Лабораторная работа №3

Перестановки, размещения и сочетания

 Цель: Изучить определения и формулы расчёта основных понятий комбинаторики (перестановки, размещения и сочетания) и научиться использовать их при решении типовых комбинаторных задач.

 Вопросы, выносимые на практическое занятие.

1. Предмет изучения комбинаторики.
2. Правило произведения в комбинаторике.
3. Понятие факториала. Перестановки без повторений. Перестановки с повторениями.
4. Размещения без повторений и размещения с повторениями.
5. Сочетания без повторений и сочетания с повторениями.

Краткие теоретические положения

 Комбинаторными задачами принято называть задачи, в которых необходимо подсчитать, сколькими способами можно осуществить то или иное требование, выполнить какое-либо условие, сделать тот или иной выбор.

 Факториал от *n* – это функция, определённая на множестве целых положительных чисел и представляющая собой произведение всех натуральных чисел от 1 до *n*, где каждое число встречается только 1 раз *n*!=1×2×3×…× (*n*-1) ×*n*. Заметим, что принято считать 0!=1.

Правило произведения в комбинаторике

 Если 1 элемент множества A может быть выбран n способами, а после него второй элемент – m способами, то выбор того и другого элемента в заданном порядке может быть осуществлен N способами, где: N=n×m.

Перестановки

Перестановки без повторений

 Пусть дано множество вида: A={$a\_{1},a\_{2}…a\_{n}$}. Перестановками без повторений называется упорядоченные последовательности, включающие в себя все элементы множества A точно по 1 разу, но отличается между собой порядком расположения элементов.

Формула расчёта числа перестановок без повторений имеет вид:

 $P\_{n}=n!$

Перестановки с повторениями

 Даны $n\_{1}$ элементов вида 1 (неразличимых между собой), $n\_{2}$ элементов вида 2, … , $n\_{k}$ элементов вида *k*.

Из этих элементов образуют n-элементные последовательности, содержащие все перечисленные элементы

n=$n\_{1}+n\_{2}+…n\_{k}$.

Количество перестановок, образующих различные последовательности, рассчитывается по формуле:

$$\dot{ P\_{n}}=\frac{n!}{n\_{1}!n\_{2}!…n\_{k}!}$$

Размещения

Размещение без повторений

Дано множество A, содержащее *n* элементов. Размещениями без повторений называется упорядоченные последовательности длины *m*$\leq $*n*, в которых каждый элемент множества встречается не более 1 раза. Различными считаются последовательности, отличающиеся либо составом элементов, либо порядком расположения элементов.

Количество размещений без повторений из *n* элементов по *m* элементов рассчитывается по формуле:

$A\_{n}^{m}=\frac{n!}{\left(n-m\right)!}$ .

Размещения с повторениями

Размещения с повторениями отличаются от размещений без повторений тем, что одни и те же элементы могут многократно входить в рассматриваемую последовательность.

Количество размещений с повторениями из *n* элементов по *m* элементов рассчитываем по формуле: $\dot{A\_{n}^{m}}=n^{m}$.

Сочетания

Сочетания без повторений

Дано множество A, содержащее *n* элементов. Сочетаниями без повторений называются неупорядоченные последовательности длины *m*, в которых каждый элемент множества A встречается не более 1 раза. Различными считаются последовательности, отличающиеся составом элементов. Подчеркнем, что последовательности, отличающиеся только порядком расположения элементов, не считаются различными. Количество сочетаний без повторений из *n* элементов по *m* элементов рассчитываем по формуле: $C\_{n}^{m}=\frac{n!}{m!\left(n-m\right)!}$ .

Сочетания с повторениями

Сочетания с повторениями отличается от сочетаний без повторений тем, что в них могут входить повторяющиеся элементы.

Количество сочетаний c повторениями из n элементов по m элементов рассчитываем по формуле:

 $f\_{n}^{m}=\dot{C\_{n}^{m}}=\frac{(n+m-1)!}{m!\left(n-1\right)!}=C\_{n+m-1}^{m}$

То есть число сочетаний с повторениями подсчитывается по формуле сочетаний без повторений с другими параметрами.

ВАРИАНТ №1.

