Лабораторная работа №4

Формула включений и исключений и бином Ньютона

Цель: Изучить методику использования формулы включений и исключений для решения задач по определению количества элементов в множестве. Изучить методику разложения выражения $(a+b)^{n}$ по формуле бинома Ньютона.

Вопросы, выносимые на практическое занятие.

1. Формула включений и исключений.
2. Формула бинома Ньютона.
3. Свойства биномиальных коэффициентов.
4. Треугольник Паскаля.

Краткие теоретические положения

Формула включений и исключений

 Пусть даны конечные множества $P\_{1},P\_{2},..P\_{n}$. Количество элементов в этих множествах обозначаем $\left|P\_{1}\right|$,$ \left|P\_{2}\right|$,..$ \left|P\_{n}\right|$.

 Тогда существует следующие правила суммы (формула включений и исключений)

а) $\left|P\_{1}∪P\_{2}\right|=\left|P\_{1}\right|+\left|P\_{2}\right|-\left|P\_{1}∩P\_{2}\right|$

б) $\left|P\_{1}∪P\_{2}∪P\_{3}\right|=\left|P\_{1}\right|+\left|P\_{2}\right|+\left|P\_{3}\right|-\left|P\_{1}∩P\_{2}\right|-\left|P\_{1}∩P\_{3}\right|-\left|P\_{2}∩P\_{3}\right|+\left|P\_{1}∩P\_{2}∩P\_{3}\right|$

в) В случае n множеств правило суммы имеет вид: $\left|P\_{1}∪P\_{2}∪..P\_{n}\right|=\left|P\_{1}\right|$+$\left|P\_{2}\right|+…+\left|P\_{n}\right|-\left(\left|P\_{1}∩P\_{2}\right|+\left|P\_{1}∩P\_{3}\right|+…\left|P\_{n-1}∩P\_{n}\right|\right)+\left(\left|P\_{1}∩P\_{2}∩P\_{3}\right|+\left|P\_{1}∩P\_{2}∩P\_{4}\right|+…\left|P\_{n-2}∩P\_{n-1}∩P\_{n}\right|\right)-…+(-1)^{n-1}\left|P\_{1}∩P\_{2}∩…∩P\_{n}\right|$.

Формула бинома Ньютона

 Для произвольного положительного целого числа n справедлива следующая формула: $(a+b)^{n}=C\_{n}^{0}a^{n-0}b^{0}+C\_{n}^{1}a^{n-1}b^{1}+…+C\_{n}^{n-1}a^{1}b^{n-1}+C\_{n}^{n}a^{0}b^{n-0}=\sum\_{m=0}^{n}C\_{n}^{m}a^{n-m}b^{m}$

 Это формула бинома Ньютона. Коэффициенты $C\_{n}^{m}$ называются биномиальными коэффициентами. При n=2 и n=3 получаем следующие формулы: $(a+b)^{2}=a^{2}+2ab+b^{2}$, $(a+b)^{3}=a^{3}+3a^{2}b+3ab^{2}+b^{3}$.

Свойство биномиальных коэффициентов

1. $C\_{n}^{0}=C\_{n}^{n}=1$
2. $C\_{n}^{m}=C\_{n}^{n-m}$
3. $C\_{n}^{m}=C\_{n-1}^{m-1}+C\_{n-1}^{m}$
4. $\sum\_{m=0}^{n}C\_{n}^{m}=2^{n}$
5. $C\_{n}^{0}+C\_{n}^{2}+C\_{n}^{4}+…=C\_{n}^{1}+C\_{n}^{3}+C\_{n}^{5}+…$

То есть сумма биномиальных коэффициентов с чётными верхними индексами равна сумме биномиальных коэффициентов с нечётными верхними индексами.

