Лабораторная работа №2

Отношения и функции

Цель: Изучить определения декартова бинарного соответствия, функции, композиции соответствий. Научиться решать задачи по доказательству тождеств, включающих декартово произведение множеств и композиции соответствий.

Вопросы, выносимые на практическое занятие.

1. Декартово произведение множеств.
2. Степень множества.
3. Понятие бинарного соответствия. Область определения и область значения бинарного соответствия. Понятия образа и прообраза.
4. Понятие функции. Недоопределённые (частично опрекделенные) и всюду определённые функции, разнозначные (1-1) функции. Понятие подстановки множества.
5. Композиция соответствий.
6. Сравнение бесконечных множеств по мощности.

Краткие теоретические положения

Декартовым произведением множеств A и B называются множество всех пар (x,y), где x – элемент множества А, а y – элемент множества B. Формально операция декартова произведения множеств A и B определяется следующим образом:

A × B = .

Если в декартовом произведении n множеств , то можно

записать .

Если в этом произведении принять , то получим , где является степенью множества A.

Бинарным соответствием между элементами множеств A и B называется любое множество R декартова произведения A×B, то есть R A×B.

Областью определения бинарного соответствия R называется множество вида: .

Областью значений бинарного соответствия называется множество

Обратным соответствием для бинарного соответствия R называют множество вида: .

Пусть даны множества X и Y.

Бинарное соответствие R является функцией, если каждому элементу x X соответствует не более одного элемента y Y, что выполняется отношение . Это по другому можно записать следующим образом: x R y или y=R(x). Значение функции y Y называют образом элемента x X, а сам элемент x X – прообразом элемента y.

Функция y=F(x) называется всюду определённой, если каждому элементу x X соответствует некоторый элемент y Y, в противном случае функция является недоопределённой (частично определённой).

Функция называется разнозначной (1-1) функцией, если для любых элементов , из того, что y=f() и y=f(), следует .

Говорят, что функция f:A⟶B осуществляет взаимно-однозначное соответствие между A и B, если и f является 1-1 функцией.

Взаимно-однозначное соответствие f:A⟶A называется подстановкой множества A и обозначается .

Композицией соответствий A×B и B×C называется соответствие:

Пример: ;

(x=1,y=6,z=2) (x=2,y=12,z=4)

Вариант 1

Доказать, что существуют A,B такие, что: A×B≠ B×A.

Найти геометрическую интерпретацию следующего множества: (a,b]×[c,d), где (a,b] и [c,d)- полуинтервалы действительной прямой D.

Доказать, что если A,B,C и D не пусты, то: A B и C D A× C.

Доказать, что (A×B)(A C)×(В D).

При каких множествах A,B,C и D получается равенство?

* 1. Доказать, что (×() = (A×C)(B×C)(A×D)(B×D).
  2. Найти , для отношения: = .
  3. Доказать, что: = ∅R = ∅ = ∅.
  4. Доказать, что: если B ≠ ∅, то .
  5. Доказать, что для любых бинарных отношений: == R.
  6. Пусть A и B – конечные множества, состоящие из m и n элементов соответственно. Сколько существует бинарных соответствий между элементами множеств A и B?
  7. Пусть φ: A⟶A – подстановка множества A. Доказать, что – подстановка множества A.

Вариант 2

Доказать, что можно установить взаимно-однозначное соответствие между множествами A×B и B×A.

Найти геометрическую интерпретацию следующих множеств: [a,b)×[c,d), где [a,b) и [c,d) – полуинтервалы действительной прямой D.

Доказать, что если A,B,C и D не пусты, то: A B и C D A× C

Пусть A,B,С, D ≠ ∅ и (A×B) (B×A)=C×D . Доказать, что A=B=C=D.

Доказать, что: (A B) × C = (A×C)(B×C).

Найти , для отношения: = .

Доказать, что: , .

Доказать, что: если B ≠ ∅, то .

Доказать, что для любых бинарных отношений: =R.

Пусть A и B – конечные множества, состоящие из m и n элементов соответственно. Сколько имеется функций из A в B?

Пусть φ: A⟶B – взаимно однозначное соответствие. Доказать, что: – взаимно однозначное соответствие между B и A.

Вариант 3

1. Доказать, что можно установить взаимно однозначное соответствие между множествами: A×(B×C) и (A×B)×C.
2. Найти геометрическую интерпретацию следующего множества: , где [a,b] – отрезок действительной прямой D.
3. Доказать, что если A,B,C и D не пусты, то: A=B и C=D A×C=B×D.
4. Пусть A,B≠ ∅ и (A×B) (B×A)=C×D . Доказать, что A=B=C=D.
5. Доказать, что A×(B C)=(A×B) (A×C)
6. Найти , для отношения: = .
7. Доказать, что: .
8. Доказать, что: если A≠ ∅, то .
9. Доказать, что для любых бинарных отношений:

.

1. Пусть A и B – конечные множества, состоящие из m и n элементов соответственно. Сколько имеется 1-1 функций из A в B?
2. Пусть φ: A⟶B – взаимно однозначное соответствие. Доказать, что:

Вариант 4

Доказать, что существуют множества A,B и C такие, что: A×(B×C) ≠ (A×B)×C.

Найти геометрическую интерпретацию следующего множества: , где [a,b] – отрезок действительной прямой D.

Доказать, что если множества A,B,C и D не пусты, то: A=B и C=DA×C=B×D.

Доказать, что: (A×B)(С×D)(AC)×(B ) . При каких множествах A,B,C и D получается равенство?

Доказать, что: A×B=(A×D)(C×B), где AC и BD.

Найти , для отношения: = .

Доказать, что: .

Доказать, что: если A≠ ∅, то .

Доказать, что для любых бинарных отношений имеет место равенство: .

Пусть A и B – конечные множества, состоящие из m и n элементов соответственно. При каких m и n существуют взаимно однозначное соответствие между A и B?

Доказать, что объединение (пересечение) двух функций из A в B является функцией из A в B тогда и только тогда, когда .