1. Сколько различных «слов», состоящих не менее чем из четырех разных букв, можно образовать из букв слова ”ученик”:
2. В магазине имеется 6 сортов шоколадных конфет и 4 сорта карамели. Сколько различных покупок конфет одного сорта можно сделать в этом магазине? Сколько можно сделать различных покупок, содержащих один сорт шоколадных конфет и один сорт карамели?
3. Сколько можно получить различных четырехзначных чисел, вставляя пропущенные цифры в число \*2\*5? в число 3\*7\*?
4. У одного человека имеется 7 книг по математике, а у другого—9. Сколькими способами они могут осуществить обмен книги на книгу?
5. В букинистическом магазине продаются 6 экземпляров романа И. С. Тургенева «Рудин», 3 экземпляра романа «Дворянское гнездо» и 4 экземпляра романа «Отцы и дети». Кроме того, имеется 5 томов, состоящих из романов «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, состоящих из романов «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?
6. Имеется 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки различные). Сколькими способами может быть накрыт стол для чаепития на трех человек, если каждый получит одну чашку, одно блюдце, одну ложку?
7. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?
8. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, если длина каждого его ребра может выражаться любым целым числом от 1 до 10?

ВАРИАНТ №2

1. В отряде 5 разведчиков, 4 связиста и 2- санитара. Сколькими способами можно выбрать одного солдата так, чтобы он был разведчиком или санитаром? Сколькими способами можно составить разведгруппу из трех человек, чтобы в нее вошли разведчик, связист и санитар?
2. Сколько различных трехбуквенных «слов» можно составить из букв слова “ромб”?
3. Сколько различных трехзначных чисел, меньших 400, можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9 при условии, что цифры в числе не должны повторяться? Решите ту же задачу при условии допустимости повторения цифр.
4. Сколькими способами можно распределить 12 различных учебников между четырьмя студентами?
5. Из полного набора шахмат вынули 4 фигуры или пешки. В скольких случаях среди них окажется: а) два коня, б) не менее двух коней?
6. Пять девушек и трое юношей играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по 4 человека, если в каждой команде должно быть, хотя бы по одному юноше?
7. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, если длина каждого его ребра может выражаться любым целым числом от 1 до 10?
8. В почтовом отделении продаются открытки десяти видов. Сколькими способами можно купить здесь набор из восьми открыток, если открыток каждого вида имеется не менее восьми штук?

ВАРИАНТ №3

1. Сколько различных полных обедов можно составить, если в меню имеется 3 первых, 4 вторых и 2 третьих блюда?
2. Сколько можно составить двузначных или трехзначных чисел из нечетных цифр при условии, что ни одна цифра не повторяется?
3. На железнодорожной станции имеются t светофоров. Сколько может быть дано различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: «красный», «желтый» и «зеленый»?
4. Сколькими способами можно разложить в два кармана 9 монет разного достоинства?
5. Сколько «слов», каждое из которых состоит из семи различных букв, можно составить из букв слова “выборка”?
6. В состав сборной включены 2 вратаря, 5 защитников, 6 полузащитников и 6 нападающих. Сколькими способами тренер может выставить на поле команду, в которую входит вратарь, 3 защитника, 4 полузащитника и 3 нападающих?
7. На прямой взяты t точек, а на параллельной ей прямой — n точек. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются эти точки?
8. Для премий на математической олимпиаде выделено 3 экземпляра одной книги, 2 экземпляра другой и 1 экземпляр третьей книги. Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвовало 20 человек (каждому из участников может вручаться только одна книга)?

Вариант №4

1. Сколько существует различных положений, в которых могут оказываться четыре переключателя, если каждый из них может быть включен или выключен? Построите «дерево» для всех возможных положении переключателей.
2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числах не повторяются?
3. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, французского, немецкого, итальянского на любой другой из этих пяти языков?

4 . Сколькими способами 10 человек могут встать в очередь друг за другом?

1. На прямой взяты t точек, а на параллельной ей прямой — n точек. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются эти точки?
2. Сколько букв алфавита можно составить из пяти сигналов используемых в каждой букве, если три сигнала — импульсы тока, а два — паузы?
3. Сколькими способами можно расставить на книжной полке библиотеки 5 книг по теории вероятностей, 3 книги по теории игр и 2 книги по математической логике, если книги по каждому предмету одинаковые?
4. Трое юношей и две девушки выбирают место работы. Сколькими способами они могут это сделать, если в городе есть три завода, где требуются рабочие в литейные цехи (туда берут лишь мужчин), две ткацкие фабрики (туда приглашают только женщин) и две фабрики, где требуются и мужчины и женщины?