Лабораторная работа №2

Отношения и функции

 Цель: Изучить определения декартова бинарного соответствия, функции, композиции соответствий. Научиться решать задачи по доказательству тождеств, включающих декартово произведение множеств и композиции соответствий.

 Вопросы, выносимые на практическое занятие.

1. Декартово произведение множеств.
2. Степень множества.
3. Понятие бинарного соответствия. Область определения и область значения бинарного соответствия. Понятия образа и прообраза.
4. Понятие функции. Недоопределённые (частично опрекделенные) и всюду определённые функции, разнозначные (1-1) функции. Понятие подстановки множества.
5. Композиция соответствий.
6. Сравнение бесконечных множеств по мощности.

Краткие теоретические положения

Декартовым произведением множеств A и B называются множество всех пар (x,y), где x – элемент множества А, а y – элемент множества B. Формально операция декартова произведения множеств A и B определяется следующим образом:

A × B = $\left\{x\in A и y\in B\right\}$.

Если в декартовом произведении n множеств $A\_{1},A\_{2}…A\_{n}$ , то можно

записать $ M=A\_{1}×A\_{2}×…×A\_{n}$.

Если в этом произведении принять $A\_{1}=A\_{2}…=A\_{n}=A$, то получим $A^{n}$, где $A^{n}$ является степенью множества A.

Бинарным соответствием между элементами множеств A и B называется любое множество R декартова произведения A×B, то есть R $⊆$ A×B.

Областью определения бинарного соответствия R называется множество вида: $δ\_{R}=\left\{существует y такое, что (x,y)\in R \right\}$.

Областью значений бинарного соответствия называется множество

$$ρ\_{R}=\left\{существует x такое, что (x,y)\in R \right\}$$

Обратным соответствием для бинарного соответствия R называют множество вида: $R^{-1}=\left\{(y,x)\in R \right\}$.

Пусть даны множества X и Y.

Бинарное соответствие R является функцией, если каждому элементу x $\in $X соответствует не более одного элемента y $\in $Y, что выполняется отношение $(y,x)\in R$ . Это по другому можно записать следующим образом: x R y или y=R(x). Значение функции y $\in $Y называют образом элемента x $\in $X, а сам элемент x $\in $X – прообразом элемента y.

Функция y=F(x) называется всюду определённой, если каждому элементу x $\in $X соответствует некоторый элемент y $\in $Y, в противном случае функция является недоопределённой (частично определённой).

Функция называется разнозначной (1-1) функцией, если для любых элементов $x\_{1}$,$ x\_{2},y$ из того, что y=f($x\_{1}$) и y=f($x\_{2}$), следует $x\_{1}=x\_{2}$.

Говорят, что функция f:A⟶B осуществляет взаимно-однозначное соответствие между A и B, если $δf=A, ρf=B$ и f является 1-1 функцией.

Взаимно-однозначное соответствие f:A⟶A называется подстановкой множества A и обозначается $i\_{A}$.

Композицией соответствий $R\_{1}$ $⊆$ A×B и $R\_{2}$ $⊆$ B×C называется соответствие: $ R\_{1}∘R\_{2}=\left\{существует z такое, что \left(x,z\right)\in R\_{1} и \left(z,y\right)\in R\_{2} \right\}$

Пример:$ R\_{1}=\left\{\left(1,2\right),\left(2,4\right),\left(3,6\right)\right\}$ ; $R\_{2}=\left\{\left(1,3\right),\left(2,6\right),\left(3,9\right),\left(4,12\right)\right\}$ $R\_{1}∘R\_{2}=\left\{\left(1,6\right),\left(2,12\right)\right\}$

(x=1,y=6,z=2) (x=2,y=12,z=4)

Вариант 1

Доказать, что существуют A,B такие, что: A×B≠ B×A.

Найти геометрическую интерпретацию следующего множества: (a,b]×[c,d), где (a,b] и [c,d)- полуинтервалы действительной прямой D.

Доказать, что если A,B,C и D не пусты, то: A $⊆$ B и C $⊆$ D$ ⇔$ A× C$ ⊆B×D$.

Доказать, что (A×B)$ ∪(C×D) ⊆$(A$ ∪$ C)×(В $∪$ D).

При каких множествах A,B,C и D получается равенство?

* 1. Доказать, что ($A∪B)$×($ C∪D$) = (A×C)$ ∪$(B×C)$ ∪$(A×D)$ ∪$(B×D).
	2. Найти $δ\_{R},ρ\_{R},R^{-1},R∘R,R∘R^{-1}$,$ R^{-1}∘R$ для отношения: $R$ = $\left\{x,y\in N и x делит y\right\}$.
	3. Доказать, что: $δ\_{R }$= ∅$ ⇔ $R = ∅$ ⇔ ρ\_{R}$ = ∅.
	4. Доказать, что: если B ≠ ∅, то $δ\_{A×B}=A$.
	5. Доказать, что для любых бинарных отношений: $R∪R$=$ R∩R$= R.
	6. Пусть A и B – конечные множества, состоящие из m и n элементов соответственно. Сколько существует бинарных соответствий между элементами множеств A и B?
	7. Пусть φ: A⟶A – подстановка множества A. Доказать, что $φ^{-1}$ – подстановка множества A.

