Лабораторная работа №5

Принцип математической индукции и рекуррентные соотношения

 Цель: Изучить принцип математической индукции и научиться использовать его для доказательства истинности утверждений занумерованных натуральными числами.

Изучить методику использование рекуррентных соотношений для нахождения общего вида функции.

Вопросы, выносимые на практическое занятие

1. Принцип математической индукции.
2. Рекуррентные соотношения.

Краткие теоретические положения

Принцип математической индукции

Принцип математической индукции используется для доказательства истинности утверждений занумерованных натуральными числами. Суть принципа заключается в следующем:

Предположим, что для совокупности утверждений $\left\{n\in N \right\}$ выполнены следующие условия:

1. при n=1 P(1) истинно (база индукции)
2. для любого натурального n из предположения истинности утверждения P(n) следует истинность утверждения P(n+1) (индуктивный переход).

Тогда для любого натурально n утверждение Р(n) истинно.

Рекуррентные соотношения

 На практике часто используют следующий способ задания функции $a\_{n}=a(n)$, где n – неотрицательное целое число.

 Даны значения $a\_{n}$ для нескольких первых значений n, и задано рекуррентное соотношение – формула, позволяющая по предыдущим значениям функции $a\_{n}$ определить последующие значения функции $a\_{n}$. Необходимо найти общую формулу для $a\_{n}$. Ограничимся рекуррентным соотношением вида $a\_{n}=b\*a\_{n-1}+C\*a\_{n-2}$ с постоянными коэффициентами b и c.

По рекуррентному соотношению $a\_{n}=b\*a\_{n-1}+C\*a\_{n-2}$ составляется характеристическое уравнение $λ^{2}=b\*λ+c$.

Если действительные корни $λ\_{1}$ и $λ\_{2}$ характеристического уравнения различны ($λ\_{1}\ne λ\_{2}$), то $a\_{n}=С\_{1}λ\_{1}^{n}+С\_{2}λ\_{2}^{n}$, где $С\_{1} и С\_{2}$ произвольные постоянные. Если характеристическое уравнение имеет только 1 действительный корень $λ$ кратное 2, то $a\_{n}= λ^{n}(С\_{1}\left(n-1\right)+С\_{2})$, где $С\_{1},С\_{2}$ произвольные постоянные.

Зная значения $a\_{0} и a\_{1}$, можно составить систему линейных уравнений и определить значения постоянных $С\_{1} и С\_{2}$, а затем найти общий вид функции $a\_{n}$.

Метод математической индукции

Докажите методом математической индукции истинность следующих формул для любого натурального n.

ВАРИАНТ №1

$1^{2}+…+n^{2}=\frac{n\left(n+1\right)(2n+1)}{6}$ . $\frac{1}{2\*7}+\frac{1}{7\*12}+…+\frac{1}{\left(5n-3\right)\left(5n+2\right)}=\frac{n}{10n+4}$ . $\frac{1}{1\*3}+\frac{1}{3\*5}+…+\frac{1}{\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)}=\frac{n}{2n+1}$ .

 ВАРИАНТ №2 $1^{2}+…+n^{2}=\frac{n\left(n+1\right)(2n+1)}{6}$ . $1\*1!+…+n\*n!=\left(n+1\right)!-1$ . $2^{n}>n^{3}$, при n $>$ 10 .

 ВАРИАНТ №3 $1^{3}+…+n^{3}=(1+…+n)^{2}=(\frac{n(n+1)}{2})^{2}$ **.** $1\*2+2\*3+…+\left(n-1\right)\*n=\frac{\left(n-1\right)\*n\*(n+1)}{3}$ **.** $1+q+q^{2}+…q^{n}=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, где q ≠ 1 – вещественное число.

ВАРИАНТ №4

$1^{3}+…+n^{3}=(1+…+n)^{2}=(\frac{n(n+1)}{2})^{2}$ $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^{2}}+\frac{3}{2^{3}}+…+\frac{n}{2^{n}}=2-\frac{n+2}{2^{n}}$$1+3+5+…+\left(2n-1\right)=n^{2}$

Рекуррентные соотношения

Вариант 1

Известно, что $a\_{n}=7a\_{n-1}-12a\_{n-2}$, $a\_{0}=2,$ $a\_{1}=5.$

Определить общую форму вычисления $a\_{n}$ .

Вариант 2

Известно, что $a\_{n}=8a\_{n-1}-16a\_{n-2}$, $a\_{0}=2,$ $a\_{1}=5.$

Определить общую форму вычисления $a\_{n}$ .

Вариант 3

Известно, что $a\_{n}=8a\_{n-1}-7a\_{n-2}$, $a\_{0}=1,$ $a\_{1}=3.$

Определить общую форму вычисления $a\_{n}$ .

Вариант 4

Известно, что $a\_{n}=10a\_{n-1}-9a\_{n-2}$, $a\_{0}=2,$ $a\_{1}=4.$

Определить общую форму вычисления $a\_{n}$ .