задача №12*

Предприятие выпускает и реализует продукцию в объёме  $Q$  ед. Известны функция затрат  $C(Q) = 1,92 \cdot Q^3 + 4,32 \cdot Q^2 + 2,88 \cdot Q + 15$  и функция цены продукции  $P(Q) = -1,44 \cdot Q + 89,28$ . Требуется определить наименьшее значение затрат при изменении объёма выпускаемой продукции от 2 до 5 ед.

*Компенентностно-ориентированная задача №13*

Потребитель имеет возможность потратить сумму в размере 1000 ден. ед. на приобретение  $x$  единиц первого товара и  $y$  единиц второго товара. Заданы функция полезности  $u(x, y) = 0,5 \cdot \ln(x - 2) + 2 \ln(y - 1)$  и цены  $P_1 = 0,2$  и  $P_2 = 4$  за единицу товаров. Определить количество единиц товаров, при которых полезность для потребителя будет наибольшей.

*Компенентностно-ориентированная задача №14*

Вычислить на сколько процентов приближённо изменится спрос, описываемый функцией  $D = e^{-\sqrt{n+P^2}}$ , где  $n$  – число производителей товара,  $P$  – цена товара, если число производителей товара уменьшится на 1%, а цена возрастет на 1%. На рынке имеется 7 производителей, цена товара составляет 3 ед.

*Компенентностно-ориентированная задача №15*

Данные о росте индекса Доу-Джонса и росте цены акций (усл. ед.) приведены в таблице:

$x$	2,0	2,5	3,0	3,1	3,5	3,7	4,3
$y$ (усл. ед.)	4,3	4,6	4,7	4,7	4,9	5,1	4,6

Методом наименьших квадратов найти зависимость вида  $y = ax + b$  между ростом цены акций  $y$  и ростом индекса  $x$ . Вычислить рост цены акции при росте индекса, равном 2,6.

*Компенентностно-ориентированная задача №16*

По данным исследований в распределении доходов одной из стран, кривая Лоренца может быть описана уравнением  $y = \frac{3}{2-x} - \frac{5}{3}$ , где  $x$  – доля населения,  $y$  – доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джинни, оценить распределение доходов 40% наиболее низко оплачиваемого населения.

*Компенентностно-ориентированная задача №17*

Из статистических данных известно, что для рассматриваемого региона число новорожденных и число умерших за единицу времени пропорциональны численности населения с коэффициентами пропорциональности соответственно  $k_1$  и  $k_2$ . Найти закон изменения численности населения с течением времени (описать протекание демографического процесса).

### Компенентностно-ориентированная задача №18

Найти выражение объёма реализованной продукции  $Q = Q(t)$  и его значение при  $t = 2$ , если известно, что продукция продаётся на конкурентном рынке по цене  $P(Q) = 3 - 2Q$ , норма акселерации  $\frac{1}{l} = 1,5$ , норма инвестиций  $m = 0,6$ ,  $P(0) = 1$ .

Пояснение: полученный на момент времени  $t$  доход составит  $R(Q) = Q \cdot P(Q)$ , часть которого, равная  $I(t) = m \cdot P(Q) \cdot Q$ , инвестируется в производство при норме инвестиции  $m$ . В результате расширения производства (предполагается полная реализация производимой продукции) будет получен прирост дохода, часть которого опять инвестируется для расширения выпуска продукции. Это приведет к росту скорости выпуска (акселерации), причём скорость выпуска пропорциональна увеличению инвестиций с коэффициентом пропорциональности  $l$ , т.е.  $Q'(t) = l \cdot I(t)$ , где  $l^{-1}$  – норма акселерации.

### Компенентностно-ориентированная задача №19

Известно, что начальный размер вклада под 10% годовых в банке составил 1 млн. рублей. Найти размер вклада через 5 лет: а) без капитализации процентов, б) с ежегодной капитализацией, в) с ежеквартальной капитализацией, г) с ежемесячной капитализацией, д) с ежедневной капитализацией, е) с непрерывной капитализацией.

### Компенентностно-ориентированная задача №20

Кооператив открывает линию по производству жестяных консервных банок объемом 0,25 литра для последующей расфасовки в них консервированного горошка. В качестве инженера-экономиста рассчитайте такие радиус основания  $x$  и высоту  $y$  консервной банки, чтобы на ее изготовление потребовалось минимум материала. Напомним, что  $1 \text{ л} = 1000 \text{ см}^3$ .

### Компенентностно-ориентированная задача №21

В таблице приведены данные численности занятого населения ( $x$ , млн.) и валового выпуска продукции ( $y$ , у.е.).

$x_i$	80	82	83	84	85	86	88	89	90	91
$y_i$	32	34	35	36	36	37	38	40	39	40

В предположении, что между  $x$  и  $y$  существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии  $y = kx + b$  методом наименьших квадратов. Спрогнозировать валовой выпуск продукции в случае, если занятое население увеличится на 10% по сравнению с последними данными (90 млн.)