Вариант 2

Доказать, что можно установить взаимно-однозначное соответствие между множествами A×B и B×A.

Найти геометрическую интерпретацию следующих множеств: [a,b)×[c,d), где [a,b) и [c,d) – полуинтервалы действительной прямой D.

Доказать, что если A,B,C и D не пусты, то: A $⊆$ B и C $⊆$ D$ ⇔$ A× C$ ⊆B×D$

Пусть A,B,С, D ≠ ∅ и (A×B)$ ∪$ (B×A)=C×D . Доказать, что A=B=C=D.

Доказать, что: (A $\ $B) × C = (A×C)$ \$(B×C).

Найти $δ\_{R},ρ\_{R},R^{-1},R∘R,R∘R^{-1}$,$ R^{-1}∘R$ для отношения: $R$ = $\left\{x,y\in N и y делится на x\right\}$.

Доказать, что: $δ\_{R^{-1}}=ρ\_{R}$, $ρ\_{R^{-1}}=δ\_{R}$.

Доказать, что: если B ≠ ∅, то $δ\_{A×B}=A$.

Доказать, что для любых бинарных отношений: $(R^{-1})^{-1}$=R.

Пусть A и B – конечные множества, состоящие из m и n элементов соответственно. Сколько имеется функций из A в B?

Пусть φ: A⟶B – взаимно однозначное соответствие. Доказать, что: $φ^{-1}$ – взаимно однозначное соответствие между B и A.

Вариант 3

1. Доказать, что можно установить взаимно однозначное соответствие между множествами: A×(B×C) и (A×B)×C.
2. Найти геометрическую интерпретацию следующего множества: $[a,b]^{2}$, где [a,b] – отрезок действительной прямой D.
3. Доказать, что если A,B,C и D не пусты, то: A=B и C=D $⇔$ A×C=B×D.
4. Пусть A,B≠ ∅ и (A×B)$ ∪$ (B×A)=C×D . Доказать, что A=B=C=D.
5. Доказать, что A×(B $\ $C)=(A×B)$ \$ (A×C)
6. Найти $δ\_{R},ρ\_{R},R^{-1},R∘R,R∘R^{-1}$,$ R^{-1}∘R$ для отношения: $R$ = $\left\{x,y\in D и x+y\leq 0\right\}$.
7. Доказать, что: $ δ\_{(R\_{1}∘R\_{2)}}=R\_{1}^{-1}(ρ\_{R\_{1}}∩δ\_{R\_{2}})$.
8. Доказать, что: если A≠ ∅, то $ρ\_{A×B}=B$.
9. Доказать, что для любых бинарных отношений:

 $(R\_{1}∪R\_{2})^{-1}=R\_{1}^{-1}∪R\_{2}^{-1}$.

1. Пусть A и B – конечные множества, состоящие из m и n элементов соответственно. Сколько имеется 1-1 функций из A в B?
2. Пусть φ: A⟶B – взаимно однозначное соответствие. Доказать, что: $φ^{-1}∘φ=i\_{B}$

Вариант 4

Доказать, что существуют множества A,B и C такие, что: A×(B×C) ≠ (A×B)×C.

Найти геометрическую интерпретацию следующего множества: $[a,b]^{3}$, где [a,b] – отрезок действительной прямой D.

Доказать, что если множества A,B,C и D не пусты, то: A=B и C=D$⇔$A×C=B×D.

Доказать, что: (A×B)$ ∪$(С×D)$ ⊆$(A$∪ $C)×(B $∪D$) . При каких множествах A,B,C и D получается равенство?

Доказать, что: A×B=(A×D)$ ∩$(C×B), где A$⊆$C и B$⊆$D.

Найти $δ\_{R},ρ\_{R},R^{-1},R∘R,R∘R^{-1}$,$ R^{-1}∘R$ для отношения: $R$ = $\left\{x,y\in D и x-y\leq 0\right\}$.

Доказать, что: $ρ\_{(R\_{1}∘R\_{2})}=R\_{2}(ρ\_{R\_{1}}∩δ\_{R\_{2}})$.

Доказать, что: если A≠ ∅, то $ρ\_{A×B}=B$.

Доказать, что для любых бинарных отношений имеет место равенство: $(R\_{1}∩R\_{2})^{-1}=R\_{1}^{-1}∩R\_{2}^{-1}$.

Пусть A и B – конечные множества, состоящие из m и n элементов соответственно. При каких m и n существуют взаимно однозначное соответствие между A и B?

Доказать, что объединение (пересечение) двух функций $f\_{1} и f\_{2}$ из A в B является функцией из A в B тогда и только тогда, когда $f\_{1}= f\_{2}$.