Треугольник Паскаля

 Треугольник Паскаля позволяет найти значения биномиальных коэффициентов и имеет общий вид:

 $C\_{0}^{0}$

 $C\_{1}^{0} C\_{1}^{1}$

 $C\_{2}^{0} C\_{2}^{1} C\_{2}^{2}$

$$C\_{3}^{0} C\_{3}^{1} C\_{3 }^{2} C\_{3}^{3}$$

 и так далее…

 Строки под номером n содержит биномиальные коэффициенты разложения бинома $(a+b)^{n}$.

Воспользовавшись свойством $C\_{n}^{m}=C\_{n-1}^{m-1}+C\_{n-1}^{m}$, можно заметить, что каждый внутренний элемент треугольника равен сумме двух соседних элементов, расположенных над ним, а боковые элементы треугольника всегда равны единице.

ВАРИАНТ №1.

1. Из ста учеников девятых классов на первом экзамене получили отличные и хорошие оценки 80%, на втором экзамене - 72%, на третьем - 60%.

Какое может быть наименьшее число учащихся, получивших отличные и хорошие оценки на всех трех первых экзаменах?

1. Каждый из учеников класса в зимние каникулы ровно два раза был в кинотеатре, при этом фильмы А, В, С видели соответственно 25,12 и 23 ученика. Сколько учеников в классе? Сколько из них видели спектакли А и В, А и С, В и С?

ВАРИАНТ №2

1. Экзамен по математике сдавали 250 абитуриентов, оценку ниже пяти получили 180 человек, а выдержали экзамен 210 абитуриентов.

Сколько человек получили оценки 3 и 4?

1. В течении недели по телевизору демонстрировались фильмы: боевик А, вестерн В и мелодрама С. Из 40 студентов, каждый из которых просмотрел либо все три фильма, либо один из трех, фильм А видели 13, фильм В - 16, фильм С -19. Найдите, сколько учеников просмотрели все три фильма.

ВАРИАНТ N3

1. В школе 1400 учеников. Из них 1250 умеют кататься на лыжах, 952 на коньках. Ни на лыжах, ни на коньках не умеют кататься 60 учащихся. Сколько учащихся умеют кататься и на лыжах и на коньках?
2. В 92-процессорном ЭВС 19 микропроцессоров обрабатывают текстовую информацию, 17 - графическую, 11 - символьную, 12 - микропроцессоров одновременно обрабатывают графическую и текстовую, 7 - текстовую и символьную, 5 - графическую и символьную, а часть микропроцессоров одновременно обрабатывают графическую, текстовую и символьную информацию. Сколько микропроцессоров являются универсальными, если при решении задачи не задействованы 67 микропроцессоров.

ВАРИАНТ №4

1. В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 знают французский и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского ни французского языка?

2. Сколько студентов из группы в 30 человек изучают по свободному учебному плану три дисциплины, если известно; 19 студентов изучают по свободному плану Дискретную математику, 17 - алгебру, 11 - матлогику. 12 - Дискретную математику и алгебру, 7 - Дискретную математику и матлогику, 5 - алгебру и матлогику, а пять студентов обучается по типовому плану.

Бином Ньютона

ВАРИАНТ №1

1. Разложить по формуле бином Ньютона$\left(2-\sqrt[7]{x}\right)^{7}$.
2. Найти восьмой член в разложении бинома Ньютона $\left(\frac{1}{X}+\sqrt{X}\right)^{14}$

ВАРИАНТ №2

1. Разложить по формуле бином Ньютона$\left(3+\sqrt[6]{x}\right)^{6}$*.*
2. Найти пятый член разложения бинома$\left(x-\sqrt[7]{x}\right)^{12}$.

ВАРИАНТ №3

1. Разложить по формуле бином Ньютона $(3 -\sqrt[5]{x})^{5}$ .
2. Найдите номер члена разложения $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^{16}$, не содержащего х.

ВАРИАНТ №4

1. Разложить по формуле бином Ньютона $\left(2+\sqrt[8]{x}\right)^{8}$.
2. Сколько членов разложения бинома $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[3]{7})^{36}$ являются целыми числами?