### Компенентностно-ориентированная задача №22

Торговое предприятие имеет сеть, состоящую из 10 магазинов, информация о деятельности которых: годовой товарооборот ( $y$ , млн. руб.) и торговая площадь ( $x$ , тыс. м<sup>2</sup>) представлена в таблице.

$x_i$	0,24	0,41	0,55	0,58	0,78	0,94	0,98	1,21	1,28	1,32
$y_i$	19,8	38,1	41,0	43,1	56,3	68,5	75,0	89,1	91,1	91,3

В предположении, что между  $x$  и  $y$  существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии  $y = kx + b$  методом наименьших квадратов. Спрогнозировать годовой товарооборот в случае, если торговая площадь составит ровно 1 тыс. м<sup>2</sup>.

*Компетентностно-ориентированная задача №23*

В таблице приведены данные о росте объема выручки ( $y$ , тыс. у.е.) косметической компании в зависимости от числа клиентов ( $x$ ).

$x_i$	900	950	1000	1040	1080	1100	1120	1130	1135	1140
$y_i \cdot 10$	992	1101	1203	1289	1381	1432	1478	1505	1514	1530

В предположении, что между  $x$  и  $y$  существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии  $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$  методом наименьших квадратов. Спрогнозировать объем выручки, если число клиентов достигнет 1150 человек.

*Компетентностно-ориентированная задача №24*

В таблице приведены данные о показателях конкуренции ( $x$ ) и средневзвешенные по частоте упоминания количества патентов ( $y$ ).

$x_i$	0,9	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,9
$y_i$	4,5	4,8	5,3	5,9	6,1	6,4	6,1	5,4	4,8	4,3

В предположении, что между  $x$  и  $y$  существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии  $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$  методом наименьших квадратов. Спрогнозировать количество патентов, в случае, если показатель конкуренции составит 1.

*Компетентностно-ориентированная задача №25*

Найти значение цены  $p(t)$ , при котором достигается равновесное состояние рынка, заключающееся в равенстве спроса  $d(t)$  и предложения  $s(t)$ , если  $d(t) = 3p'' - p' - 2p + 18$ ,  $s(t) = 4p'' + p' + 3p + 3$ .

**Шкала оценивания решения компетентностно-ориентированной задачи:**

В соответствии с действующей в университете балльно-рейтинговой системой оценивание результатов промежуточной аттестации обучающихся осуществляется в рамках 100-балльной шкалы, при этом максимальный балл по промежуточной аттестации обучающихся по очной форме обучения составляет 36 баллов, по очно-заочной и заочной формам обучения – 60 (установлено положением П 02.016).

Максимальное количество баллов за решение компетентностно-ориентированной задачи – 6 баллов.

Балл, полученный обучающимся за решение компетентностно-ориентированной задачи, суммируется с баллом, выставленным ему по результатам тестирования.

Общий балл по промежуточной аттестации суммируется с баллами, полученными обучающимся по результатам текущего контроля успеваемости в течение семестра; сумма баллов переводится в оценку по 5-балльной шкале (для экзамена) следующим образом:

Соответствие 100-балльной и 5-балльной шкал

<i>Сумма баллов по 100-балльной шкале</i>	<i>Оценка по 5-балльной шкале</i>
100–85	отлично
84–70	хорошо
69–50	удовлетворительно
49 и менее	неудовлетворительно

***Критерии оценивания решения компетентностно-ориентированной задачи:***

**6-5 баллов** выставляется обучающемуся, если решение задачи демонстрирует глубокое понимание обучающимся предложенной проблемы и разностороннее ее рассмотрение; свободно конструируемая работа представляет собой логичное, ясное и при этом краткое, точное описание хода решения задачи (последовательности (или выполнения) необходимых трудовых действий) и формулировку доказанного, правильного вывода (ответа); при этом обучающимся предложено несколько вариантов решения или оригинальное, нестандартное решение (или наиболее эффективное, или наиболее рациональное, или оптимальное, или единственно правильное решение); задача решена в установленное преподавателем время или с опережением времени.

**4-3 балла** выставляется обучающемуся, если решение задачи демонстрирует понимание обучающимся предложенной проблемы; задача решена типовым способом в установленное преподавателем время; имеют место общие фразы и (или) несущественные недочеты в описании хода решения и (или) вывода (ответа).

**2-1 балла** выставляется обучающемуся, если решение задачи демонстрирует поверхностное понимание обучающимся предложенной проблемы; осуществлена попытка шаблонного решения задачи, но при ее решении допущены ошибки и (или) превышено установленное преподавателем время.

**0 баллов** выставляется обучающемуся, если решение задачи демонстрирует непонимание обучающимся предложенной проблемы, и (или) значительное место занимают общие фразы и голословные рассуждения, и (или) задача не решена.